Lineáris algebra

Def: **Mátrix**: egy téglalap alakú számtáblázat, minden helyén valós, vagy komplex szám áll
$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = [a_{ij}]_{n \times m}$ n: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sorainak száma, m: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopainak száma

Def: **négyzetes mátrix:** n x n-es mátrix
oszlop mátrix, oszlop vektor: egyetlen oszlopból áll

Műveletek mátrixokon:

1) számmal szorzás:
   Def: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$, ha a kettő egyforma méretű, és a megfelelő helyeken ugyanazok a számok állnak
   $c\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = [c\cdot a_{ij}]_{m \times n}$
2) mátrixok összeadása:
   Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ azonos méretű mátrixok, akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}} +/- \underline{\underline{\mathbf{B}}} = [a_{ij} +/- b_{ij}]_{m \times n}$
3) mátrixok szorzása
   Ha $\underline{u}$ egy n elemből álló sorvektor, és $\underline{v}$ egy ugyanennyi elemből álló oszlopvektor, akkor
   $$\underline{u}\cdot\underline{v} = u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n$$
   Megj: ha n=2 és n=3, akkor a sík és térvektorok skaláris szorzása
   Def:Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mxn-es, és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ nxr-es mátrix, tehát $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopainak a száma megegyezik $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ sorainak a számával, akkor a két mátrix ebben a sorrendben összeszorozható

   $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mxr-es mátrix lesz, és $c_{ik} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$

Tétel: Műveleti szabályok

a) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}$
b) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}$
c) $(a+b)\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = a\underline{\underline{\mathbf{A}}} + b\underline{\underline{\mathbf{A}}}$
d) $a(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = a\underline{\underline{\mathbf{A}}} + a\underline{\underline{\mathbf{B}}}$
e) $(ab)\underline{\underline{\mathbf{A}}} = a(b\underline{\underline{\mathbf{A}}})$
f) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{BC}}}) = (\underline{\underline{\mathbf{AB}}})\underline{\underline{\mathbf{C}}}$
g) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = \underline{\underline{\mathbf{AB}}} + \underline{\underline{\mathbf{AC}}}$
   $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}})\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{AC}}} + \underline{\underline{\mathbf{BC}}}$
h) $a(\underline{\underline{\mathbf{BC}}}) = (a\underline{\underline{\mathbf{B}}})\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}(a\underline{\underline{\mathbf{C}}})$

Furcsaságok

1) $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{BA}}}$
2) $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}})^2 \neq \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 + 2\underline{\underline{\mathbf{AB}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2$
3) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$ nem következik, hogy $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \neq 0$
4) $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = 0$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$ nem következik, hogy $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$
5) $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{AC}}}$; $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$ nem következik, hogy $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$

Def: elemi sortranszformációk mátrixokon:

a) A mátrix egyik sorának szorzása egy számmal a többit hagyjuk
b) Az i-ik és j-ik sor cseréje
c) Az i-ik sorban j-ik sor számszorosának hozzáadása

Def: Elemi oszloptranszformációk: ugyanaz mint a sortranszformációknál, csak oszlopokkal

Def: Egységmátrix: $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$
négyzetes mátrix a főtlóban 1-esek, a többi 0

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ olyan, hogy $\underline{\underline{\mathbf{XE}}}$ létezik, akkor $\underline{\underline{\mathbf{XE}}} = \underline{\underline{\mathbf{X}}}$
Ha $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ olyan, hogy $\underline{\underline{\mathbf{EX}}}$ értelmes, akkor $\underline{\underline{\mathbf{EX}}} = \underline{\underline{\mathbf{X}}}$

Spec: minden $0 \neq a$-hoz létezik olyan b, hogy $ab = 1$

Def: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ -hoz létezik olyan $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, hogy $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{BA}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$, akkor $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ (inverz mátrix)
Köv: csak négyzetes mátrixnak van inverze és az inverz is ugyanolyan méretű

Tétel: Ha van $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ -nak inverze, akkor az egyértelmű
Biz: $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \underbrace{(\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}})}_{=\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1\underbrace{(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2)}_{=\underline{\underline{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$, ha $(ad - bc) \neq 0$, csak 2x2-es mátrixra

pl.: $$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Az invertálható mátrixszal lehet egyszerűsíteni
Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ invertálható, akkor
a) $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{AC}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$
b) $\underline{\underline{\mathbf{BA}}} = \underline{\underline{\mathbf{CA}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$
c) $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$
d) $\underline{\underline{\mathbf{BA}}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$

Biz: $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{AC}}}$ létrehozzuk $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$-gyel

$$\underbrace{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{=\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underbrace{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{=\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$$

Megj: $\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{CA}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$

<u>Inverz mátrix kiszámítása:</u>
Sortranszformációkkal

$$[\underline{\underline{\mathbf{A}}}][\underline{\underline{\mathbf{E}}}] \rightarrow \ldots \rightarrow [\underline{\underline{\mathbf{E}}}][\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}]$$

Pl.: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}},\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ négyzetes mátrix, akkor

$$\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$$

$$[\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\underline{\mathbf{E}}}] \rightarrow [\,\underline{\underline{\mathbf{S}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\underline{\mathbf{S}}}_1\underline{\underline{\mathbf{E}}}] \rightarrow [\,\underline{\underline{\mathbf{S}}}_2\underline{\underline{\mathbf{S}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\underline{\mathbf{S}}}_2\underline{\underline{\mathbf{S}}}_1] \rightarrow [\underbrace{\underline{\underline{\mathbf{S}}}_n\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{n-1} \ldots \underline{\underline{\mathbf{S}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{=\underline{\underline{\mathbf{E}}}}|\underbrace{\underline{\underline{\mathbf{S}}}_n\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{n-1} \ldots \underline{\underline{\mathbf{S}}}_1}_{=\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}}]$$

<u>Mátrixinvertálás elméleti kérdései:</u>

1) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ban az első oszlop „rendbetétele” (sortranszformációkkal létrehozzuk az $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ első sorát)
   a) Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ első oszlopa csupa 0, akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ nem invertálható
   b) Ha van $\neq 0$ szám az első oszlopban, de $a_n = 0$, akkor sorcserével elérhető, hogy (1;1)-en $\neq 0$ legyen
   c) A sor szorzásával elérhető lesz, hogy (1;1)-en 1 álljon
   d) Az első sor számszoroasait az alatta lévő sorokból kivonva elérhető, hogy (1;1) alatt csak 0 legyen

2) A 2. oszlop rendezése
   a) ha (1;2) alatt csak 0 van, akkor a mátrix nem invertálható
   b) sorcserével elérhető, hogy (2;2)-n $\neq 0$ álljon
   c) a sort szorozva elérhető, hogy (2;2)-n 1 legyen
   d) a 2. sor számszorosait kivonva a többi sorból elérhető, hogy az oszlopban a többi sorban csak 0 legyen

Def: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ n x m-es mátrix <u>transzponáltja</u> az m x n-es mátrix, amelynek (i;j)-edik eleme $a_{j\,i}$

Jele: $[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T]$ $\quad$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ „tükrözése a főátlóra”

Pl.: $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Tétel: A transzponálás tulajdonságai:
   a) $(c\underline{\underline{\mathbf{A}}})^T = c\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$
   b) $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}})^T = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$
   c) $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})^T = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$

Biz: c) $(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T)_{i\,j}$ = ($\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$ i-ik sora)($\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ j-ik oszlopa) = ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ j-ik sora)($\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ i-ik oszlopa) =
= $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})_{j\,i} = ((\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})^T)_{i\,j}$

Def: <u>Vektortér</u> (bináris tér)

Egy $0 \neq V$ halmaz (elemei síkvektorok), ha
   1) Minden $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorhoz tartozik egy $\underline{v} + \underline{w}$-vel jelölt vektor
   2) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ minden V-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$-re
   3) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ minden $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$
   4) létezik $\underline{0} \leq V$, melyre $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ minden $\underline{u}$
   5) minden $\underline{u}$-hoz létezik $-\underline{u}$ ($-\underline{u}$ benne van a V halmazban), melyre $\underline{u} + (-\underline{u}) = 0$
   6) minden c valós vagy komplex számra, és minden V-beli $\underline{v}$ vektorra létezik V-beli $c\underline{v}$ (a vetkortér <u>valós</u>, ha c valós szám, komplex, ha c komplex szám
   7) $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$ $\quad$ minden c, $\underline{u}$, $\underline{v}$
   8) $(c + d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$ $\quad$ minden c, d, $\underline{u}$
   9) $c(d\underline{u}) = (cd)\underline{u}$
   10) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

Pl.: minden vektortérben
   a) a $\underline{0}$ egyértelmű
   b) $-\underline{u} = (-1)\underline{u}$
   c) $0 \cdot \underline{u} = \underline{0}$

Példák:

1) V = {[a;b]-n értelmezett összes valós értékű függvény}
2) V = {3 x 2-es valós mátrixok}
3) V = {(c_n) valós sorozatok}

