Sztochasztika 2 pótZH

2014. május 20. 10:00

Felsőbb matematika informatikusoknak D

Munkaidő: 60 perc. Minden feladat 6,67 pontot ér.

1. Egy számítógépes vírus terjedése során a fertőzött gép egyesével próbál újabb (tiszta) gépeket megfertőzni. A fertőzés mindig $\frac{1}{2}$ valószínűséggel sikeres (az előzményektől függetlenül, feltéve, hogy a vírust még nem fedezték fel), ám a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a vírust felfedezik és letörlik – így a fertőzés nem sikerül, és az a gép már nem is fertőz tovább. Kezdetben egyetlen fertőzött gép van, és ezt egymagát nevezzük a fertőzöttek „nulladik generációjának”. Az általa megfertőzött gépeket nevezzük „első generációnak”, az első generáció tagjai által megfertőzötteket a „második generációnak”, stb. Jelölje Z_n az n-edik generáció tagjainak a számát ($n = 0, 1, 2 \dots$).

   a.) Milyen eloszlású lesz Z_1, vagyis a legelső gép által megfertőzött gépek száma? (Adjuk meg a $\mathbb{P}(Z_1 = k)$ valószínűségeket $k = 0, 1, 2, \dots$-re, vagy nevezzük nevén az eloszlást.)

   b.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?

   c.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

   d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik generációra a vírus kihal, vagyis hogy $Z_3 = 0$?

   e.) Mennyi a valószínűsége, hogy a vírus előbb-utóbb kihal?

   f.) Legyen $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ a vírus története során megfertőzött összes gép száma (a legelsőt is beleértve). Mennyi N várható értéke?

2. Egy tantárgyból hosszú évek statisztikája szerint csak a hallgatók $\frac{2}{3}$-a jelenik meg a ZH-n, abban az értelemben, hogy minden hallgató a többitől függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jön el. Ezért egy ZH-ra, ahova 100 hallgató hivatalos, egy spórolós oktató csak 84 feladatsort akar vinni. Azzal érvel, hogy a centrális határeloszlás tétel (CHT) szerint csak nagyon kis valószínűséggel jelennek meg ennél többen.

   Igen ám, de legfeljebb mekkora lehet a CHT becslés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételbeli konstans választható 0,4748-nak.)

3. Egy tantárgyból hosszú évek statisztikája szerint csak a hallgatók $\frac{2}{3}$-a jelenik meg a ZH-n, abban az értelemben, hogy minden hallgató a többitől függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jön el. Ezért egy ZH-ra, ahova 100 hallgató hivatalos, egy spórolós oktató csak 84 feladatsort visz. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy kevés lesz a feladatsor, vagyis hogy legalább 85 hallgató megjelenik.

   Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

   A p paraméterű pesszimista (vagyis 0-tól induló) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{x}{(1-p)(1-x)} - \ln(p(1-x)).$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$