Fizika 2X, 1. zh (2010/11 tavaszi félév)

Teszt

1	Az elektrosztatikus tér örvényes.	**H**
2	Elektrosztatikus térbe helyezett fémüregben a villamos térerősség nulla.	**I**
3	A mágneses indukció vektor a különböző anyagok határfelületére merőleges komponense ugrást szenved, ha a határfelületen van áram.	**H**
4	Unipoláris dinamó esetén az indukció fluxus időbeli változása eredményezi az indukált elektromotoros erőt.	**H**
5	Két pont közötti feszültség a két pontban lévő potenciálok különbségeként számolható.	**I**
6	A ferromágneses anyag koercitív ereje azt a mágneses térerősség értéket jelenti, amelynél a mágneses indukció nulla.	**I**
7	Az eltolási áram vákuumban nulla, mert nincs polarizáció, mivel vákuumban töltések sincsenek.	**H**
8	A Poynting vektor a villamos térerősség és a mágneses térerősség vektoriális szorzata.	**I**
9	Maxwell második egyenlete szerint a villamos térerősség rotációja megegyezik a mágneses indukció vektor időszerinti deriváltjának ellentettjével.	**I**
10	A nagyfrekvenciával rezgő villamos dipólus által létrehozott hullám térkomponensei a dipólustól mért távolság négyzetével fordítottan arányosak.	**H**

Feladatok

$\boxed{1.}$ Mekkora munkát kell végeznünk, ha egy $6 \cdot 10^{-9}$ C töltést egy 10^{-7} töltés terében a kezdeti 15 cm-es távolságból 5 cm távolságra viszünk közelebb? (ε_0 = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)

MEGOLDÁS:

Tekintsük a töltést pontszerű töltésnek (a feladat nem mondja, hogy lenne kiterjedése). A töltés elektrosztatikus teret hoz létre maga körül. Ennek a térnek a térerősségét fel tudjuk írni a töltéstől való távolság függvényében (levezethető a Coulomb-erő képletéből, vagy akár a Gauss-tételből is kihozható). A térerősség:

$$E(r) = k \cdot \frac{Q^*}{r^2} \qquad \left(k = 9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \right),$$

ahol Q^* a teret létrehozó töltés (esetünkben 10^{-7} C). Az elektromos tér munkájának a képletét levezethetjük az alap munkadefinícióból:

$$W_{tér} = \int_{r_1}^{r_2} F \, dr = \int_{r_1}^{r_2} F_{Coulomb} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} k \cdot \frac{Q \cdot Q^*}{r^2} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} Q \cdot \frac{k \cdot Q^*}{r^2} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} Q \cdot E(r) \, dr$$

A képletben Q az a töltés, amin a tér munkát végez (azaz amit mozgat). A levezetéshez felhasználtuk, hogy az elektromos tér ereje, amivel hat a töltésekre, nem más, mint a Coulomb-erő. Ezen kívül kiválasztottuk az egyik töltést, mint a teret létrehozó töltést, így a térerőt is behozhattuk a képletbe. A mi munkavégzésünk (amivel a töltést közelebb vihetjük) megegyezik a tér munkájának ellentettjével (mivel a tér ellenében végezzük a munkát):

$$W_{miénk,r1 \to r2} = -W_{tér,r1 \to r2} = -\int_{r_1}^{r_2} Q \cdot E(r) \, dr = -\int_{r_1}^{r_2} Q \cdot k \cdot \frac{Q'}{r^2} dr = -k \cdot Q \cdot Q' \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \, dr =$$

$$= -k \cdot Q \cdot Q' \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-7} \left(-\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.15} \right) =$$

$$= -9 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot \left(-\frac{40}{3} \right) = 3 \cdot 6 \cdot 40 \cdot 10^{-7} = 720 \cdot 10^{-7} = 7{,}2 \cdot 10^{-5} \, J$$

<u>Megjegyzés:</u> úgy is számolhatnánk, hogy nem tesszük ki a negatív előjelet az integrál elé, hanem csak felcseréjük az integrálás határait. Ennek a fizikai magyarázata az, hogy ahhoz, hogy a töltést 15 cm-ről 5 cm-re közelítsük, ugyanannyi munkát kell végeznünk, mint amennyi munkát az elektromos térnek kéne végeznie ahhoz, hogy a töltést 5 cm-ről eltávolítsa 15 cm-re.

