

2. Minimálautomata, reguláris kifejezés

1. Legyen  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  a 011 részsztót tartalmazó szavakból álló nyelv.

- (a) Ekvivalensek-e az alábbi szópárok: 0 és 1, 000 és 0, 0011 és 0111011
- (b) Hány ekvivalenciaosztály van  $L$ -re nézve és mik ezek?

*Megoldás:*

(a)  $0 \not\sim 1$ , mivel  $x = 0$  és  $y = 1$  esetén  $z = 11$  választással  $xz = 011 \in L$  és  $yz = 111 \notin L$ .  
 $000 \sim 0$ , mivel ha  $x = 000$  és  $y = 0$ , az  $yz \in L$  pontosan akkor teljesül, ha vagy  $z \in L$  vagy  $z$  első két karaktere 11. A feltétel  $x$ -re is igaz, hiszen ennek a két kezdő 0 karaktere nem lehet egyetlen 011 részsztónak sem a része.

$0011 \sim 0111011$ , mivel a pár mindkét tagjában már szerepel a 011 részsztó, így ezek, és minden folytatásuk is  $L$ -ben van.

(b) Négy osztály van.

A 011 osztálya a nyelv szavaiból áll – ezek minden folytatása is  $L$ -ben van.

A 01 osztálya az összes 01-re végződő szó, amiben nincs 011 – ezek mindegyikéből csak úgy kaphatunk  $L$ -beli szót, hogy vagy 1-gyel folytatjuk, vagy  $L$ -belit fűzünk hozzá.

A 0 osztályába tartozik az összes 0-ra végződő szó, amiben nincs 011 – ezek mindegyikéből csak úgy kaphatunk  $L$ -beli szót, hogy vagy 11-gyel folytatjuk, vagy  $L$ -belit fűzünk hozzá.

Az 1 osztályába tartozik az összes 11-re végződő szó, amiben nincs 011, továbbá az 1,  $\varepsilon$  is – ezekből mindegyikéből csak úgy kaphatunk  $L$ -beli szót, ha  $L$ -belit fűzünk hozzá.

Mivel ezek lefedik az összes esetet, több osztály nincs. (Ezek megfelelnek a minimálautomata 4 állapotának.)

2. Legyen  $\Sigma = \{a, b\}$  és  $L \subseteq \Sigma^*$ . Tudjuk, hogy az alábbi szópárok ekvivalensek:  $\varepsilon \sim a$ ,  $a \sim bb$ ,  $bab \sim baba$  valamint, hogy  $\varepsilon \notin L$ ,  $b \in L$ ,  $ba \notin L$ ,  $baba \in L$ .

Legalább hány ekvivalenciaosztályba oszthatók a szavak? Minimálisan hány állapota kell legyen egy ilyen tulajdonságú  $L$  nyelvet elfogadó DVA-nak? Adjon meg egy minél kevesebb állapotú teljes DVA-t!

*Megoldás:* Mivel  $\varepsilon \notin L$  és  $b \in L$ , ezért  $\varepsilon \not\sim b$ , így legalább két osztály kell, legyenek ezek  $A_0$  és  $A_1$ , és legyen  $\varepsilon \in A_0$   $b \in A_1$ . Ekkor  $A_1 \subseteq L$  és az ekvivalenciák miatt tudjuk, hogy  $a, bb \in A_0$ .

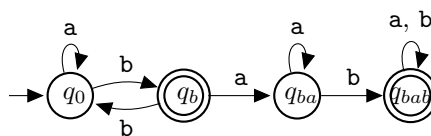
Nézzük most a  $ba$  szót. Mivel  $ba \notin L$ , ezért  $ba \notin A_1$ . Megmutatjuk, hogy  $ba \notin A_0$ , azaz egy harmadik osztály tagja. Tegyük fel, hogy  $ba \in A_0$ . Ekkor a  $\varepsilon \sim ba$  ekvivalencia miatt  $b \sim bab$ , és ezért  $ba \sim baba$  is teljesül, ami a  $bab \sim baba$  feltétel miatt azt adja, hogy  $b \sim ba \sim \varepsilon$ , azaz  $b \in L$ . Ez pedig ellentmond a feltételnek.

Tehát  $A_0$  és  $A_1$  mellett biztos van még egy osztály,  $ba \in A_2$ .