Pl.: $(c\underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1} = (1/c)\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$

$(\underline{\underline{\mathbf{AB}}})^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$

Def: <u>altér</u>: A $0 \neq$ W V-beli részhalmazt altérnek nevezzük, ha W is vektortér a V-beli műveletekre

Áll: A $0 \neq$ W V-beli részhalmaz altér $\leftrightarrow$ a két vektorművelet nem vezet ki W-ből
W-beli $\underline{w}_1$; $\underline{w}_2$ esetén $c \cdot \underline{w}_1$ és $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ is elem W-nek
Biz: a műveleti azonosságok továbbra is fennállnak
létezik $\underline{0}$, mert W-beli $\underline{w}$ miatt $0 \cdot \underline{w} = \underline{0}$, ami eleme W-nek
létezik $-\underline{w} = (-1)\underline{w}$, ami szintén eleme W-nek

Pl.: - a sorozatok vektorterében altér a konvergens sorozatok összessége
nem altér viszont a divergens sorozatok összessége
- a függvények vektorterében altér ([a;b] (a;b szakaszon folytonos függvények) összessége
- altér a {legfeljebb 3-ad fokú polinomok összessége}
nem altér a [3-ad fokú polinomok összessége]

Def: A $\underline{v}_1;\underline{v}_2; \dots ; \underline{v}_n$ eleme V vektorok <u>lineáris kombinációja</u> $c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n$
A lineáris kombináció triviális, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Def: A $\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n = 0 \leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$
$\underline{v}_1; \dots; \underline{v}_n$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független, ilyenkor $c_1\underline{v}_1 + \dots c_n\underline{v}_n = 0$ miatt minden $c_i \neq 0$ esetén $\underline{v}_i$ a vektor lineáris kombinációja

Pl.: $\underline{v}$ lineárisan összefüggő $\leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$
$\{\underline{v}_1; \underline{v}_2\}$ lineárisan összefüggő $\leftrightarrow$ $c \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_2$
$c \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1$

Tétel: Ha $\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n$ V-beli vektorok, akkor a W = $\{c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n; c_1; \dots; c_n$ valós számok$\}$, W V részhalmaza, W részhalmaz altere V-nek
W = Lin($\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n$), a $\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n$ által generált (kifeszített) altere V-nek
Biz: Két lineáris kombináció összege, és egy lineáris kombináció konstansszorosa is lineáris kombináció

Def: $\{\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n\}$ vektorrendszer <u>generátorrendszer</u> V-ben, ha V = Lin$\{ \underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n\}$, azaz ha minden V-beli $\underline{v}$ felírható $\underline{v} = c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n$ alakban
Pl.: $\{1; x; x^2; x^3\}$ generátor rendszer a legfeljebb 3-adfokú polinomok vektortérben, sőt bázis, mert $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$

Def: $\{\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n\}$ bázis V-ben, ha lineárisan független generátorrendszer

Tétel: $\{\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n\}$ bázis V-ben $\leftrightarrow$ minden V-beli $\underline{v}$ <u>egyértelműen felírható</u> $\underline{v} = c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n$ alakban
Biz: generátorrendszer $\leftrightarrow$ van felírás
lineáris függetlenség $\leftrightarrow$ nincs egynél több felírás

Pl.: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ bázis R^4 -en

$$\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

<u>Módszer lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázistulajdonság eldöntésére:</u>

Legyen V-ben bázis $\{e_1; \dots ; e_n\}$. Felírjuk $\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n$-t ; $\underline{v}_j = \alpha_{1j}\underline{e}_1 + \alpha_{2j}\underline{e}_2 + \dots + \alpha_{nj}\underline{e}_n$

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix}\alpha i1 & \alpha i2 & \dots & \alpha 1n\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ \alpha n1 & \alpha n2 & \dots & \alpha nn\end{bmatrix}$$

Sortranszformációk: minél több oszlop legyen egy 1-sel és n – 1 0-val, az 1-esek különböző magasságokban (<u>szabályos oszlopok</u>). Ha több szabályos oszlop nem készíthető [az eddigi 1-esek sorain kívül minden sor ≡ 0], akkor:

a) A szabályos oszlopoknak megfelelő $\underline{v}_i$-ik lineárisan függetlenek, a többi $\underline{v}_j$ felírható ezen $\underline{v}_i$-ik lineáris kombinációjaként, melynek együtthatói a $\underline{v}_j$ oszlopában vannak

b) $\{\underline{v}_1; \dots ; \underline{v}_n\}$ lineárisan független ↔ minden oszlop szabályos
generátorrendszer ↔ n db szabályos oszlop van
bázis ↔ m = n és n db szabályos oszlop van

Pl.: Hány független van $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$; $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$; $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}$; $\underline{v}_4 = \begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix}$ vektorok

között?

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & 6 & 7\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ '1' & 5 & 1 & -2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0 & 13 & 8 & 3\\ 0 & 2 & '-1' & 0\\ 1 & 5 & 1 & -2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0 & 29 & 0 & '3'\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 0 & -2\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{29}{3} & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{79}{3} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A kiindulási $\underline{v}_1$; $\underline{v}_3$; $\underline{v}_4$ lineárisan függetlenek, $\underline{v}_2$ pedig felírható velük

$$\underline{v}_2 = \frac{79}{3}\cdot \underline{v}_1 + (-2)\cdot \underline{v}_3 + \frac{29}{3}\cdot \underline{v}_4$$

Van n = 3 szabályos oszlop → $\underline{v}_1$; $\underline{v}_3$; $\underline{v}_4$ generátorrendszer, lineárisan függetlenek is → $\{\underline{v}_1; \underline{v}_3; \underline{v}_4\}$ bázis R^3-ban

Tétel: Ha van n elemű bázis, akkor:

a) bármely lineárisan független vektorrendszer legfeljebb n elemű
b) bármely n elemű lineárisan független rendszer bázis
c) bármely generátorrendszer legalább n elemű
d) bármely n elemű generátorrendszer bázis

Köv: V-ben bármely két bázis ugyanolyan elemszámú

Def: A vektortér dimenziója bármely bázisának elemszáma, dim (V)

Tétel: dim (V) = n ↔ van n db független vektor, de n + 1 már nincs
↔ van n elemű generátorrendszer, de n – 1 elemű már nincs

Pl.: A 2 x 3-as valós mátrixok vektorterének dimenziója 6

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \end{bmatrix} = \mathrm{a1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{a2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{a3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \mathrm{b1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{b2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{b3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pl.: R^n dimenziója n, egy bázis $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$ i → i-edik pozíción van az 1-es, i-edik bázisvektor

Def: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n-es mátrix oszloprangja a lineárisan független oszlopvektorok maximális száma

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sorrangja a lineárisan független sorvektorok maximális száma

Tétel: Az oszloprang nem változik a sor- és oszloptranszformáció során. A sorrang sem

Pl.: $$\begin{bmatrix} '1' & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} '1' & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & '-7' & -7 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sorrang = 2 → az első 2 sor független, az azonos 0 sor nem számít
oszloprang = 2

Tétel:

a) Bármely m x n-es mátrixra:
sorrang = oszloprang
rang ($\underline{\underline{A}}$)
b) Elemi sor- és oszloptranszformációkkal bármely m x n -es $\underline{\underline{A}}$ mátrix olyan alakra hozható, ahol a bal felső sorok k x k-s $\underline{\underline{E}}$, a többi pozíció 0, ilyenkor a rang ($\underline{\underline{A}}$) = k

Biz: Szabályos oszlopok, az 1-esek sorában a többi tag 0-vá tehető oszloptranszformációkkal. Sor- és oszlopcserével a szabályos oszlopok az első k oszlopba, az 1-esek a főátlóba vihetők

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix}$$

Pl.: 2x3-as mátrix, rang = 0 ↔ $\underline{\underline{A}} = \underline{0}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

rang = 1 ↔ $\underline{\underline{A}}$ bármely két sora párhuzamos vagy bármely két oszlopa párhuzamos

$\begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 \\ \alpha c1 & \alpha c2 & \alpha c3 \end{bmatrix}$, |c1| = |c2| = |c3| > 0 vagy $\begin{bmatrix} \alpha c1 & \alpha c2 & \alpha c3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix}$

rang = 2 ↔ van két független sor, de 3 nincs
↔ van két független oszlop, de 3 nincs

rang = 3 → ilyen nincs, mert nem lehet 3 független sora, mert csak 2 van

<u>Lineáris egyenletrendszerek:</u>

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ha $\underline{\underline{A}} = [a_J]_{m \times n}$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ \ldots \\ xn \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} b1 \\ \ldots \\ bm' \end{bmatrix}$, akkor $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$

Pl.: 2x + y = 1
x + 3y = 2
5x + 3y = 8

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Pl.: Legyenek $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopai $\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots ; \underline{a}_n$, azaz $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = [\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots ; \underline{a}_n]$. Akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$ alakja
$x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$

$$\text{Pl.: } x \begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix} + y \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix}$$

A) Mikor van megoldás?