$\boxed{2.}$ Egymástól 40 cm távolságban lévő végtelen kiterjedésű párhuzamos síkok felületi töltéssűrűsége $3\cdot10^{-9}$ C/m^2 és $7\cdot10^{-9}$ C/m^2. Mekkora a síkok közötti potenciálkülönbség (abszolút) értéke?

MEGOLDÁS:

Gauss-tétel segítségével belátható, hogy a végtelen kiterjedésű sík által generált elektromos tér térerőssége homogén (azaz térben állandó), és nagysága:

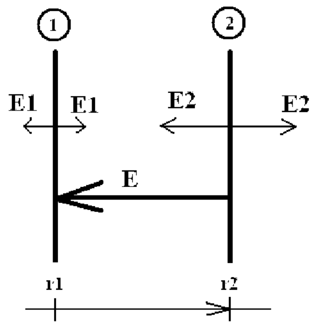
$$E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0},$$

ahol ω a sík felületi töltéssűrűsége, ε_0 pedig a vákuum dielektromos állandója (nyilván ha nem vákuumban, hanem egy másik közegben lennénk, akkor ε_0-t még meg kéne szorozni a közeg relatív dielektromos állandójával, ε_r-rel.)

Ezek alapján az 1. és a 2. sík által létrehozott elektromos terek térerősségeinek nagysága:

$$E_1 = \frac{\omega_1}{2\varepsilon_0} = \frac{3\cdot10^{-9}}{2\varepsilon_0}\frac{N}{C}, \qquad E_2 = \frac{\omega_2}{2\varepsilon_0} = \frac{7\cdot10^{-9}}{2\varepsilon_0}\frac{N}{C}$$

Mivel végtelen kiterjedésű töltött síkok homogén elektromos teret generálnak, ezért a két sík között is homogén elektromos tér lesz, ennek a tererejét pedig a szuperpozíció elve alapján úgy kaphatjuk meg, hogy a két sík által generált tér térerősségvektorait vektoriálisan összeadjuk, azaz $\underline{E} = \underline{E_1} + \underline{E_2}$:



Az ábrán látható, hogy a két sík között az eredő térerősség az 1. sík irányába fog mutatni, hiszen $\underline{E_2}$ nagysága (E_2) nagyobb, mint $\underline{E_1}$ nagysága (E_1), ezen kívül $\underline{E}$ nagysága:

$$E = E_2 - E_1 = \frac{4\cdot10^{-9}}{2\varepsilon_0} = \frac{4\cdot10^{-9}}{2\cdot\frac{1}{4\pi\cdot k}} = \frac{4\pi\cdot9\cdot10^{9}\cdot4\cdot10^{-9}}{2} = 72\pi\frac{N}{C}$$

Legyen az 1. sík helye r_1, és a 2. sík helye r_2 (ezt az ábrán is bejelöltem). Ekkor a két sík potenciálkülönbségét úgy kaphatjuk meg, ha a két sík közötti tererőt kiintegráljuk a két sík között. Azaz:

$$U = U_2 - U_1 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = E\int_{r_1}^{r_2} 1\,dr = E\cdot[r]_{r_1}^{r_2} = E(r_2 - r_1) = E\cdot d = 72\pi\cdot0{,}4 \approx 90{,}478\,V,$$

ahol d a két sík távolsága volt, ami 40 cm, azaz 0,4 m.

<u>Megjegyzés:</u> Mivel a két sík között homogén a térerősség, az integrálásból sima szorzás lett, mégpedig a tererőt kellett a síkok távolságával szorozni.