Mivel ekvivalens a  $baba$  szóval, ezért  $bab \in L$ . Így biztos, hogy nincs az  $A_0$  és  $A_2$  osztályokban. De vegyük észre, hogy  $A_1$ -ben sem lehet benne, hiszen akkor  $b \sim bab$  miatt  $ba \sim baba$  is teljesülne, ami ellentmondana a feltételeknek, hogy  $ba \notin L$  és  $baba \in L$ .

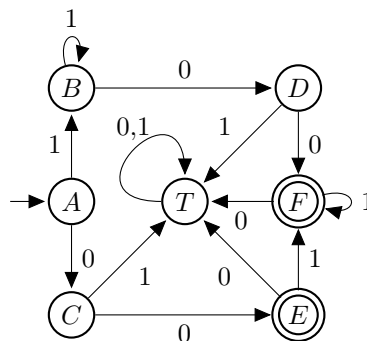
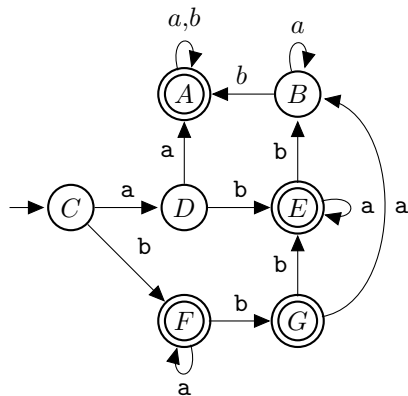
Ezzel azt láttuk, hogy 4 osztály szükséges, ami azt is jelenti, hogy minden teljes DVA-nak, ami a feltételeknek megfelelő nyelvet fogad el van legalább 4 állapota.

Most mutatunk egy 4 állapotú teljes DVA-t egy ilyen  $L$  nyelvre, ami igazolja, hogy van olyan a feltételeknek megfelelő nyelv, aminél több osztályra nincs szükség.



3. Mindkét megadott automatára döntse el, hogy abban az automatában ekvivalensek-e az alábbi állapotok?

- (a) A és D
- (b) A és B
- (c) B és C



*Megoldás:* Mindegyik esetben azt kell eldönteni, hogy van-e olyan szó, amit a megadott állapotokból indítva a pár egyikénél elfogadó, a másikonál elutasító állapotba vezet.

(a) Mindkét esetben  $A \not\sim D$ :

Az első automata esetében az üres szó jó lesz, hiszen  $A$  elfogadó és  $D$  nem.

A második automatánál az üres szó még nem jó, de az egyetlen 0-ból álló szó már igen, mert  $A$ -ból a nem elfogadó  $C$ -be,  $D$ -ből pedig az elfogadó  $F$ -be visz.

(b) Az első automatánál nem ekvivalensek, a másodikonál igen:

Az első automata esete most is egyszerű, az egyik állapot elfogadó, a másik nem, tehát  $A \not\sim B$ .

A második automatánál az üres szó nyilván nem jó, mivel egyik állapot sem elfogadó. Vegyük észre, hogy a  $\delta(A,1) = \delta(B,1)$  feltételből az következik, hogy azok a szavak sem jók, melyeknek az első karaktere 1, hiszen ezekre az első lépés után a két számítási út megegyezik. A 0 sem jó, hiszen ezzel az egyaránt nem elfogadó  $C$ , illetve  $D$  állapotba kerülünk. A 01-gyel kezdődő szavak mindkét esetben a  $T$  állapotban érnek véget. A 00 szó sem megfelelő, mert ez mindkét esetben elfogadó állapotba vezet ( $E$ , illetve  $F$ ). Amennyiben kettőnél hosszabb, 00 kezdetű szavunk van, a következő karakterrel azonos állapotba kerül a két számítási út (és persze innen már együtt is marad).

Ezzel azt láttuk, hogy  $A \sim B$  a második automata esetében, hiszen nincs olyan szó amire az egyik állapotból elfogadóba a másikonál elutasítóba kerülnénk.

(c) Egyiknél sem ekvivalensek:

Az első automatánál az  $aa$  szó az egyik esetben az  $A$  elfogadó, a másik esetben a  $B$  elutasító állapotba vezet.

A második automatánál pl. a 0-val az egyik esetben a  $D$  nem elfogadó, a másik esetben az  $E$  elfogadó állapotba lépünk.

4. Az előző feladat automatáiból a tanult módon készítse el a minimálautomatáikat!

*Megoldás:* Két csoporttal, a nem elfogadók és az elfogadók csoportjával kezdjük, majd minden állapotra megnézzük, hogy ezek közül az ábécé betűi hatására melyikbe megy.