Tétel: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható $\leftrightarrow$ rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ = rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}; \underline{b})$

Biz: létezik megoldás $\leftrightarrow$ $\underline{b}$ eleme dim $(\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots ; \underline{a}_n) \leftrightarrow$ dim $(\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots ; \underline{a}_n) \leftrightarrow$
dim = rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$
dim $(\underline{a}_1; \underline{a}_2; \dots ; \underline{a}_n, \underline{b})$
rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{b})$

Megj.: - rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ < rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{b})$ esetén az egyenletek ellentmondásosak
- rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{b}) = k \equiv$ van k db független egyenlet
- rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ < rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{b})$ miatt egyszerre k sor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ban már összefüggő. Ezen összefüggés szerint lineárisan kombinálva a k db egyenletet minden változó kiesik $\rightarrow$ $\underline{\mathbf{C}} = \underline{0}$ (ez ellentmondás)

B) Mikor egyértelmű a megoldás?

Áll.: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$
$\rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{x} - \underline{x}^*) = \underline{0}$
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x}^* = \underline{b}$

Ezért $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$ -nek ≤ 1 megoldása van $\rightarrow$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{0}$-nak csak $\underline{x} = \underline{0}$ a megoldása

Tétel: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$ egyértelműen megoldható $\leftrightarrow$ rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ = rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}},\underline{b}) = n$
Biz: $x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$ egyértelmű $\leftrightarrow$ $\underline{a}_1; \dots ; \underline{a}_n$ lineárisan függetlenek $\leftrightarrow$ rang $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = n$

Azaz a megoldás egyértelmű $\leftrightarrow$ van n db független egyenlet

C) Hogyan számoljuk ki a megoldásokat?

$[\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mid \underline{b}\,]$- sortranszformációkat végzünk, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ban minél több szabályos oszlop legyen. Ezen oszlopok 1-eseit sorcserével az első k sorba visszük $\rightarrow$ Ilyenkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ban a k-ik sor alatt csupa 0 van

α)$\underline{b}$ oszlopában a k-ik pozíciók alatt van $\neq 0$. Akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$-nek nincs megoldása
β)Ha $\underline{b}$ oszlopában a k-ik pozíció alatt csupa 0 van, akkor van megoldás

A nem szabályos $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopoknak megfelelő x_i-k szabadon választhatók, a szabályos oszlopok változói kifejezhetők az 1-eseknek megfelelő sorból

$$\text{Pl.: } \left[\begin{bmatrix}1&2&0\\0&5&1\\0&0&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\right] \rightarrow \text{nincs megoldás}$$

$$\left[\begin{bmatrix}1&2&0\\0&5&1\\0&0&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}\right] \rightarrow x_2 \text{ paraméter}$$

$x_1 = 3 - 2x_2$

$$x_3 = 4 - 5x_2$$

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

A 2, 4, 6 oszlop szabályos → x_1; x_3; x_5 szabad paraméter

$$x_2 = 1 - 2x_1 - 5x_3 - x_5$$
$$x_4 = -1 - 3x_1 - x_2$$
$$x_6 = 2 + x_1 - 4x_3$$

Magyarázat: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b} \leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{BA}}}\underline{x} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{b}$

$[\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{b}] \to [\underline{\underline{\mathbf{BA}}}|\underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{b}]$ Megj: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ invertálható, akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b} \leftrightarrow \underline{x} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{b}$

Pl.: $3x - y + 4z = 1$

$x + y - z = 3$

$2x + z = 1$

$x + y = -4$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & '1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right] \to \left[\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & '1' \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right] \to \left[\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right] \to$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ \frac{-7}{2} \\ \frac{-25}{4} \end{bmatrix}\right]$$

$$x = \frac{9}{4}$$
$$y = -4 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4}$$
$$z = -\frac{7}{2}$$

Pl.: $x + 2y - z + 4u = 2$

$2x - y + z + u = 1$

$x + 7y - 4z + 11u = a$

$$\begin{bmatrix} '1' & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix} \qquad a = 5 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 6/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z; u paraméter

$$x = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\cdot z - \frac{6}{5}\cdot u$$

$$y = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot z - \frac{7}{5}\cdot u$$

D) Hány szabad paraméter lesz a megoldásban?

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n-es, akkor $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak R^n-en, dim = n – rang ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$)

Köv: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{b}$ megoldható, akkor megoldásai az n -rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$) szabad paraméter lesz

Pl.: $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} \frac{-6}{5} \\ \frac{-7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{5}\cdot z - \frac{6}{5}\cdot u$$

$$y = \frac{3}{5}\cdot z - \frac{7}{5}\cdot u$$

dim = 2 = n – rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$) = 4 – 2 = 2

Def: p: {1;2;...; n} → {1; 2; …; n} permutációi p(1); …; p(n) az 1; … ; n számok egy felsorolása
A p(i) és p(j) inverzióban áll, ha (i – j)(p(i) – p(j)) < 0. A p inverziószáma I(p), az inverzióban álló párok.
A p permutációi páros, ha I(p) páros
páratlan, ha I(p) páratlan

Pl:	3 2 1	I(p) = 3
	3 1 4 2	I(p) = 3
	3 1 2 4	I(p) = 2

Áll: Ha p-ben két elemet felcserélünk, a paritás megváltozik

Def: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ n x n-es mátrix determinánsa

$$|\underline{\underline{\mathbf{A}}}| = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \sum_{p} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)}\cdot a_{2p(2)}\cdot \dots \cdot a_{np(n)}$$ p permutációi 1; 2; …; n -nek

Pl.: det[a] = a az egy elemű determináns egy szám

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$ mert $ad = a_{11}a_{22}$ p = (1;2); I(p) = 0

$bc = a_{12}a_{21}$ p = (2;1); I(p) = 1

$$\det \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$a_2b_3c_1 = a_{12}a_{23}a_{31}$ p = (2;3;1); I(p) = 2

Tétel: A determináns tulajdonságai

a) $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$

b) Sortranszformációknál:

b1) egy sort c-vel szorozva a determináns c-szeresére változik

b2) két sort felcserélve a determináns (-1)-szeresére változik

b3) egyik sorhoz egy másik sor konstans szorosát adva a determináns nem változik

c) Oszloptranszformációknál: ugyanígy

d) Ha a mátrixnak van 0 sora, vagy 0 oszlopa, a det = 0

e) Ha a mátrixnak van két egyforma sora, vagy oszlopa, a det = 0

f) Ha a mátrix egyik oszlopa két vektor összege, akkor $\det[\underline{a}_1; \dots ; \underline{a}_{j-1}; \underline{b} + \underline{c}; \underline{a}_{j+1}; \dots ; \underline{a}_n] =$
$= \det[\underline{a}_1; \dots ; \underline{a}_{j-1}; \underline{b}; \underline{a}_{j+1}; \dots ; \underline{a}_n] + \det[\underline{a}_1; \dots ; \underline{a}_{j-1}; \underline{c}; \underline{a}_{j+1}; \dots ; \underline{a}_n]$

g) Ha a főátló alatt, vagy a főátló fölött csupa 0 van, akkor $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

h) $\det(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 1$

i) $\det(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\det(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$

j) $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

Biz: b2) p permutációban i és j helyet cserél

j) $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 1$

Pl.: $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-3)*2*5*1*4*(-1)^{I(p)} = -120$$

p = (5 4 3 2 1); I(p) = 10

Pl.: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & -9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3*1*1*(-55) = 165$$

Pl.: $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = -26*21 = -546$$

Def: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ n x n -es mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-ik oszlopot, a keletkező (n – 1)x(n – 1)-es mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$ -vel szorozzuk, A_{ij} az <u>i, j-hoz tartozó előjeles determináns</u> $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ban

Tétel: a) Determináns kifejtése i-ik sora szerint

$\det(\underline{\underline{A}}) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$

b) Determináns kifejtése a j-ik oszlop szerint

$\det(\underline{\underline{A}}) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$

Pl.: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ kifejtése

a) 1. sor szerint: $\det = 0 \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30*5 + 15 = 165$

b) 2. oszlop szerint: $\det = 1 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-6) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 15 + 60 + 90 = 165$

Tétel: Ferde kifejtési tétel

a) Ha egy sor elemeit egy másik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk; az összeg 0

$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \ldots + a_{rn}A_{in} = 0 \qquad \text{ha } r \neq 1$

b) oszlopokra hasonlóan

$a_{1r}A_{1j} + a_{2r}A_{2j} + \ldots + a_{nr}A_{nj} = 0 \qquad \text{ha } r \neq j$

Def: Legyen $\underline{\underline{A}}$ n x n-es

$\underline{\underline{\hat{A}}} = [A_{j\,i}]_{n \times n}$ (nem $A_{i\,j}$!!!)

