# Matematika A2a
## 2012/13/II. U0, W0 kurzus
## 1. vizsga dolgozat
*2013. 05. 30. 10.15–11.45*

Név: ______________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$: |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

1. Határozza meg az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\sin\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}, & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény parciális deriváltjait.

Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor

$$(\partial_x f)(x,y)=\cos\left(\frac{2x^3y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{6x^2y(x^2+y^2)-4x^4y}{(x^2+y^2)^2};$$
$$(\partial_y f)(x,y)=\cos\left(\frac{2x^3y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{2x^3(x^2+y^2)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

A $(0,0)$ pontban

$$(\partial_x f)(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}0=0;$$
$$(\partial_y f)(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}0=0.$$

2. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e vagy sem. *(10 p.)*

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cos(4n^2)+2}{5n^3+2n+7}$ b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

a. Mivel minden $N\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{n\cos(4n^2)+2}{5n^3+2n+7}\right|\le\sum_{n=1}^{N}\frac{n+2n}{5n^3}\le\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2}\le\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le\infty,$$

ezért a sorozat abszolút konvergens, tehát konvergens is.

b. A sor Leibniz-sor, ugyanis az $n\mapsto\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ sorozat

– monoton csökkenő

– és a nullához konvergál.

Mivel minden Leibniz-sor konvergens, ezért a sor konvergens.

3. Határozza meg annak az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésnek a mátrixát, mely minden $v \in \mathbb{R}^2$ vektort az $y = -x$ egyenesre tükröz. *(10 p.)*

A $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ vektor az egyenes egységnyi hosszú irányvektora. Legyen $v \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges vektor.
A $v$ vektor egyenessel párhuzamos komponense $v_1 = w\langle v, w\rangle$.
A $v$ vektor egyenesre merőleges komponense $v_2 = v - v_1$.
A $v$ vektor tükörképe ekkor $v' = v_1 - v_2 = 2v_1 - v = 2w\langle v, w\rangle - v$.
A komponenseket kiírva

$$Av = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\langle (x,y), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\rangle - (x,y) = (1,-1)\cdot(x-y) - (x,y) =$$
$$= (x-y, y-x) - (x,y) = (-y,-x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vagyis $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2 + x + n}{x^2 + n}$. *(10 p.)*
   a. Mi lesz a pontonkénti $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény?
   b. Egyenletesen konvergál-e az $f_n$ függvénysorozat az $f$ határfüggvényhez a $[1, 10]$ halmazon?
   c. Számolja ki a
   $$\lim_{n\to\infty}\int_1^{10} f_n(x)\ \mathrm{d}\,x$$
   határértéket.

a. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x+n}{x^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}+1}{\frac{x^2}{n}+1} = \frac{0+0+1}{0+1} = 1.$$

b. Az $f_n$ és az $f$ függvény eltérése $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{x^2+n} =: \alpha(x)$. Mivel

$$\alpha'(x) = \frac{n - x^2}{x^2+n},$$

ezért $n \geq 100$ esetén az $\alpha$ függvény monoton növő, vagyis ilyenkor

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[1,10]} |\alpha(x)| = \alpha(10) = \frac{10}{100+n}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$, ezért a konvergencia egyenletes.
c. Mivel az $f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f$ határfüggvényhez, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{10} f_n(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_1^{10}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\ \mathrm{d}\,x = \int_1^{10} 1\ \mathrm{d}\,x = 9.$$

5. Legyen $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le z\}$, valamint legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x+z$. Számolja ki az $\iiint_U f \ \mathrm{d}\,V$ integrál értékét. *(10 p.)*

$$\iiint_U f \ \mathrm{d}\,V = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (2r\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 2\pi \sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r = \int_0^2 \left[r^3\pi\sin^2\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r =$$

$$= \int_0^2 r^3\pi \,\mathrm{d}\,r = \left[\frac{r^4\pi}{4}\right]_0^2 = 4\pi$$

6. Definíciók és tételek. *(10 p.)*

a. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^3$ és $A \in \mathbb{R}^2$. Definíció szerint mit jelent az $\lim_{x\to a} f(x) = A$ egyenlőség?

b. Definíció szerint mit jelent, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz nyílt?

c. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Milyen feltételek mellett teljesül az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) \ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}\,x$$

egyenlőség?

a. Az $a$ pont torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaznak, valamint

$$\forall\delta \in \mathbb{R}^+ \exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \qquad 0 < \|x-a\| < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad \|f(x)-A\| < \delta.$$

b. $\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ : \quad B_r(x) \subseteq U$.

c. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor felcserélhető az integrálás és az összegzés.