$\boxed{3.}$ Számítsuk ki az R sugarú gömb felületén a potenciált, ha benne mindenütt ρ töltéssűrűség van. A nulla potenciálú hely a végtelenben van.

MEGOLDÁS:

Először meghatározzuk a térerősséget az R sugarú gömbön kívül, a gömb középpontjától való távolság (r) függvényében. Ehhez fölírjuk a Gauss-tételt:

$$\int \underline{E} d\underline{A} = \frac{Q_{gömb}}{\varepsilon_0} \quad \text{(az R sugarú gömbön kívül)}$$

Az integráláshoz használt Gauss-felületnek érdemes egy r sugarú gömböt választani (r>R), melynek a középpontja az R sugarú gömb középpontja. Ekkor a Gauss-felület (a külső gömb) minden pontjában merőlegesen kifelé mutat a térerősség, és minden pontban ugyanakkora a nagysága. Tudni kell még, hogy a gömb össztöltését úgy kapjuk meg, hogy a térfogati töltéssűrűségét megszorozzuk a térfogatával. Ezek alapján:

$$\int \underline{E} d\underline{A} = \int_{r\,\text{sugarú gömb}} E dA = E \cdot \int_{r\,\text{sugarú gömb}} dA = E \cdot 4r^2\pi = \frac{4R^3\pi\rho}{3\varepsilon_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}\cdot\rho}{\varepsilon_0} = \frac{V_{gömb}\cdot\rho}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{gömb}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot \cancel{4} r^2 \cancel{\pi} = \frac{\cancel{4} R^3 \cancel{\pi}\rho}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 \cdot r^2}, \qquad (\text{ha} \quad r > R)$$

Az R sugarú gömb felszínén a potenciál megegyezik a felszínen lévő pont és a nullapotenciálú pont (végtelen távol lévő pont) közötti feszültséggel. Mivel a gömbön kívül vagyunk, a térerősség helyébe beírhatjuk az előbb megkapott összefüggést. A potenciál tehát:

$$U_{felszín} = \int_R^\infty E\,dr = \int_R^\infty \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 \cdot r^2} dr = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \lim_{\omega\to\infty} \int_R^\omega \frac{1}{r^2} dr = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \lim_{\omega\to\infty} \left[-\frac{1}{r}\right]_R^\omega =$$

$$= \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{R}\right) = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \left(-0 + \frac{1}{R}\right) = \frac{R^2\rho}{3\varepsilon_0}$$

$\boxed{4.}$ Két egyforma A területű fémlemez közül - amelyek méreteikhez képest igen kicsiny d távolságban vannak egymástól - az egyiknek Q, a másiknak -Q töltése van. Mekkora a potenciál különbség a két fémlemez között?

MEGOLDÁS:

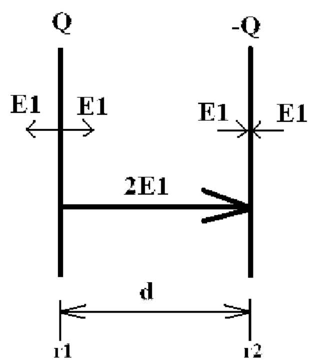
Mivel a lemezek távolsága a felületekhez képest nagyon kicsi, ezért a lemezek kiterjedése tekinthető végtelennek (a köztük lévő tér tekinthető homogén térnek). Ahogy a 2. feladatban is leírtuk, tudjuk, hogy végtelen kiterjedésű lemez (sík) által generált térerősség nagysága:

$$E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}$$

Tudjuk még, hogy a felületi töltéssűrűséget úgy számolhatjuk ki, ha a lemezre felvitt töltést elosztjuk a lemez felületével, azaz:

$$\omega = \frac{Q}{A}$$

Mivel a két lemezen ugyanakkora, de ellentétes polaritású töltés van, ezért a két lemez által létrehozott elektromos térerősség nagysága meg fog egyezni, de az irányuk ellentétes lesz. Ahogy az ábra is mutatja:



Ezek alapján tudjuk, hogy az elektromos térerősség vektora a Q töltésű lemez felől a -Q töltésű lemez felé fog mutatni, és a nagysága:

$$|\underline{E}| = 2 \cdot |\underline{E}_1| = 2 \cdot \frac{\omega}{2\varepsilon_0} = \frac{\omega}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{Q}{A}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \cdot \varepsilon_0}$$

Innentől kezdve a feszültség kiszámítása már egyszerű: mivel a lemezek között homogén a tér, integrálás helyett megint csak szoroznunk kell a lemezek közötti távolsággal:

$$U = \left(\int_{r_1}^{r_2} E\,dr \right) = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \varepsilon_0}$$

<u>Megjegyzés:</u> Ez a két lemez együtt tulajdonképpen egy síkkondenzátort alkot, tehát ez a feladat megmutatja, hogyan kell kiszámolni a síkkondenzátor feszültségét a rá felvitt töltés, és a lemezek felülete és távolsága alapján.

$\boxed{5.}$ Töltött fémgömb felszínén a potenciál 1000 V a végtelen távoli ponthoz képest, a gömb középpontjától 1 m-re pedig 100 V. Mekkora a gömb sugara?

MEGOLDÁS:

R sugarú töltött gömb által létrehozott térerősség a gömb középpontjától való távolság függvényében:

$E(r) = 0$, ha r<R (mivel a töltések a fémgömb felszínén helyezkednek el), és

$E(r) = \frac{Q_{gömb}}{4r^2\pi \cdot \varepsilon_0}$, ha r>R (ezt a 3. feladathoz hasonlóan levezetnénk a Gauss-tételből)

A potenciál a felszínen:

$$U_{felszín} = \int_R^\infty E\,dr = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = 1000 \text{ V}$$

A potenciál a középponttól 1 m -re:

$$U_{1m} = \int_1^\infty E\,dr = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_1^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_1^\infty = \frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1} = 100 \text{ V}$$

Ha ezt visszaírjuk az előző egyenletünkbe:

$$\frac{Q_{gömb}}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = 1000$$

$$100 \cdot \frac{1}{R} = 1000$$

$$\frac{1}{R} = 10$$

$$R = 0{,}1 \text{ m}$$

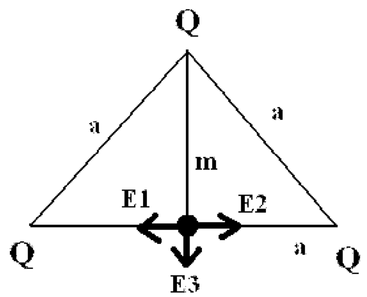
Tehát a gömb sugara 0,1 m.

6. Egy 10 cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban $5 \cdot 10^{-7}$ C nagyságú töltéseket helyezünk el. Mekkora az elektromos térerősség a háromszög oldalainak felezőpontjában?

MEGOLDÁS:

Ponttöltés által generált elektromos tér térerőssége (ahogy korábban már láttuk):

$$E(r) = k \cdot \frac{Q^*}{r^2} \qquad \left(k = 9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \right)$$



Amelyik oldal felezőpontján vagyunk, annak az oldalnak a végpontjaiban lévő töltések által kifejtett térerő azonos nagyságú, és ellentétes irányú lesz, tehát a két térerősség kioltja egymást. Ezért elegendő a szemközti csúcsban lévő töltés által keltett térerőt kiszámolni ($\underline{E_3}$) (mert az lesz az eredő térerő). Az ezt kiváltó töltés távolsága a vizsgált felezőponttól pontosan a szabályos háromszög magassága lesz. Tudjuk, hogy a szabályos háromszög magassága:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,1$$

Ezek alapján a keresett térerősség:

$$E = k \cdot \frac{Q}{m^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-7}}{\frac{3}{4} \cdot 0,01} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3} \cdot \frac{10^9 \cdot 10^{-7}}{10^{-2}} = 60 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^5 \ \frac{V}{m}$$

$\boxed{7.}$ Határozzuk meg a 0,12 Vs/m^2 indukciójú homogén mágneses erőteret előállító elektromágnes 400 cm^3 térfogatú belsejében tárolt energiát!