Tétel: a) Kifejtés és ferde kifejtés sorszerint:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\hat{A}}} = \det(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{E}}$

b) Kifejtés és ferde kifejtés oszlop szerint:

$\underline{\underline{\hat{A}}}\underline{\underline{A}} = \det(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{E}}$

Tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$ négyzetes, akkor $\underline{\underline{A}}$ invertálható $\leftrightarrow$ $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$ és $\underline{\underline{A}}^{-1} = (1/\det(\underline{\underline{A}}))*\underline{\underline{\hat{A}}}$

Biz: Ha $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, akkor $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\hat{A}}} = \det(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{E}}$ miatt $\underline{\underline{A}}((1/\det(\underline{\underline{A}}))*\underline{\underline{\hat{A}}}) = \underline{\underline{E}}$

Ha $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$, akkor $\underline{\underline{A}}$ nem lehet invertálható, mert $\det(\underline{\underline{A}})\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = 1$

Tétel: Cramer-szabály: lineáris egyenletrendszer megoldása determinánsokkal

$$x_1 = \frac{det(b; a_2; \ldots; a_n)}{det{=}(A)}$$

$$x_2 = \frac{det(a_1; b; \ldots; a_n)}{det(A)}$$

$$x_n = \frac{det(a_1; \ldots; b)}{det(A)}$$

Pl.: $2x + \ \ y = 1$
$3x + 4y = 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}$$

Pl.: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\hat{\mathbf{A}}}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = (1/\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}))\underline{\underline{\hat{\mathbf{A}}}} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Pl.: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ esetén $(\underline{\underline{\hat{\mathbf{A}}}})_{1;2} = A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ n x n -es, akkor $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \neq 0$ <=> $\text{rang}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = n$

Biz: rang = n <=> az összes oszlop független <=> lehet $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$-t létrehozni sortranszformációkkal <=> $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ invertálható <=> $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \neq 0$

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n-es mátrix, akkor $\text{rang}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = k$ <=> van k x k-as nemnulla aldetermináns, de minden (k+1)x(k+1)-es aldetermináns 0

[aldetermináns: tetszőleges k sor, és tetszőleges k oszlop találkozási pontjaiban adódó k x k-as mátrix determináns]

Pl.: $\det(c\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \neq c \cdot \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$, helyette $\det(c\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = c^n \cdot \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$

$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{B}}}) \neq \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) + \det(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$

$\det(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\det(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$ ✓

Lineáris operátorok:

Def: V_1 és V_2 valós vagy komplex vektortér. Egy $V_1 \rightarrow V_2$ leképezés lineáris operátor, ha $\underline{v}, \underline{w}$ eleme V_1 esetén

$A(\underline{v} + \underline{w}) = A\underline{v} + A\underline{w}$
$A(c\underline{v}) = cA\underline{v}$

Áll: Lineáris operátornál
$A\underline{0}_{v1} = \underline{0}_{v2}$
$A(-\underline{v}) = -A\underline{v}$
$A(c\underline{v}_1 + \ldots + c\underline{v}_n) = cA\underline{v}_1 + \ldots + cA\underline{v}_n$

Def: Az A $V_1 \to V_2$ lineáris operátor

magtere: Ker A = {$\underline{v}$ eleme V_1: A$\underline{v}$ = $\underline{0}$}

képtere: Im A = {A$\underline{v}$: v eleme V_1}

Áll: Ker A altere V_1-nek, Im A altere V_2-nek

Biz: Ker A esetén: A$\underline{v}$ = 0 = A$\underline{w}$ esetén A(c$\underline{v}$) = cA$\underline{v}$ = c$\underline{0}$ = $\underline{0}$, tehát c$\underline{v}$ eleme Ker A

A($\underline{v}$ + $\underline{w}$) = A$\underline{v}$ + A$\underline{w}$ = 0 + 0 = $\underline{0}$, tehát $\underline{v}$ + $\underline{w}$ eleme Ker A

Im A hasonló

Pl.: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineáris operátor

a) $\underline{0}$ körüli α szögű forgatás

b) $\underline{0}$ középpontú hasonlóság (nyújtás)

c) tükrözés egy $\underline{0}$-n átmenő egyenesre

d) merőleges vetítés egy $\underline{0}$-n átmenő egyenesre

Pl.: d/dx: $C^1(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$ lineáris operátor

$(cf)' = c \cdot f'$; $(f+g)' = f' + g'$

Ker A (d/dx) = {f: d/dx f ≡ 0} = konstans fügvények

Im A (d/dx) = {f': f eleme $C^1(\mathbf{R})$} = $C(\mathbf{R})$

$$f \text{ folytonos} \Rightarrow d/dx \int_0^x f = f(x)$$

Pl.: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n -es valós mátrix definiál egy lineáris leképezést

A: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(c\underline{x}) = c\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x}$

A$\underline{x}$ = $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x}$ — $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{y}$

Ker A = {$\underline{x}$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \underline{0}$} — dim = n – rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$)

Im A = {$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x}$: $\underline{x}$ eleme $\mathbf{R}^n$} — dim = rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$)

↑

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopai által kifeszített altér

Tétel: Dimenziótétel:

Ha A $V_1 \to V_2$ lineáris, dim V_1 véges, akkor

dim V_1 = dim Ker A + dim Im A

Pl.: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n -es mátrix által definiált lineáris leképezés esetén:

dim V_1 = n

dim Ker A = n – rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$)

dim Im A = rang($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$)

Műveletek lineáris operátorok között:

Def: A,B: $V_1 \to V_2$ esetén

cA: $V_1 \to V_2$, (cA)$\underline{v}$ = c(A$\underline{v}$)

A+B: $V_1 \to V_2$, (A + B)$\underline{v}$ = A$\underline{v}$ + B$\underline{v}$

Tétel: Az összes $V_1 \to V_2$ lineáris operátor vektortér. Tehát például

A+B = B+A; A+(B+C) = (A+B)+C … stb.

Def: A: $V_2 \to V_3$; B: $V_1 \to V_2$ lineáris leképzés, akkor

AB: $V_1 \to V_3$

$(AB)\underline{v} = A(B\underline{v})$

Pl.: $BA\underline{v} = B(A\underline{v})$

$A: V_1 \rightarrow V_2$

$B: V_2 \rightarrow V_1$

$AB: V_2 \rightarrow V_2$

$BA: V_1 \rightarrow V_1$

Tétel: $A(BC) = (AB)C$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Def: A $V_1 \rightarrow V_2$ <u>injektív</u> $\underline{v} \neq \underline{w}$ esetén $A\underline{v} \neq A\underline{w}$

Áll: Ha A leképezés lineáris, akkor injektív <=> Ker A = $\{\underline{0}\}$

Biz: $A\underline{v} = A\underline{w}$ <=> $A(\underline{v} - \underline{w}) = 0$ <=> $\underline{v} - \underline{w}$ elem Ker A

Def: A: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor invertálható, ha injektív és szürjektív, azaz Ker A = $\{\underline{0}\}$ és Im A = V_2

Ilyenkor minden V_2-beli $\underline{v}_2$ -höz van pontosan egy V_1-beli $\underline{v}_1$, hogy $A\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, és akkor

A^{-1}: $V_2 \rightarrow V_1$ lineáris operátor

A^{-1}: $\underline{v}_2 = \underline{v}_1$, amire $A\underline{v}_1 = \underline{v}_2$

Áll: Ha A: $V_2 \rightarrow V_3$ és B: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés invertálható, akkor AB: $V_1 \rightarrow V_3$ is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Tétel: Legyen $V_1;V_2$ valós vagy komplex

legyen $\{\underline{b}_1; \dots ; \underline{b}_n\}$ bázis V_1-ben

$\{\underline{f}_1; \dots ; \underline{f}_n\}$ tetszőleges V_2-ben

Akkor van pontosan egy A: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, amelyre $A\underline{b}_i = \underline{f}_i$; i= 1; …; n

Biz: minden V_1-beli $\underline{v}$ egyértelműen felírható $\underline{v} = \alpha_1\underline{b}_1 + \dots + \alpha_n\underline{b}_n$ alakban =>

$A\underline{v} = \alpha_1 A\underline{b}_1 + \dots + \alpha_n A\underline{b}_n = \alpha_1\underline{f}_1 + \dots \alpha_n\underline{f}_n$

Az $\alpha_1\underline{b}_1 + \dots + \alpha_n\underline{b}_n \rightarrow \alpha_1\underline{f}_1 + \dots \alpha_n\underline{f}_n$ leképezés lineáris

Def: Legyen A: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor

$E=\{\underline{e}_1; \dots; \underline{e}_n\}$ bázis V_1-ben

$F=\{\underline{f}_1; \dots; \underline{f}_n\}$ bázis V_2-ben

$A\underline{e}_j$-t felírjuk az F bázisban:

