Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-06

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Írja le a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget! *(1 pont)*

2. Hány megoldása lehet az alábbi egyenletrendszereknek: *(2 pont)*

a) n ismeretlenes, k egyenletből álló, valós, $k < n$;

b) n ismeretlenes, k egyenletből álló, valós, $k > n$;

c) n ismeretlenes, $n-2$ egyenletből álló, F_5 fölötti, az együtthatómátrix rangja $n-2$;

3. Legyen $\mathbf{A}$ egy valós 2015×2015-ös mátrix, mely kielégíti az $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$ egyenlőséget. Mennyi lehet a determinánsának értéke? *(2 pont)*

4. A Gershgorin-körök felhasználásával mutassuk meg, hogy a

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak minden sajátértéke valós. *(2 pont)*

5. Ismerjük az $\mathbf{A}$ mátrix bal és jobb Perron-vektorát: $\mathbf{p} = (.1, .2, .4, .3)$, $\mathbf{q} = (.4, .2, .2, .2)$, valamint spektrálsugarát: $r = 3$. *(a)* Milyen feltétellel létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n$$

határérték? *(b)* Mennyi ez a határérték? *(2 pont)*

6. A 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixnak a 2015 hétszeres sajátértéke, és Jordan-féle normálalakjában 3 db 1×1-es és 1 db 4×4-es Jordan blokk van. Adjuk meg minden pozitív k egész esetén az $(\mathbf{A} - 2015\mathbf{I})^k$ mátrix nullterének dimenzióját! *(2 pont)*

7. Adva van az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix. Igaz-e, hogy van olyan másodfokú p polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$? Ha igen, van-e olyan C paraméter, melyre $C\mathbf{A}^2 - e^2\mathbf{A} + e^2\mathbf{I} = e^{\mathbf{A}}$, és mennyi C értéke? *(2 pont)*

8. Mondja ki az Eckart–Young-tételt. *(2 pont)*

9. Hogyan található meg egy egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása a QR-felbontással? *(a)* Igazolja az állítást! *(b)* Miért érdemes e módszert használni? *(5+1 pont)*

10. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*