1. feladat — 4+10 pont

Mondja ki az algebra alaptételét!

Adja meg az $\imath z^2 + 2z - 5\imath = 0$ másodfokú egyenlet megoldásainak abszolút értékét!

Megoldás: **Tétel:** Egy p(z) legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke.

A gyökök $z_1 = 2 + \imath$ és $z_2 = -2 + \imath$ **8p.**.

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$ **2p.**

2. feladat — 4+4+4 pont

Legyen $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 6}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$!

(a) Igazolja, hogy $1 \le a_n \le 6$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

(b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton növő!

(c) Adja meg az a_n sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

(a) Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n = 1$-re $1 \le 2 = a_1 \le 6$ teljesül.

Indukciós lépés: ha $1 \le a_n \le 6$, akkor $7 \le 7a_n \le 42 \implies 1 \le 7a_n - 6 \le 36 \implies 1 \le \underbrace{\sqrt{7a_n - 6}}_{a_{n+1}} \le 6$.

(b) Megmutatjuk, hogy $a_n \le \sqrt{7a_n - 6} = a_{n+1}$.

Négyzetre emelve mindkét oldalt kapjuk, hogy $a_n^2 \le 7a_n - 6$, azaz $a_n^2 - 7a_n + 6 = (a_n - 6)(a_n - 1) \le 0$, ami valóban teljesül minden n-re, hiszen (a) miatt $a_n - 6 \le 0$, és $a_n - 1 \ge 0$.

(c) Mivel a sorozat korlátos és monoton növő, ezért konvergens és $\lim a_n = \sup a_n = A \in \mathbb{R}$. De ekkor $A = \lim a_{n+1}$ is teljesül, mert ez egy részsorozat, ugyanakkor $\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{7a_n - 6}$. A határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim \sqrt{7a_n - 6} = \sqrt{\lim 7a_n - 6} = \sqrt{7A - 6}$, ahonnan $A = 1$, vagy $A = 6$. De $A = \sup a_n$ felső korlát, és $1 < 2 = a_1$, vagyis az 1 nem felső korlát, tehát $\lim a_n = A = 6$.

3. feladat **4+6+4 pont**

Legyen f az a pont egy környezetében értelmezett, a-ban deriválható függvény! Mondja ki és bizonyítsa be az a-beli lokális maximumra tanult szükséges feltételt! Mutassa meg, hogy a feltétel nem elégséges!

Megoldás: **Tétel:** Ha az f függvény deriválható az értelmezési tartomány a belső pontjában, és ott lokális maximuma van, akkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás: Mivel f-nek lokális maximuma van a-ban, és a belső pontja D_f-nek, ezért létezik $\delta > 0$, amire $f(x) \le f(a)$, ha $|x - a| < \delta$.

Speciálisan, ha $a-\delta < x < a$, akkor $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0$, így $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0$.

Ugyanakkor, ha $a < x < a + \delta$, akkor $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0$, így $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0$.

A fenti féloldali deriváltak léteznek, mert f deriválható a-ban, sőt egyenlőek is, azaz $0 \le f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \le 0$, azaz valóban $f'(a) = 0$.

Legyen $f(x) = x^3$, és $a = 0$. Ekkor a belső pontja $D_f = \mathbb{R}$-nek, $f'(a) = f'(0) = 0$, mégsem lokális minimum. ($f(x) = x^2$ is jó)

4. feladat **8 pont**

Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^3 - x}{2x^2 - 3x + 1}, & \text{máskor} \end{cases}$$

függvény?

Megoldás: $x \ne 0, 1$ esetén a és b választásától függetlenül folytonos. $\boxed{\textbf{1p.}}$
A 0-ban és 1-ben pontosan akkor folytonos, ha a féloldali határértékek megegyeznek.

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{2x^2 - 3x + 1} = 0$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (ax + b) = b$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (ax + b) = a + b$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{2x^2 - 3x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x-1/2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x+1)}{2x-1} = 2$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

Az egyenletrendszer $b = 0$, $a + b = 2$ megoldása $a = 2$ és $b = 0$. Pontosan ekkor lesz folytonos a függvény $\boxed{\textbf{2p.}}$.

5. feladat **6 pont**

Adja meg az

$$f(x) = \frac{e^{x^3+x^2-x-1}}{x^2 \cos(x+1)}$$

függvény $a = -1$-beli érintőegyenesének egyenletét!

Megoldás: $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 2x - 1)e^{x^3+x^2-x-1}x^2 \cos(x+1) - e^{x^3+x^2-x-1}(2x\cos(x+1) + x^2 \sin(x+1))}{x^4 \cos^2(x+1)}$

$\boxed{\textbf{4p.}}$

$f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, így az egyenlet $y = 2 \cdot (x + 1) + 1 = 2x + 3$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

6. feladat* **6+6 pont**

Mutassa meg, hogy az $x(t) = \mathrm{e}^t + t^2$, $y(t) = \operatorname{sh} t + t^2$ paraméteres görbének, $t_0 = 0$ esetén létezik az $x_0 = x(t_0)$ pont egy környezetében $y = f(x)$ előállítása! $f'(x_0) = ?$

Megoldás: $x'(t) = \mathrm{e}^t + 2t$. $x'(0) = 1 > 0$, $x'(t)$ folytonossága miatt 0 egy környezetében is pozitív, ezért itt $x(t)$ szigorúan monoton növő, vagyis invertálható, ezért ezen a környezeten létezik $y = f(x)$ előállítás $\boxed{\textbf{6p.}}$.

$y'(t) = \operatorname{ch} t + 2t$, így $f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ $\boxed{\textbf{6p.}}$

7. feladat* **8+8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x+1)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = ?$ (c) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) $\dfrac{x^2+1}{x(x-2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} \implies x^2+1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx = (A+B)x^2 + (-4A-2B+C)x + 4A \implies 4A = 1,\ -4A-2B+C = 0,\ A+B = 1 \implies A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{5}{2}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/4}{x} + \frac{3/4}{x-2} + \frac{5/2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{5/2}{x-2} + c$ $\boxed{\textbf{4p.}}$.

(b) $$\int_0^{\pi} \underbrace{(x+1)}_{f}\underbrace{\sin(2x)}_{g'}\,\mathrm{d}x = \left[\underbrace{(x+1)}_{f}\left(\underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{g}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\underbrace{1}_{f'}\left(\underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{g}\right)\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{4p.}} =$$ $$\left[-(x+1)\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi+1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2}\ \boxed{\textbf{4p.}}.$$

(c) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x^2) + c$ $\boxed{\textbf{8p.}}$.

8. feladat* **10 pont**

Forgassuk meg a $\operatorname{ctg} x$ függvény $x = \dfrac{\pi}{4}$ és $x = \dfrac{\pi}{2}$ közötti részét az x tengely körül! Mennyi a kapott test térfogata?

Megoldás: $$V = \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{3p.}} = \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{3p.}} =$$ $$\pi\left[-\operatorname{ctg} x - x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\ \boxed{\textbf{2p.}} = \pi - \frac{\pi^2}{4}\ \boxed{\textbf{2p.}}.$$