$A\underline{e}_j = a_{1j}\underline{f}_1 + a_{2j}\underline{f}_2 + \dots + a_{mj}\underline{f}_m$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = [a_{ij}]_{m \times n}$-ben a j-ik oszlop az $A\underline{e}_j$ együtthatói az F bázisban

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ az <u>A lineáris operátor mátrixa az E;F bázispárban</u>; jele: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E;F}$

Formálisan: $[\underline{f}_1; \dots; \underline{f}_m]\, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E;F} = [A\underline{e}_1; \dots; A\underline{e}_n]$

Def: E bázis V_1-ben, $\underline{v}$ eleme V_1, $\underline{v} = \alpha_1\underline{e}_1 + \dots + \alpha_n\underline{e}_n$

Akkor $\underline{v}_E = \begin{bmatrix} \alpha 1 \\ \dots \\ \alpha n \end{bmatrix}$

Tétel: Ha A: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris, E bázis V_1-ben, F V_2-ben, akkor $\underline{v}$ eleme V esetén

$$\underline{A\underline{v}}_F = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E;F} \cdot \underline{v}_E$$

Biz: $[\underline{f}_1; \dots; \underline{f}_m]\underline{\underline{A}}_{E;F}\cdot\underline{v}_E = A[\underline{e}_1; \dots; \underline{e}_n]\underline{v}_E = A\underline{v} = [\underline{f}_1; \dots; \underline{f}_n]\,\underline{A\underline{v}}_F$

<u>Mi lesz AB mátrixa?:</u>

Tétel: A: $V_2 \rightarrow V_3$
B: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátorok
V_1-ben bázis E, V_2-ben bázis F, V_3-ban G

$$\text{Akkor } \underline{\underline{\mathbf{AB}}}_{E;G} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{F;G} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{E;F}$$

Biz: $\underline{AB\underline{v}}_G = \underline{A(B\underline{v})}_G = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{F;G} \cdot \underline{B\underline{v}}_F = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_G \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_F \cdot \underline{v}_E = \underline{\underline{\mathbf{AB}}}_{E;G} \cdot \underline{v}_E$
$\rightarrow \underline{\underline{\mathbf{AB}}}_{E;G} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{F;G} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{E;F}$

<u>Mi lesz A^{-1} mátrixa?</u>

Tétel: Ha A: $V_1 \rightarrow V_2$ invertálható, akkor

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}{}_{F;E} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E;F})^{-1}$$

Pl.: A: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\underline{0}$ körüli pozitív forgásirányba való α szögű elforgatás

$F = \{\underline{i}; \underline{j}\}$ $\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{j} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \text{¿} \end{matrix}$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E;E} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$ ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$), azaz

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

<u>Hogyan változik meg egy vektor felírása báziscserénél?</u>

a) Egyetlen bázisvektort cserélünk:

$\underline{b}_E = \begin{bmatrix} b1 \\ \dots \\ bn \end{bmatrix}$; $\underline{v}_E = \begin{bmatrix} v1 \\ \dots \\ vn \end{bmatrix}$

A $\underline{b}$ bevihető a bázisba olyan $\underline{e}_i$ helyre , melyre $\underline{b}_i \neq 0$

Speciel, ha $\underline{b}_n \neq 0$, akkor $\underline{b} = b_1\underline{e}_1 + \dots + b_n\underline{e}_n \rightarrow \underline{e}_1 = \frac{1}{bn} \cdot \underline{b} - \frac{b2}{b1} \cdot \underline{e}_2 - \dots - \frac{bn}{b1}\ \underline{e}_n$

$\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + v_2\underline{e}_2 + \dots + v_n\underline{e}_n = \frac{v1}{b1} \cdot \underline{b} + (v_2 - v_1 \cdot \frac{b2}{b1}) \cdot \underline{e}_2 + \dots + (v_n - v_1\ \frac{bn}{b1}) \cdot \underline{e}_n$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \dots \\ bn \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ \dots \\ vn \end{bmatrix} \\ & \underline{v}_E \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{v1}{b1} \\ v2 - b2 \cdot \dfrac{v1}{b1} \\ \dots \\ vn - bn \cdot \dfrac{v1}{b1} \end{bmatrix}$$

$\underline{v}$ koordinátái a $\{\underline{b}; \underline{e}_2; \dots; \underline{e}_n\}$ bázisban
Sorcsere nélkül!

Pl.: $\{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{e}_3; \underline{e}_4\}$

$\underline{b} = \underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 + 4\underline{e}_4$
$\underline{v} = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 + \underline{e}_4$

$\underline{b}$ bevonható-e $\underline{e}_3$ helyére?

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_E \quad \underline{v}_E \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_{E'} \quad \underline{v}_{E'} \end{array}$$

azaz $\underline{v} = -\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2 + 3\underline{b} - 11\underline{e}_4$

b) több bázisvektor (akár egész bázis) cseréje

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . \end{bmatrix} \\ \underline{b}_{1E} \quad \underline{b}_{kE} \; \underline{v}_E \end{array} \text{ sortranszformációk} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \end{bmatrix} \\ \underline{v}_{E'} \end{array}$$

Pl.: $\{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{e}_3\}$ bázis

$\underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$
$\underline{b}_2 = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_3$
$\underline{b}_3 = \underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 - \underline{e}_3$
$\underline{v} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ '1' & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_{1E} \; \underline{b}_{2E} \; \underline{b}_{3E} \; \underline{v}_E \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & '1' & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \; \underline{b}_3 \; \underline{v} \\ \{\underline{e}_1; \underline{b}_1; \underline{e}_3\}\text{-ban} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & '24' & 5 \end{bmatrix} \\ \underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \; \underline{b}_3 \; \underline{v} \\ \{\underline{b}_2; \underline{b}_1; \underline{e}_3\}\text{ -ban} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dfrac{11}{24} \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{5}{24} \end{bmatrix}$$

tehát $\underline{b}_1$; $\underline{b}_2$; $\underline{b}_3$ is bázist alkot, mert sikerült őket bevonni a bázisba

$$\underline{v} = \frac{11}{24} \cdot \underline{b}_2 + \frac{1}{6} \cdot \underline{b}_1 + \frac{5}{24} \cdot \underline{b}_3$$

$[\underline{b}_{1E}; \underline{b}_{2E}; \underline{b}_{3E}; \underline{v}_E]$ sortr$\rightarrow$ $[\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \underline{v}_B]$

$[\underline{b}_{1E}; \underline{b}_{2E}; \underline{b}_{3E}; \underline{\underline{\mathbf{E}}}] \rightarrow [\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E^{-1}]$

$\Rightarrow \underline{v}_B = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E^{-1} \cdot \underline{v}_E$

Tétel: Ha $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_E^{-} = [\underline{b}_{1E}; \ldots ; \underline{b}_{nE}]$, akkor

a) $\underline{v}_E = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E \cdot \underline{v}_B$

b) $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_b = (\underline{\underline{\mathbf{B}}}_E)^{-1}$

b) biz: a) miatt $\underline{v}_B = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E^{-1}\, \underline{v}_B$

$\underline{v}_B = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_b \underline{v}_E$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_B$

Tétel: Báziscsere az operátor mátrixában

A: $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris operátor

V_1 -ben bázis E és E'

V_2 -ben bázis F és F'

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E';F'} = (\underline{\underline{\mathbf{F'}}}_F)^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E'}}}_E$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E';F'} = [\underline{Ae'}_{1F'}; \ldots; \underline{Ae'}_{nF'}]$

$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{F'} = [\underline{f}_{1F'}, \ldots, \underline{f}_{nF'}]$

Spec: A: V $\rightarrow$ V lineáris operátor, V-ben bázis E és E'. Akkor

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E',E'} = (\underline{\underline{\mathbf{E'}}}_E)^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{E,E} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E'}}}_E$$

rövidebb jelölés: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_E$

Def: P_n {legfeljebb n-edfokú valós együtthatójú polinomok}

Pl.: $P_2 \rightarrow P_2$ lineáris operátor mátrixa az $\{\underset{\underline{b}_1}{x^2+x+1};\ \underset{\underline{b}_2}{2x+1};\ \underset{\underline{b}_3}{-x^2+1}\}$ bázisban

E={1; x; x^2}-ben $\quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \underline{b}_3 & T\underline{b}_1 & T\underline{b}_2 & T\underline{b}_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ '1' & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & '1' & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$ $\underline{b}_3$ $T\underline{b}_1$ $T\underline{b}_2$ $T\underline{b}_3$ E-ben; $\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$ $\underline{b}_3$ $T\underline{b}_1$ $T\underline{b}_2$ $T\underline{b}_3$ $\{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{b}\}$-ben

