Valószínűségszámítás 2. vizsga megoldókulcs

1. Melyik lottószám lesz a legnagyobb valószínűséggel a harmadik legnagyobb kihúzott szám? Válaszát indokolja!

   Megoldás

$$\mathbf{P}\left(i \text{ a harmadik legnagyobb}\right) = \frac{\binom{i-1}{2}\binom{90-i}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{(i-1)(i-2)}{2} \cdot \frac{(90-i)(90-i-1)}{2}}{\binom{90}{5}} \text{ (8 pont)}$$

   akkor maximális, ha $(i-1)(i-2)(90-i)(89-i)$ maximális. A számtani és mértani közép közötti összefüggésből:

$$(i-1)(90-i) \le \left(\frac{89}{2}\right)^2$$

   És $=$ akkor van, ha

$$\begin{aligned} i-1 &= 90-i \\ 2i &= 91 \end{aligned}$$

   Ugyanígy a másik két tényezőre:

$$(i-2)(89-i) \le \left(\frac{87}{2}\right)^2$$

   És $=$ akkor van, ha

$$\begin{aligned} i-2 &= 89-i \\ 2i &= 91 \end{aligned}$$

   (5+5 pont)
   Mivel i egész, a keresett valószínűség maximális, ha $i = 45$ vagy $i = 46$. (2 pont)

2. Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Ezek közül vegyük azt, amelyik legtávolabb esik az origótól. Jelölje X ezt a legnagyobb távolságot. $\mathbf{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) =?$

   Megoldás

   A 10 pont origótól való távolsága legyen rendre $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Annak a valószínűsége, hogy egy pontnak az origótól való távolsága $\le 1/2$:

$$\mathbf{P}\left(X_i < \frac{1}{2}\right) = \frac{1/2 \text{ sugarú negyedkör területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{\frac{1}{2^2}\pi\frac{1}{4}}{1} \approx 0.19635 \text{ (6 pont)}$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}\left(X<\frac{1}{2}\right)=\mathbf{P}\left(\max\{X_i\}<\frac{1}{2}\right)=\mathbf{P}\left(X_1<\frac{1}{2},X_2<\frac{1}{2},\ldots,X_{10}<\frac{1}{2}\right)= \text{ (6 pont)}$$

A függetlenség miatt:

$$=\mathbf{P}\left(X_1<\frac{1}{2}\right)\cdot\mathbf{P}\left(X_2<\frac{1}{2}\right)\cdots\mathbf{P}\left(X_{10}<\frac{1}{2}\right) \text{ (6 pont)}$$

$$=\mathbf{P}\left(X_1<\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{\pi}{16}\right)^{10}\approx 8.5174\cdot 10^{-8} \text{ (2 pont)}$$

3. Legyen $X\in U(0,2)$ és $Y=\ln\frac{1}{X}$. Számolja ki $\mathbf{E}Y$-t és $\boldsymbol{\sigma}^2Y$-t!

Megoldás

$f_X(t)=\frac{1}{2}$, ha $0<t<2$. (2 pont)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y &= \int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\cdot f_X(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^2\ln\left(t^{-1}\right)dt= \text{ (2 pont)}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{u^2}\ln u\,du=\left[-\frac{1}{2u}\ln u-\frac{1}{2u}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty}=\\ &= -\ln(2)+1\approx 0.30685 \text{ (6 pont)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2\cdot f_X(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^2\ln^2\left(t^{-1}\right)dt= \text{ (2 pont)}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{u^2}\ln^2 u\,du=\left[-\frac{1}{2u}\ln^2 u\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty}+2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{u^2}\ln u\,du=\\ &= (\ln(2))^2+2-2\ln(2)\approx 1.0942 \text{ (6 pont)}\end{aligned}$$

$$\sigma^2Y=\mathbf{E}Y^2-(\mathbf{E}Y)^2=(\ln(2))^2+2-2\ln(2)-(-\ln(2)+1)^2=1 \text{ (2 pont)}$$

4. Legyenek $X\in E\left(\frac{1}{2}\right)$ és $Y\in E\left(\frac{1}{3}\right)$ függetlenek. Mennyi $\mathbf{P}(Y<X)$?

Megoldás

$f_X(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$, $t>0$ (2 pont)
$f_Y(t)=\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}$, $t>0$ (2 pont)

$$\begin{aligned}f_{Y-X}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}f_Y(t+u)\,f_X(u)\,du= \text{ (4 pont)}\\ &= \int_{\max\{-t,0\}}^{\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(t+u)}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}du=\\ &= \begin{cases}\frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}t} & \text{ha } -t\geq 0\\ \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{3}t} & \text{ha } -t<0 \quad \text{(6 pont)}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(Y < X) = \mathbf{P}(Y - X < 0) = \text{ (3 pont) } \int_{-\infty}^{0} f_{Y-X}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{5} e^{\frac{1}{2}t} dt = \frac{2}{5} \text{ (3 pont)}$$

5. 99%-os valószínűséggel szeretnénk garantálni, hogy 1000 pénzfeldobásból legalább n-szer fejet kapjunk. Hogyan válasszuk meg a lehető legnagyobb n-et, ha a fejdobás valószínűsége $p = \frac{1}{2}$? ($\Phi(2.327) = 0.99$)

   Megoldás

   Legyen $X_i = 1$ ha az i. feldobás írás, 0 különben.
   $m = 1000$

   A kérdés az, hogy mekkora legyen n, hogy

   $$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i < m - n\right) = 0.99 \text{ (5 pont)}$$

   A centrális határeloszlás tételből:

   $$\Phi(t) \approx \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i - mp}{\sqrt{m}p(1-p)} < t\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i < t\sqrt{m}p(1-p) + mp\right) = 0.99 \text{ (10 pont)}$$

   Azaz $t = 2.327$, és

   $$m - n = t\sqrt{m}p(1-p) + mp \text{ (3 pont)}$$

   Megoldva n-re $n \approx 481.603$ jön ki, azaz $n = 481$. (2pont)