MEGOLDÁS:

A mágneses tér energiasűrűsége (a 8. Maxwell-egyenlet alapján):

$$w = \frac{1}{2}\underline{B} \cdot \underline{H}$$

Ez tulajdonképpen azt mondja meg, hogy egységnyi térfogatban mekkora energia található. Mivel H-t nem tudjuk, felhasználunk még egy összefüggést (6. Maxwell-egyenletből):

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} \qquad \left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}\right)$$

Ezek után már csak azt kell tudni, hogy a mágneses tér energiáját úgy kapjuk, hogy az energiasűrűséget kiintegráljuk a térfogatra. Mivel a mágneses tér homogén (térben állandó), elég lesz szorozni a térfogattal integrálás helyett. Tehát a keresett energia:

$$W = \left(\int_V \frac{1}{2}\underline{B} \cdot \underline{H}\ d\underline{V}\right) = \frac{1}{2}\underline{B} \cdot \underline{H} \cdot V = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V = \frac{0{,}12^2}{8\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} =$$

$$= \frac{0{,}0144}{8\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \approx 0{,}00229 \cdot 10^3 = 2{,}29\ J$$

8. Egy 10 cm sugarú réz korong másodpercenként 20 fordulatot tesz a síkára merőleges homogén mágneses erőtérben. Ha a középpontja és a széle között az indukált elektromotoros erő 3,14 mV, mekkora a mágneses erőtér erőssége? ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am)

MEGOLDÁS:

Először is írjuk fel a korong középpontjától r távolságra lévő pontok kerületi sebességének nagyságát! Ehhez először ki kéne számolni a szögsebességet. Tudjuk, hogy egy másodperc alatt a korong 20 fordulatot tesz. Mivel egy teljes körbefordulás az 2π szögelfordulást jelent, ezért a korong szögelfordulása másodpercenként 40π. Mivel a forgás egyenletes, ezért ez tulajdonképpen maga a szögsebesség:

$$\omega = 20 \cdot 2\pi \frac{1}{s} = 40\pi \frac{1}{s} = \left(40\pi \frac{\text{rad}}{s} \right)$$

Most írjuk fel a korong középpontjától r távolságra lévő pontok kerületi sebességének nagyságát (tudjuk, hogy a szögsebesség 40π 1/s):

$$|\underline{v}_r| = v_r = r \cdot \omega = 40\pi \cdot r \left(\frac{m}{s} \right)$$

Most írjuk fel az indukált elektromotoros erő kiszámításának képletét. Felhasználjuk, hogy a kerületi pontok sebessége ($\underline{v}_r$), a mágneses indukció vektor ($\underline{B}$) és a vezető vizsgált részének iránya (középpont és szél között: sugárirány) merőlegesek egymásra, ezen kívül a mágneses indukció homogén. Ilyenkor a számításban a vektorok helyett egyszerűen írhatjuk a nagyságaikat. Ezek alapján az indukált elektromotoros erő:

$$U_e = \int_0^R \underline{E}_{\text{indukált}} d\underline{r} = \int_0^R \left(\underline{v}_r \times \underline{B} \right) d\underline{r} = \int_0^R v_r B \, dr = \int_0^R r \cdot \omega \cdot B \, dr = B\omega \int_0^R r \cdot \, dr = B\omega \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{B\omega R^2}{2}$$