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & '-3' & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$ $\underline{b}_3$ $T\underline{b}_1$ $T\underline{b}_2$ $T\underline{b}_3$ $\{\underline{b}_2; \underline{e}_2; \underline{b}_1\}$-ben; $\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$ $\underline{b}_3$ $T\underline{b}_1$ $T\underline{b}_2$ $T\underline{b}_3$ $\{\underline{b}_2; \underline{b}_3; \underline{b}_1\}$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T_B = (\underline{\underline{\mathbf{B}}}_E)^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_E \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T\underline{b}_{1E}, T\underline{b}_{2E}, T\underline{b}_{3E}]$$

Def: A: $V \to V$ lineáris operátor. Ha van egy olyan $\underline{v} \neq 0$ úgy, hogy $A\underline{v}$ párhuzamos $\underline{v}$-vel, tehát

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad \text{egy } \underline{v} \neq 0\text{-ra}$$

ekkor λ az A lineáris operátor <u>sajátértéke</u>, és $\underline{v}$ a λ-hoz tartozó <u>sajátvektor</u>

Megj: Ha $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ <u>minden λ-ra</u>. Viszont $\lambda = \underline{0}$ lehet sajátértéke: $A\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$

A $\lambda = 0$-hoz tartozó sajátvektorok összessége Ker $A\backslash\{\underline{0}\}$

Áll: A λ-hoz tartozó sajátvektorok összessége Ker $(A - \lambda E)\backslash\{\underline{0}\}$

Biz: $A\underline{v} - \lambda\underline{v} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\underline{v} = \underline{0}$

Pl.: E: $V \to V$ egységoperátor sajátértéke 1, sajátvektor minden $\underline{v} \neq \underline{0}$

0: $V \to V$ null-operátor sajátértéke 0 sajátvektor minden $\underline{v} \neq \underline{0}$

T: $\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^2$ az origó körüli forgatás α szöggel, $0 < \alpha < \pi$, nincs sajátérték

Def: A λ sajátértékhez tartozó <u>sajátaltér</u>: Ker $(A - \lambda E)$, az összes λ-hoz tartozó sajátvektorból és a $\underline{0}$-ból áll

<u>Miért hasznosak a sajátvektorok?</u>

Tétel: T: $V \to V$ lineáris operátor B bázisbeli mátrixa <u>diagonális</u> <=> B a T sajátvektoraiból áll, ilyenkor a diagonálisban a sajátértékek vannak

Tétel: A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek

$T\underline{b}_i = \lambda_i\underline{b}_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ esetén $\underline{b}_1; \ldots ; \underline{b}_n$ lineárisan független

Biz: Indukció

a) $n = 1$ $\underline{b}_1$ lineárisan független, mert $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$

b) $n - 1 \to n$

I. $\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{b}_n = \underline{0}$

II. $\underline{0} = T(\alpha_1\underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{b}_n) = \alpha_1 T\underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n T\underline{b}_n$

az I egyenletet λ_n-nel beszorozzuk, majd a két egyenletet kivonjuk egymásból

I – II: $\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)\underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n-1})\underline{b}_{n-1} = 0$

=> $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$

Tétel: Legyen T: $V \to V$ lineáris, V-ben bázis B.

Akkor λ sajátértéke T-nek <=> $\det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0$
λ-ban n-ed fokú polinom

Tétel: λ sajátértéke A-nak <=> $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0$

A sajátvektorok

Tétel: A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok $A\underline{s} = \lambda\underline{s}$ <=> $(A - \lambda E) = 0$ <=> $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})\underline{s}_B = \underline{0}_p$

Pl.: $T: P_3 \to P_3$, $T_p = (x+1)_p$

$B = \{1; x; x^2; x^3\}$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ T1\ Tx\ Tx^2\ Tx^3\end{array}$$

$T1 = 1$; $Tx = x+1$; $Tx^2 = 2x^2+2x$; $Tx^3 = 3x^3+3x^2$

$$0 = \det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

sajátérték: 0, 1, 2 ,3

b) sajátvektorok

$\lambda_1 = 0$, $(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})\underline{s}_{1B} = \underline{0}$, azaz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y=0; y+2z=0; 2z+3u=0; 3u=0→

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y \\ 2z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{s}_{1B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{s}_1 = 1$

$\lambda_2 = 1$; $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ -x+y =0; 0=0; z=0; u=0

$\underline{s}_{2B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{s}_2 = 1+x$

$\lambda_3=2$; $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ -2x+y=0; -y+2z=0; 3u=0; u=0

$\underline{s}_{3B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{s}_3 = 1 + 2x + x^2$

$\lambda_4 = 3$; $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ -3x+y=0; -2y+2z=0; -z+3u=0; 0=0;

$\underline{s}_{4B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\underline{s}_4 = (x+1)^3$

Tétel: Ha T: V → V lineáris, B egy n elemű bázis V-n, akkor $p(\lambda) = \det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})$ λ-ban n-ed fokú polinom, amely független B-től

Biz: Ha áttérünk C bázisra, akkor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_C - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_B)^{-1}\cdot(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})\cdot\underline{\underline{\mathbf{C}}}_B \Rightarrow \det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_C - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) =$
$= \underbrace{\det((\underline{\underline{\mathbf{C}}}_B)^{-1})}_{\frac{1}{det(CB)}}\cdot\det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})\cdot\det(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_B) \Rightarrow \det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_C - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})$

p(λ) a T operátor karakterisztikus polinomja

Def: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrixok <u>hasonlók</u>, ha létezik olyan $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ n x n-es invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{C}}}$

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek, sőt karakterisztikus polinomjaik is

Biz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_E$, ahol $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ standard bázis

Ha $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = [\underline{c}_1; \dots ; \underline{c}_n]$, akkor $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ oszlopai bázist alkotnak $\mathbf{R}^n$-ben és $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E$. Ezért $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_E)^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_E\cdot\underline{\underline{\mathbf{C}}}_E$, ezért $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_C \Rightarrow \det(\underline{\underline{\mathbf{B}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}})$

Hasonló mátrixok ≡ ugyanazon operátor különböző bázisokban vett mátrixai

Kapcsolat a determináns és a sajátértékek között

Tétel: $\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$, ahol a sajátértéket annyiszor kell venni, ahányszoros gyöke ő a karakterisztikus polinomnak

Pl.: $2\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ sajátértéke csak a λ=2, de $\det(2\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 2^n$, $\det(2\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = (2 - \lambda)^n$

Köv: Hasonló mátrixok determinánsai megegyezik

Pl.: $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ sajátértékei: 0, -3, -3 => det($\underline{\underline{\mathbf{T}}}$) = 0

Def: Az n x n-es $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix <u>nyoma</u> $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, „ a főátlóban szereplő elemek összege”

Pl.: $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}) = -6$

Áll.: Ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ m x n-es és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ n x m-es, akkor $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{BA}}})$

[Biz: $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{BA}}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}$]

Tétel: Ha T:V → V lineráris, akkor $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B)$ nyoma független a B bázis választásától tr(T), <u>operátor nyoma</u>

Biz: $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_C) = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_B \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}_B) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}_B \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}_B^{-1}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_B)$

Köv: Hasonló mátrixok nyoma is megegyezik

Tétel: $\mathrm{tr}(T) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ (sajátértékek összege), ahol minden λ_i annyiszor szerepel ahányszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak

<u>A determináns mint előjeles térfogat</u>:

Pl.: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ a $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ által kifeszített paralelogramma előjeles területe, akkor pozitív, ha $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ -ből $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ -be pozitív forgásirányon jutunk el

Pl.: $\begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$ az $\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$ által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, akkor pozitív, ha <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> jobbsodrású rendszer

Tétel: a) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ definiál egy A:$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineáris operátort. Bármely síkidom képének területe az eredeti terület $|\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}|$-szerese és $\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}>0$ esetén a körüljárás megmarad

b) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix}$ esetén az A:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ operátornál minden térfogat $|\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}|$-szeresére változik, és $\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}>0$ esetén a jobbsodrású rendszert alkotó vektorok által képezett rendszer a leképezés után is jobbsodrású marad

c) Többdimenziós determinánsra hasonló

Köv: $\det(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \det(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$

$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) = \dfrac{1}{(\det A)}$

Euklideszi terek:

Skaláris szorzás általánosítása

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{bmatrix}$ $\underline{v} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$ => $<\underline{u};\underline{v}> = \underline{u}\cdot\underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Tulajdonságai:

1) $\underline{v}\cdot\underline{u} = \underline{u}\cdot\underline{v}$
2) $(\underline{u} + \underline{v})\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot\underline{w}$
3) $(c\cdot\underline{u})\underline{v} = c\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}$
4) $\underline{u}\cdot\underline{u} \geq 0$, és csak akkor =0, ha $\underline{u} = \underline{0}$

Áll: a) $\underline{u}\cdot\underline{0} = \underline{0}\cdot\underline{u} = 0$
b) $(\alpha_1\underline{u}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{u}_n)\cdot\underline{v} = \alpha_1\cdot\underline{u}_1\cdot\underline{v} + \ldots + \alpha_n\cdot\underline{u}_n\cdot\underline{v}$

