BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Euklideszi tér

TÁVOLSÁG, SZÖG, MERŐLEGESSÉG

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Carlo Carrà
The Engineer’s Lover
L’amante dell’ingegnere
1921
Metaphysical art
Peggy Guggenheim Collection, Venice, Italy
55 x 45 cm

Ismeretek, képességek, célok

- Áttérés másik bázisra (báziscsere).
- Valós és komplex euklideszi tér fogalma, használata, izomorfizmusa.
- Norma, szög, merőlegesség.
- Ortogonális és ortonormált vektorrendszer.

Tartalomjegyzék

Áttérés másik bázisra, hasonlóság

A báziscsere mátrixszorzatos alakja

P Áttérés standard bázisra: $\mathcal{B} = \{\, (1,2,3), (0,2,3), (3,5,8) \,\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Írjuk fel $\mathbf{v}_\mathcal{B}$ standard bázisbeli koordinátás alakját egyetlen mátrixszorzással. (Pl. $\mathbf{v}_\mathcal{B} = (3,2,-1)$)

M $\mathbf{v}_\mathcal{B} = (3,2,-1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}, \text{ azaz } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{v}_\mathcal{B} = (x,y,z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja 2

D

Áttérés mátrixa

Legyen $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \,\}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó vektortér egy bázisa (pl. a $\mathcal{V}$ vektortéré). Az

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,]$$

mátrixot a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixának nevezzük.

Á

Koordináták változása a bázis cseréjénél

Ha $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ vektortér bázisa, és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó tér bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra

$$\mathbf{v}_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \mathbf{v}_{\mathcal{B}}.$$

B Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. A koordinátás alak jelentése szerint

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \ldots + v_n\mathbf{b}_n.$$

Ennek koordinátás alakja a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathcal{C}} &= v_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + v_2[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + \ldots + v_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\,]\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

P $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^4$ standard bázisa, és $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$. vektorok által kifeszített altér. Írjuk fel az $\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixot és adjuk meg a $(-1,1)_{\mathcal{B}}$ és a $(-3,2)_{\mathcal{B}}$ vektorok $\mathcal{E}$-beli koordinátás alakját!

M Az áttérés mátrixa

$$\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így a két vektor koordinátás alakja a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban

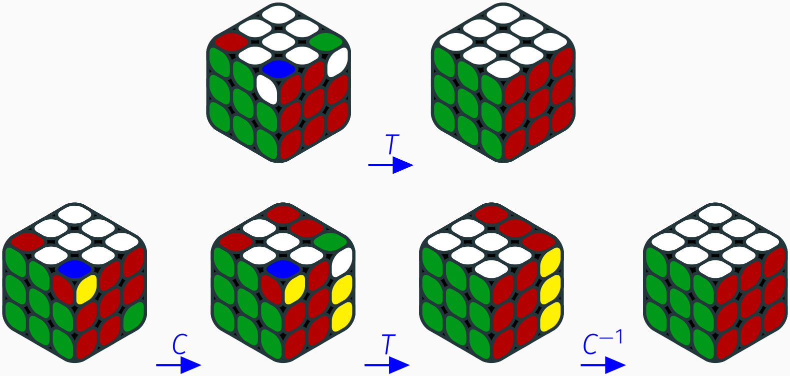
Legyen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy lineáris transzformáció, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ két bázisa. Az L mátrixa e bázisokban $\mathsf{L}_{\mathcal{A}}$ és $\mathsf{L}_{\mathcal{B}}$.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathsf{x}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
\mathsf{x}_{\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathsf{x}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathsf{D}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
\mathsf{x}_{\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{x}_{\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{A}}\mathsf{x}_{\mathcal{A}} \qquad \mathsf{L}_{\mathcal{A}}\mathsf{x}_{\mathcal{A}} = \mathsf{D}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{x}_{\mathcal{A}}$$

$$\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{A}} \qquad \mathsf{L}_{\mathcal{A}} = \mathsf{D}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$$

Valami hasonló a Rubik-kockán



D Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

T **Hasonló mátrixok hatása**

Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixai.

B $\mathsf{B} = \mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.
(Úgy tekintjük A-t, hogy az $\mathcal{E}$ bázisban mátrixa az L lineáris transzformációnak. A $\mathcal{B}$ bázis álljon a C oszlopaiból, így B épp az L mátrixa a $\mathcal{B}$ bázsiban.)

T **Hasonlóságra invariáns tulajdonságok** Ha A és B hasonló mátrixok, azaz $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$, azaz $\mathrm{null}(\mathsf{A}) = \mathrm{null}(\mathsf{B})$,
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \mathrm{trace}(\mathsf{B})$.