A kapott egyenletben mindent tudunk, kivétel a mágneses indukció nagyságát, amit viszont így simán ki tudnánk számolni. Ezen kívül az indukció helyére beírhatjuk a mágneses térerősséggel való összefüggését:

$$U_e = \frac{B\omega R^2}{2} = \frac{\mu_0 H \omega R^2}{2}$$

Innen a mágneses térerősség nagyságát a következőképpen számolhatjuk ki:

$$H = \frac{2U_e}{\mu_0 \cdot \omega \cdot R^2} = \frac{2 \cdot \left(3{,}14 \cdot 10^{-3}\right)}{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left(40\pi\right) \cdot \left(0{,}1^2\right)} = \frac{6{,}28 \cdot 10^{-3}}{160\pi^2 \cdot 10^{-9}} \frac{A}{m} \approx 0{,}0039769 \cdot 10^6 \frac{A}{m} = 3976{,}9 \frac{A}{m}$$

$\boxed{9.}$ Hosszú, 2000 menet/m menetsűrűségű vasmagos szolenoidon 10 mA áram halad át. A vas szuszceptibilitása ennél a gerjesztésnél 1000. Mekkora áramerősséggel lehetne elérni ugyanekkora indukciót vasmag nélkül?

MEGOLDÁS:

Szolenoidban a mágneses térerősség nagysága:

$H = \frac{N \cdot I}{l}$, ahol N a tekercs menetszáma, I a tekercsben folyó áram, l pedig a tekercs hossza. N / l tulajdonképpen a menetsűrűség, tehát esetünkben a mágneses térerősség: $H = 2000 \cdot I$

Első körben számoljuk ki az indukció nagyságát a vasmagos esetben. Ehhez tudni kell, hogy hogyan számoljuk az indukciót anyag jelenlétében:

$\underline{B} = \mu_0 \cdot \underline{H} + \underline{M}$, ahol $\underline{M}$ a mágnesezettség vektora. A mágnesezettség kiszámítása:

$\underline{M} = \mu_0 \cdot \chi \cdot \underline{H}$, ahol χ a mágneses szuszceptibilitás. Ez alapján már kiszámolhatjuk a mágneses indukció nagyságát a vasmagos esetben:

$$B = |\underline{B}| = \mu_0 \cdot H + M = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot \chi_{vas} \cdot H = \mu_0 \cdot H \cdot (1 + \chi_{vas}) =$$
$$= (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (2000 \cdot I_1) \cdot (1 + 1000) = (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (2000 \cdot 10^{-2}) \cdot 1001 =$$
$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1001 = 8008\pi \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{m^2}$$

Most már csak azt kell kiszámolni, hogy ekkora indukciót vasmag nélkül mekkora áram fog létrehozni. Először írjuk fel az indukciót vasmag nélküli esetben, egyelőre az ismeretlen új árammal:

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \cdot 2000 \cdot I_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot I_2 = 8000\pi \cdot 10^{-7} I_2 .$$

Ha most az egyenlet baloldalára beírjuk a korábban kiszámolt indukciót, megkapjuk a kérdéses áramerősséget:

$$8008\pi \cdot 10^{-6} = 8000\pi \cdot 10^{-7} I_2$$

Ebből:

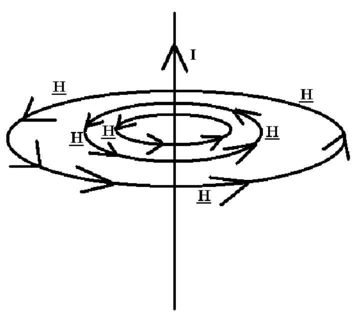
$$I_2 = \frac{8008\cancel{\pi} \cdot 10^{-6}}{8000\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}} = 1,001 \cdot 10 = 10,01 \ \text{A}$$

$\boxed{10.}$ Három egy síkban lévő párhuzamos vezető egymástól 3 cm-re van. A bal oldali vezetőben és a középső vezetőben I, a harmadikban -2I áram folyik. Azon egyenes helyzete, amely mentén a térerősség zérus:

<u>MEGOLDÁS:</u>

<u>FONTOS:</u> Ez a feladat röviden megoldható (1 számítás), de az általam leírt megoldás hosszú lesz a magyarázatok miatt.