Def: Egy valós V vektortér valós euklideszi tér, ha van benne egy $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ skaláris szorzás (1)-4) tulajdonság)

Def: Egy komplex V vektortér komplex euklideszi vektortér, ha van benne egy $V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ (a 2) és a 4) teljesül, 1') $\underline{v}\cdot\underline{u} =$ (konjugált) $\underline{\underline{v\cdot u}}$

Áll: Skaláris szorzásnál:

a) $\underline{u}\cdot(c\cdot\underline{v}) = \underline{\underline{c}}(\underline{u}\cdot\underline{v})$ [$\underline{u}(c\underline{v}) = c\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}$ valós euklideszi térben]
b) $\underline{0}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{0} = \underline{0}$
c) $(\alpha_1\cdot\underline{u}_1 + \ldots + \alpha_n\cdot\underline{u}_n)\cdot\underline{v} = \alpha_1\cdot(\underline{u}_1\cdot\underline{v}) + \ldots + \alpha_n\cdot(\underline{u}_n\cdot\underline{v})$
$\underline{u}(\alpha_1\cdot\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\cdot\underline{v}_n) = \underline{\underline{\alpha}}_1\cdot(\underline{u}_1\cdot\underline{v}) + \ldots + \underline{\underline{\alpha}}_n(\underline{u}_n\cdot\underline{v})$

Pl.: $\mathbf{R}^n$-ben $\underline{x}\cdot\underline{y} = x_1\cdot y_1 + \ldots + \underline{x}_n\cdot\underline{y}_n$
$\mathbf{C}^n$-ben $\underline{x}\cdot\underline{\underline{y}} = x_1\cdot\underline{\underline{y}}_1 + \ldots + x_n\cdot\underline{\underline{y}}_n$ $(\underline{x}\cdot\underline{\underline{x}} = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$

Pl.: C[a;b]-n $<f;g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ (valós függvények)

$<f;g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ (komplex függvények)

$(=> <f;f> = \int_a^b |f|^2)$

Vektor hossza

Def: $\|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$ (a vektor euklideszi normája)

Pl.: $\mathbf{R}^n$-ben $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_2^1 + \ldots x_n^2}$

b

C[a;b]-n $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$

Tétel: Cauchy-Bunyakovszky-Schwarz (CBS) egyenlőtlenség
euklideszi térben
$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \le \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|$ és egyenlőség <=> ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ párhuzamos

Biz: $0 \le (\underline{u} - c\cdot\underline{v})\cdot(\underline{u} - c\cdot\underline{v}) = \underbrace{\underline{u}\cdot\underline{u}}_{\|\underline{u}\|^2} - c\cdot\underline{v}\cdot\underline{u} - \underbrace{\underline{u}\cdot(c\cdot\underline{v})}_{\bar{c}\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})} + \underbrace{(c\cdot\underline{v})\cdot(c\cdot\underline{v})}_{|c|^2\cdot\|\underline{v}\|^2}$

Legyen $c = \dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\underline{v}\cdot\underline{v}}$, akkor $0 \le \|\underline{u}\|^2 - \dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\cdot\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{v}} - \dfrac{\overline{\underline{u}\cdot\underline{v}}}{|\underline{v}|^2}\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v}) + \dfrac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2}{\|\underline{v}\|^4}\cdot\|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 - \dfrac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2}{\|\underline{v}\|^2}$
rendezve
$|\underline{u} \cdot \underline{v}|^2 \le \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2$

egyenlőség <=> $\underline{u} - c\cdot\underline{v} = \underline{0}$ => $\underline{u}$ és $\underline{v}$ párhuzamos

Pl.: $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$, mert $1 + x_1 + \ldots + x_n \le \sqrt{n}\cdot\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

Áll.: A norma tulajdonságai:
a) $\|\underline{u}\| \ge 0$ és $= 0$ <=> $\underline{u} = \underline{0}$
b) $\|c\underline{u}\| = |c|\cdot\|\underline{u}\|$
c) $\|\underline{u} + \underline{v}\| \le \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

Pl.: $\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \ldots + (x_n+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$

Def: $\underline{u}$ és $\underline{v}$ merőleges, ha $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$
$\underline{u}\cdot\underline{v} = \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|\cdot\cos\alpha$

Def: Valós euklideszi térben az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok hajlásszöge $0 \le \alpha \le \pi$, ha $\cos\alpha = \dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}$

$-1 \le \dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|} \le 1$ a CBS miatt

Pl.: C[0; π]-ben $\langle f;g\rangle = \int_0^\pi fg$

α és sin α szöge

$$\cos\alpha = \frac{\langle x\,;\sin(x)\rangle}{\sqrt{\langle x\,;x\rangle}\cdot\sqrt{\langle\sin(x)\,;\sin(x)\rangle}} = \frac{\int_0^\pi x\cdot\sin(x)\,dx}{\sqrt{\int_0^\pi |x|^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_0^\pi \underbrace{\sin^2(x)\,dx}_{\frac{1-\cos(2x)}{2}}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\cdot\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

$\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\, dx = [-x\cdot\cos x]^{\pi}_0 + \int_0^{\pi}\cos x\, dx = -\pi\cdot\cos\pi = \pi$

Pl.: Pithagorasz-tétel

Ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ merőleges, akkor $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

Biz: Ha $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$, akkor $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle(\underline{u}+\underline{v}); (\underline{u}+\underline{v})\rangle = \underbrace{\langle\underline{u};\underline{u}\rangle}_{\|\underline{u}\|^2} + \underbrace{\langle\underline{u};\underline{v}\rangle}_{0} + \underbrace{\langle\underline{u};\underline{v}\rangle}_{0} + \underbrace{\langle\underline{v};\underline{v}\rangle}_{\|\underline{v}\|^2}$

Def: $\{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \dots; \underline{e}_n\}$ bázis <u>ortogonális bázis</u>, ha $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = 0$ $(i \neq j)$

<u>ortonormált bázis</u>, ha ortogonális bázis és $\|\underline{e}_i\|^2 = 1$ minden i-re

Tétel: Ha $\{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \dots; \underline{e}_n\}$ ortogonális bázis, akkor

$$\underline{v} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{e}_1}{\|\underline{e}_1\|^2}\cdot\underline{e}_1 + \dots + \frac{\underline{v}\cdot\underline{e}_n}{\|\underline{e}_n\|^2}\cdot\underline{e}_n$$

Biz: $\underline{v} = \alpha_1\cdot\underline{e}_1 + \dots + \alpha_n\cdot\underline{e}_n$ $\quad /\cdot\underline{e}_1$ (skaláris szorzás)

$\underline{v}\cdot\underline{e}_1 = \alpha_1\cdot\underbrace{\underline{e}_1\cdot\underline{e}_1}_{\|\underline{e}_1\|^2} + \alpha_2\cdot\underbrace{\underline{e}_2\cdot\underline{e}_1}_{0} + \dots + \alpha_n\cdot\underbrace{\underline{e}_n\cdot\underline{e}_1}_{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{\underline{v}\cdot\underline{e}_1}{\|\underline{e}_1\|^2}$

Spec: Ortonormált bázisban

$$\underline{v} = (\underline{v}\cdot\underline{e}_1)\cdot\underline{e}_1 + \dots + (\underline{v}\cdot\underline{e}_n)\cdot\underline{e}_n$$

Áll: Bármely $\underline{v}$ felírható egy $\underline{b}$-re párhuzamos és egy $\underline{b}$-re merőleges vektor összegeként

$$\underline{v} = \underbrace{\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}}_{\|\underline{b}} + \underbrace{\left(\underline{v} - \frac{\underline{v}\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}\right)}_{\perp\underline{b}}$$

Tétel: Legyen S altér a V euklideszi térben. Akkor bármely V-beli $\underline{v}$ felbontható egy S-beli és S-re merőleges vektor összegére. Ha S-ben $\{\underline{e}_1; \dots; \underline{e}_n\}$ ortogonális bázis, akkor

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\underline{v}\cdot\underline{e}_k}{\|\underline{e}_k\|^2}\cdot\underline{e}_k + \left(\underline{v} - \frac{\underline{v}\cdot\underline{e}_k}{\|\underline{e}_k\|^2}\cdot\underline{e}_k\right)$$

Megj.: $\sum \dfrac{\underline{v}\cdot\underline{e}_k}{\|\underline{e}_k\|^2}\cdot\underline{e}_k$ a $\underline{v}$ vektor <u>merőleges vetülete az S altérre</u>, azaz a $\underline{v}$ vektor <u>S altérbe eső komponense</u>

Tétel: Projekció tétel:

Ha $\underline{v}$ nem eleme az S altérnek, akkor S-nek a $\underline{v}$-hez legközelebb eső pontja éppen a $\underline{v}$-nek az S-re vett merőleges vetülete. Azaz $\|\underline{v} - \underline{s}\|$ minimális akkor, ha $\underline{s} = \sum [(\underline{v}\cdot\underline{e}_i)/\|\underline{e}_i\|^2]\cdot\underline{e}_i$