Valós euklideszi tér

Skaláris szorzat másik bázisban

P Legyen $\mathcal{B} = \{(2,0,1),(1,1,0),(0,-1,1)\}$. Milyen képlettel számolható ki az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ skaláris szorzat, ha a két vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakját ismerjük?

J Az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakja $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, a standard alak $\mathbf{x}_{\mathcal{E}}$.

M Ekkor $\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$. Így

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}})\mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Esetünkben

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

K Mit tudunk a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ mátrixról?
Szimmetrikus, invertálható, de ez még kevés.

T Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m A *d)* pont szerint egy másik bázisban felírva a skaláris szorzást, $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$ kell $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra.

D A $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixot pozitív definitnek nev., ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$.

Valós euklideszi tér

D Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges valós vektortér, és legyen

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$S1$	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$	szimmetrikus	kommutatív
$S2$	$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	homogén	kompat. szorz.
$S3$	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$	additív	disztributív
$S4$	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	pozitív definit	

E $\langle .,. \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$-n értelmezett skaláris szorzásnak, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret euklideszi térnek nev.

m *Nem* vihető át *komplex vagy véges testekre* módosítás nélkül!

D Bilineáris fv.: kétváltozós, mindkét változójában lineáris fv.

Példák valós euklideszi térekre

P $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{y}$ skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\mathbf{A}$ invertálható. (Látni fogjuk, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}$ pontosan akkor skaláris szorzás, ha $\mathbf{B}$ pozitív definit, és hogy $\mathbf{B}$ pontosan akkor pozitív definit, ha van olyan invertálható $\mathbf{A}$, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$.)

P Az $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ sorozatok, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$. vektorteret alkotnak, melyen skaláris szorzást definiál $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. ($\ell^2$-tér).

P Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $\mathcal{C}[a, b]$ vektorterén az $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ függvényekre az $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ skaláris szorzás. (E tér altere a polinomok tere, az is euklideszi tér e skalárszorzással.)

P Az $\int_{\mathbb{R}} f^2 < \infty$ feltételnek eleget tevő függvények az $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg = \int_{-\infty}^{\infty} fg$ skaláris szorzással Euklideszi-teret alkotnak (L^2-tér).

Távolság és szög valós euklideszi térben

D L! $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ két tetszőleges vektor.

1. Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán (abszolút értékén, normáján) önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz
$$|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}. \tag{1}$$
2. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinusza:
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \tag{2}$$
3. Amh az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0. \tag{3}$$
4. A két vektor (végpontjának) távolsága
$$\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \tag{4}$$

P $\mathsf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathsf{v} = (4, 6, -10, 10)$, $\mathsf{w} = (0, 3, 6, -2)$, $|\mathsf{u}| =?$, $\mathrm{d}(\mathsf{u}, \mathsf{v}) =?$, $\cos(\mathsf{u}, \mathsf{w})_\angle =?$

M Az (1), a (4) és a (2) képletekkel:

$$\begin{aligned}
|\mathsf{u}| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15, \\
d(\mathsf{u}, \mathsf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15 \\
\cos(\mathsf{u}, \mathsf{w})_\angle &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{15 \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

Merőlegesség és norma absztrakt térben

P Mekkora szöget zár be a $\sin$ és $\cos$ függvény a 2π szerint periódikus folytonos függvények euklideszi terében, ahol

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg.$$

M Mivel $\int_0^{2\pi} \sin\cos = \left[\frac{\sin^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$, ezért merőlegesek egymásra.

- Mivel $\langle\sin, \sin\rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\right]_0^{2\pi} = \pi$, így az $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$ képletből $\|\sin\| = \sqrt{\langle\sin, \sin\rangle} = \sqrt{\pi}$.
- Hasonlóképp $\|\cos\| = \sqrt{\langle\cos, \cos\rangle} = \sqrt{\pi}$.

m Eszerint az $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin$ és az $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos$ függvények e térben egymásra merőleges egységvektorok.

m A Fourier-sorfejtés azon alapul, hogy az $\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots\}$ függvények páronként merőleges egységvektorok e térben.

Skaláris szorzat és abszolút érték (norma) kapcsolata

T Polarizációs formulák: Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right) \tag{5}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right) \tag{6}$$

B* Az abszolút érték (1)-beli definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}(4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle .
\end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható.

Ortonormált és ortogonális bázis

OR és ONR lineáris függetlensége

D A páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszert ortogonális rendszernek (OR), az egységvektorokból álló OR-t ortonormált rendszernek (ONR) nevezzük.