Először azt kell tudni, hogy az egyenes vezető körül milyen mágneses tér keletkezik. A vezető körül a mágneses tér erővonalai körkörösen helyezkednek el úgy, hogy ezeknek a köröknek a középpontján merőlegesen megy át a mágneses vezető. Ezen kívül a mágneses erőtér irányát az úgynevezett jobb kéz szabállyal határozhatjuk meg. Ha a jobb hüvelykujjunk az áram iránya felé mutat, akkor a többi behajlított ujjunk mutatja a mágneses erőtér irányát. Íme, egy ábra, hogy könnyebben meg lehessen érteni:

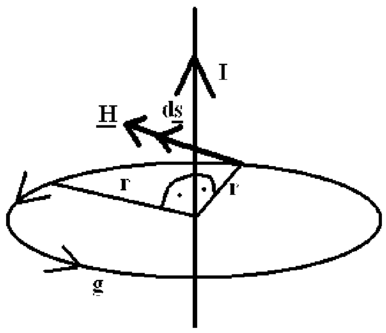


Az ábra mutatja az áramjárta egyenes vezető mágneses terét.

Már csak azt kéne tudni, hogy ha a vezetőben I áram folyik, akkor tőle r távolságra mekkora a mágneses térerősség nagysága (azaz H(r)-re vagyunk kíváncsiak)? Ennek a kiszámításához a gerjesztési törvényt fogjuk felhasználni:

$$\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \sum I$$

Azaz ha veszünk egy zárt g görbét, és arra kiintegráljuk a mágneses térerősséget, akkor megkapjuk a görbén keresztülfolyó áramok előjeles összegét. Mivel mi olyan vezető terét akarjuk számolni, amiben I áram folyik, ezért az egyenlet jobb oldalára simán I-t fogunk írni. A következő kérdés, hogy hogyan válasszuk meg a g görbét? Érdemes egy olyan kört választani, aminek a középpontján merőlegesen megy át a vezető, és az irányítása megegyezik a mágneses tér irányával, mert ekkor a $\underline{H}$ mágneses térerősség vektor a görbe minden pontjában érintőirányú lesz (azaz párhuzamos lesz a kis $d\underline{s}$ vektorokkal), ezért az integrálon belül $\underline{H}d\underline{s}$ helyett írhatjuk simán a nagyságokat, azaz Hds-t. (Skaláris szorzatról van szó, tehát ha a két vektor párhuzamos, akkor $\underline{H}\cdot d\underline{s}=|\underline{H}|\cdot|d\underline{s}|\cdot\cos(0°)=H\cdot ds$. Ezen kívül ilyenkor a görbénk minden pontján ugyanakkora lesz a térerősség nagysága, hiszen egy "térerősség-körön" haladunk végig. Ez azért lesz előny, mert így H-t kivihetjük az integrál elé:



Az ábrán látható, amiket eddig írtam a görbe kiválasztásáról. Tulajdonképpen a legjobb választás egy r sugarú kör. (Mert így meg tudjuk határozni a térerősséget r függvényében.) Most pedig írjuk fel a gerjesztési törvényt erre az esetre:

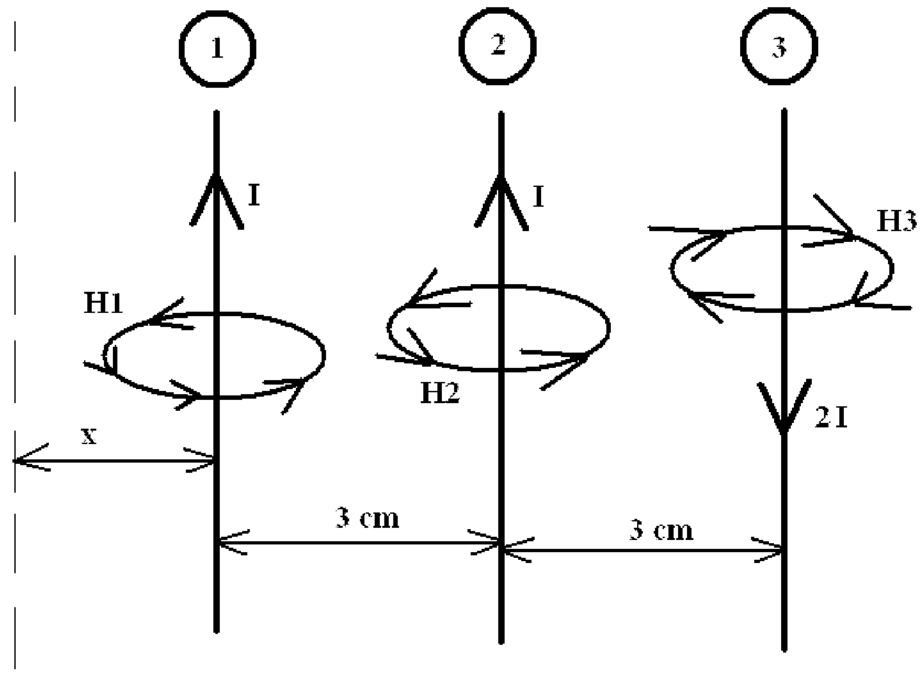
$\underline{H} \parallel \underline{ds} \Rightarrow \underline{H}\,\underline{ds} = H\,ds$

$$\oint_g \underline{H}d\underline{s} = \oint_g H ds = H\oint_g ds = \qquad H \cdot 2r \cdot \pi = I \qquad = \sum I$$

Ebből:

$$H(r) = \frac{I}{2r\pi}$$

Ez volt a dolgok elméleti része. Innentől jön maga a megoldás kiszámítása. Azt a helyet (távolságot valamelyik vezetőtől) keressük, ahol a mágneses térerősségek előjeles összege 0. Az egyfelé mutató térerősségeket azonos előjellel kell vennünk, míg az ellentétes irányúakat ellentétes előjelűeknek. Én most a baloldali vezetőtől a baloldali irányba vett távolságot jelölöm x-szel. (Ha odafigyelünk a térerősségek irányaira, akkor teljesen mindegy, hogy melyik vezetőtől való távolságot jelöljük x-szel, minden esetben a helyes megoldás fog kijönni.) Íme az ábra:



Az egyenesünk távolsága a vezetőktől cm-ben: az elsőtől x, a másodiktól x+3, a harmadiktól x+6. Azt kell még észrevenni, hogy az ábrán H_1 és H_2 "kifelé" mutat, míg H_3 "befelé". Ez alapján ahhoz, hogy a térerő nulla legyen, a következőnek kell teljesülnie:

$$H_1 + H_2 - H_3 = 0$$

Beírva a távolságtól és az áramoktól való függést:

$$\frac{I}{2\pi \cdot x} + \frac{I}{2\pi \cdot (x+3)} - \frac{2I}{2\pi \cdot (x+6)} = 0$$

Amivel lehet, egyszerűsítünk:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+6} = 0$$

Innentől egyszerű egyenletmegoldás:

$$\begin{aligned}(x+3)(x+6) + x(x+6) - 2x(x+3) &= 0 \\ x^2 + 9x + 18 + x^2 + 6x - 2x^2 - 6x &= 0 \\ 9x + 18 &= 0 \\ 9x &= -18 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Mivel x azt mondja meg, hogy a baloldali vezetőtől mennyit kell balra mennünk cm-ben, és -2 lett az értéke, ezért a baloldali vezetőtől <u>2 cm-rel jobbra</u> lesz 0 a mágneses térerősség.

<u>Megjegyzés:</u> A távolságokat azért hagyhattuk centiméterben, mert egyszerűsítés után csak ők maradtak benne az egyenletben.