Pl.: $V = C[-1;1]$ $\quad \langle f;g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g$

e^x merőleges vetülete P_1-re

$\{1; x\}$ bázis P_1-ben

$<1; x> = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \cdot dx = 0 \Rightarrow \{1; x\}$ ortogonális báziscsere

$$\text{vetület} = \frac{<e^x;1>}{\|1\|^2}\cdot 1 + \frac{<e^x;1>}{\|x\|^2}\cdot x = \frac{\int_{-1}^{1} e^x\,dx}{\int_{-1}^{1} 1^2\,dx} + \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot e^x\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \frac{e-\frac{1}{e}}{2} + \frac{\frac{2}{e}}{\frac{2}{3}}$$

$$\int_{-1}^{1} x\cdot e^x\,dx = [x\cdot e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx = [(x-1)\cdot e^x]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

<u>Hogyan készítünk ortogonális bázist?</u>

Tétel: <u>Gram – Schmidt ortogonalizáció</u>:

$\underline{c}_1 = \underline{b}_1$ Ha $\{\underline{b}_1; \ldots; \underline{b}_n\}$ bázis a V euklideszi térben

$\underline{c}_2 =$

$$\underline{c}_3 = \underline{b}_3 - \frac{\underline{b}_3\cdot\underline{c}_1}{\|\underline{c}_1\|^2}\cdot\underline{c}_1 - \frac{\underline{b}_3\cdot\underline{c}_2}{\|\underline{c}_2\|^2}\cdot\underline{c}_2$$

.

.

.

$$\underline{c}_k = \underline{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\underline{b}_k\cdot\underline{c}_i}{\|\underline{c}_i\|^2}\cdot\underline{c}_i$$

Def: Az n x n-es mátrixnak az <u>adjungáltja</u> $\underline{\underline{A}}^* = \overline{\underline{\underline{A}}^T}$

Áll: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{B}}^*$
$(c\cdot\underline{\underline{A}})^* = \bar{c} \cdot\underline{\underline{A}}^*$
$(\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{B}}^*\cdot\underline{\underline{A}}^*$

Def: A T: V → V lineáris operátor adjungáltja az a T*: V → V lineáris operátor, amelyre
$<T\underline{v}, \underline{w}> = <\underline{v}, T^*\underline{w}>$ minden V-beli $\underline{v}$, $\underline{w}$-re

Tétel: Ha $\underline{\underline{E}}$ ortonormált bázis, akkor $\underline{\underline{T}}^*_E = (\underline{\underline{T}}_E)^*$
Biz: ONB-ban $\underline{v} = <\underline{v};\underline{e}_1>\cdot\underline{e}_1 + \ldots + <\underline{v}; \underline{e}_n>\cdot\underline{e}_n$
Spec: $T\underline{e}_i = <T\underline{e}_i, \underline{e}_1>\cdot\underline{e}_1 + <T\underline{e}_i, \underline{e}_2>\cdot\underline{e}_2 + \ldots + <T\underline{e}_i, \underline{e}_n>\cdot\underline{e}_n \Rightarrow \underline{\underline{T}}_E = (<T\underline{e}_j; \underline{e}_i>)^n_{i\,j=1}$
Def: Legyen V egy komplex euklideszi tér és T: V → V lineáris operátor. T <u>unitér</u>, ha
$T^* = T^{-1}$, azaz $T^*T = TT^* = E$

Ha V valós euklideszi tér, akkor T: V → V lineáris operátor <u>ortogonális</u>, ha $T^T = T^{-1}$, azaz
$TT^T = T^TT = E$

Megj: $\|T\underline{v}\|^2 = <T\underline{v}; T\underline{v}> = <\underline{v}; T^*T\underline{v}> = <\underline{v}, \underline{v}> = \|\underline{v}\|^2$
„Az unitér vagy ortogonális operátor a vektor hosszát nem változtatja meg"

Tétel: Az unitér (ortogonális) operátorok jellemzése
Legyen V komplex (valós) euklideszi tér, T: V→ V lineáris operátor
Akkor ekvivalensek:
a) T unitér (ortogonális)

b) bármely ONB-ben $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1}$ ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{T} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1}$)
c) bármely ONB-ben $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ oszlopai ortonormáltak
d) bármely ONB-ben $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ sorai ortonormáltak
e) T skaláris szorzattartó: $\langle T\underline{u}; T\underline{v}\rangle = \langle \underline{u}; \underline{v}\rangle$ minden V-beli $\underline{u}, \underline{v}$-re
f) T normatartó: $\|T\underline{u}\| = \|\underline{u}\|$ minden V-beli $\underline{u}$-ra
g) Komplex V esetén van olyan $\langle \underline{e}_1; \underline{e}_2; \ldots; \underline{e}_n\rangle$ ONB V-ben, hogy $T\underline{e}_i = \lambda_i \cdot \underline{e}_i$ $|\lambda_i| = 1$ minden i-re

Megj: g) valós vektortérben nem igaz
pl.: $\mathbf{R}^2$-en egy forgatásnak nincs sajátértéke, ortogonális transzformáció

Pl.: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ortogonális transzformációi
forgatás $\underline{0}$ körül és/vagy tükrözés egy $\underline{0}$-n átmenő egyenesre

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

g) helyett valós vektortérben:
Tétel: A T: V → V lineáris operátor ortogonális <=> ha van olyan ONB, hogy $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_E$ a főátló mentén legfeljebb 2x2-es blokkokra bomlik, amelyek önmagukban is ortogonális mátrixok
1x1-es blokkban 1 vagy (-1)
A blokkokon kívül minden elem 0

Def: Ha V komplex (valós) euklideszi tér,
A: V → V lineáris operátor
A <u>önadjungált</u> (szimmetrikus) $A^* = A$ ($A^T = A$)

Tétel: önadjungált operátor jellemzői:
Legyen V komplex (valós), A: V → V lineáris operátor, akkor ekvivalens:
a) A önadjungált (szimmetrikus)
b) Bármely ONB-ben $A^* = A$ ($A^T = A$)
c) Van olyan $\{\underline{e}_1; \ldots; \underline{e}_n\}$ ONB, hogy $A\underline{e}_1 = \lambda_i \cdot \underline{e}_i$ λ_i eleme $\mathbf{R}$; $i = 1, \ldots, n$

Tétel: A: V → V önadjungált (szimmetrikus) ↔ $\langle A\underline{u}; \underline{u}\rangle = \langle \underline{u}; A\underline{v}\rangle$ minden $\underline{u}; \underline{v}$-re

Pl.: $\mathbf{R}^2$ szimmetrikus transzformációi c) alapján
létezik $\underline{s}_1$; $\underline{s}_2$, a két vektor merőleges, $\underline{s}_1$ irányában λ_1-szeres nyújtás, $\underline{s}_2$ irányában λ_2-szeres nyújtás

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_s = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Pl.: $\mathbf{R}^2$ szimmetrikus és ortogonális, ha transzformációi <=>merőleges sajátvektorok; +/- 1 sajátértékek
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow A = E$
$= -1 \Rightarrow A = -E$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1 \Rightarrow$ A tükrözés $\underline{s}_1$ egyenesére

Def: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ valós, szimmetrikus mátrixhoz tartozó <u>kvadratikus</u> alak

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x}, \underline{x}\rangle = \underline{x}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Pl.: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ -hoz tartozó kvadratikus alak

$[x,y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y] \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 3x+5y \end{bmatrix} = 2x^2 + 3xy + 3xy + 5y^2 = 2x^2 + 6xy + 5y^2$

Pl.: $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4yz + 6xz + 8z^2$ kvadratikus alakot adó mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Tétel: Főtengelytétel:

Ha $\underline{\underline{A}}$ valós szimmetrikus mátrix, akkor van olyan $\{\underline{e}_1; \ldots; \underline{e}_n\}$ ONB, amelyben „az $\underline{\underline{A}}$-hoz tartozó kvadratikus alak négyzetösszeggé válik”, azaz

$\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\lambda_i$, ahol $\underline{x} = \sum\alpha_i\underline{e}_i$ és $\underline{\underline{A}}\underline{e}_i = \lambda_i\underline{e}_i$ $\quad$ i=1; … ; n

Biz: $\underline{x} = \sum\alpha_i\underline{e}_i \Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{x} = \sum\alpha_i\lambda_i\underline{e}_i \Rightarrow \underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x} - \langle\underline{\underline{A}}\underline{x}, \underline{x}\rangle = \langle\sum\alpha_i\lambda_i\underline{e}_i, \sum\alpha_i\underline{e}_i\rangle = \sum\alpha_i\lambda_i$

Pl.: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$ milyen görbe egyenlete?

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 8) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$

$\lambda_1 = 4$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\underline{s}_1 = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$