Á Egy valós euklideszi térben ha a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer vektorai zérusvektortól különbözőek és OR-t alkotnak, akkor

1. függetlenek,
2. $\{\mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|\}$ ONR.

B TFH vmely c_1, c_2,..., c_k konstansokra $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ezért a $\mathbf{v}_i$ vektorral beszorozva $c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, amiből $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$.

2. $\dfrac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_j\|} = \left\langle \dfrac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \dfrac{\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|} \right\rangle$

K Egy zérusvektort nem tartalmazó OR, vagy ONR mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. (Továbbiakban ONB)

Komplex euklideszi tér

Mi lehet a skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben?

- A $\sum_i z_i w_i$ nem működik:

$$(1, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

- Ötletadó kérdés: az 1-dimenziós térben mi az abszolút érték? A $z = a + \mathrm{i}b$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2! Eszerint $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n.$$

Komplex mátrix adjungáltja

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

m semmi köze a „klasszikus adjungálthoz”, mely egy négyzetes mátrix előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltja!

P $\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$, $[1-i \;\; i]^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \end{bmatrix}$.

T Az adjungált tulajdonságai Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

1. $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}} + \mathbf{B}^{\mathsf{H}}$,
3. $(c\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \overline{c}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$
4. $(\mathbf{AB})^{\mathsf{H}} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

m Az adjungált a „valós transzponált” kiterjesztése.

D Komplex vektorok skaláris szorzata A $\mathbb{C}^n$-beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} := \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n = \mathbf{z}^{\mathsf{H}}\mathbf{w}$ komplex skalárt értjük.

P $(1, \mathrm{i})$ és (i, i) szorzatai:

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = 1 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i},$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 - \mathrm{i}.$$

A komplex skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m Kiterjesztése a valós skaláris szorzatnak!

m A harmadik tulajdonságban felsoroltak bármelyike következik a másikból az első alapján.

m Komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata valós!

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ egy vektortér, és $\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{C}$ skalár esetén

C1	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$	konjugált szimmetria
C2	$\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	homogenitás a 2. változóban
C3	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$	additivitás
C4	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	pozitív definitség

E $\langle .,. \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$-n értelmezett komplex skaláris szorzásnak, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret komplex euklideszi térnek, vagy $\mathbb{C}$ fölötti euklideszi térnek nevezzük.

Komplex euklideszi tér

- Az első változóban a szorzás nem homogén, hisz

$$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, c\mathbf{u}\rangle} = \overline{c\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \bar{c}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \bar{c}\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

  A komplex skaláris szorzás az első változóban nem lineáris, hanem ún. konjugált lineáris. Maga a komplex skaláris szorzás így nem bilineáris (hanem ún. szeszkvilineáris, vagy másféllineáris).
- A komplex skaláris szorzás definíciója a valós skaláris általánosítása, annak nem mond ellent.

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben

D Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége: Legyen $\mathcal{V}$ tetszőleges valós vagy komplex vektortér. Az $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektor hossza, abszolút értéke vagy normája $\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ ($\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ esetén $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$), két vektor távolsága megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

D Két vektort merőlegesnek tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.

m Két vektor szöge nem definiálható a szokásos módon.

Á Az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektornak az $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete: $\mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle$ ($\mathbb{C}^n$-ben $\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}})\mathbf{x}$), $\mathbf{x}$ rá merőleges összetevője: $\mathbf{x} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle$ ($\mathbb{C}^n$-ben $(\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}})\mathbf{x}$).

B $\langle \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle \rangle = |\langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle|^2 - |\langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle|^2 = 0$.

Á Az $\mathbf{e}$ normálvektorú hipersíkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}}$, a merőleges tükrözés mátrixa $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}}$, ahol $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$ egységvektor.

T **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség**

Legyen $\mathcal{V}$ egy valós vagy komplex euklideszi tér. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

B* Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő.

- Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.
- Az $\mathbf{y}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője: $\mathbf{y} - \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle$. E vektor hosszának négyzete nagyobb vagy egyenlő 0-nál:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle\|^2 \\
&= \langle \mathbf{y} - \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle, \mathbf{y} - \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle\rangle \\
&\overset{C3}{=} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle\rangle - \langle \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle, \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle\rangle \\
&\overset{C2}{=} \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}\rangle - \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle + \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle} - \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle + \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 - |\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle|^2 \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}.
\end{aligned}
$$

Ebből átrendezéssel $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ ✓

- Egyenőség akkor áll fenn, ha $\mathbf{y} - \mathbf{e}\langle \mathbf{e}, \mathbf{y}\rangle = 0 \rightsquigarrow \mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lin.ö.f.