Az bal oldali automatánál ez így alakul:

	I			II			
	$B$	$C$	$D$	$A$	$E$	$F$	$G$
a	I	I	II	II	II	II	I
b	II	II	II	II	I	II	II

A nem homogén osztályokat szétbontjuk, és újra megvizsgáljuk az átmeneteket

	I		II	III		IV	V
	$B$	$C$	$D$	$A$	$F$	$E$	$G$
a	I	II	III	III	III	IV	I
b	III	III	IV	III	V	I	IV

Megint felbontjuk a nem homogén osztályokat, és utána azt kapjuk, hogy az eredeti automata minden állapota külön ekvivalencia osztályba tartozik. Azaz az automata már minimális volt.

A jobb oldali automatára ugyanez:

	I					II	
	A	B	C	D	T	E	F
0	I	I	II	II	I	I	I
1	I	I	I	I	I	II	II

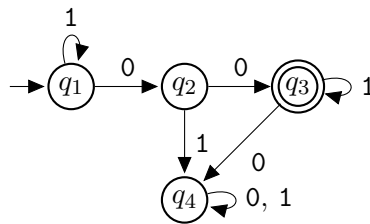
A nem homogén osztályokat szétbontjuk, és újra megvizsgáljuk az átmeneteket

	I			II		III	
	A	B	T	C	D	E	F
0	II	II	I	III	III	I	I
1	I	I	I	I	I	III	III

Az első csoport még nem homogén, kell még egy lépés:

	I		II		III		IV
	A	B	C	D	E	F	T
0	II	II	III	III	IV	IV	IV
1	I	I	IV	IV	III	III	IV

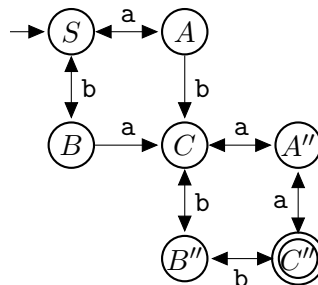
Ezek szerint a minimálautomata:



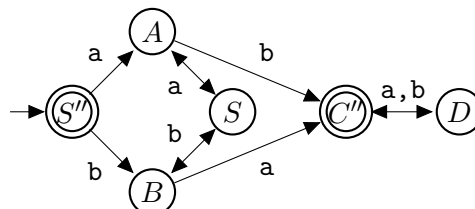
5. Legyen  $\Sigma = \{a,b\}$  és  $L \subseteq \Sigma^*$  álljon azokból a szavakból, melyekben az a-k száma és a b-k száma is páratlan. Adjon minimálautomatát az  $L^2$  és  $L^*$  nyelvekre!

*Megoldás:* Az  $L$ ,  $L^2$ ,  $L^*$  nyelvekre már adtunk VA-t az 1. feladatsorban. Most ezekből az utóbbi kettőt kell minimalizálni. Illetve, még előtte ki kell küszöbölni az  $\varepsilon$ -átmenetet és determinisztikussá kell tenni!

A végeredmény  $L^2$  esetében



A minimálautomata  $L^*$ -ra:



6. Legyen  $\Sigma = \{a,b\}$  és  $L \subseteq \Sigma^*$  álljon azokból a nem üres szavakból, melyekben van páratlan blokk. Adjon minimálautomatát az  $L^*$  nyelvhez!

*Megoldás:* Az 1. feladatsorban már adtunk rá DVA-t. Az ottani 1. megoldás konstrukciójának eredménye egy 9 állapotú teljes DVA volt, amiben minden állapot elfogadó. Ha alkalmazzuk erre a minimalizáló eljárást, akkor megkapjuk a 2. megoldásban kitalált, egyetlen állapotú DVA-t.

7. Igaz-e, hogy ha az  $L$  nyelvhez tartozó minimálautomatából a tanult konstrukció szerint készítünk véges automatát a komplementer  $\bar{L}$  nyelvhez, akkor az így kapott automata minimális lesz?

*Megoldás:* Igaz, mert

**1. változat:** ugyanazok az ekvivalenciaosztályok az  $L$ -re, mint az  $\bar{L}$ -re.

**2. változat:** ha az így kapott automata minimalizálásakor csökkenne az állapotok száma, akkor ebben megváltoztatva az elfogadást–nem elfogadást, kisebb automatát kapnánk az eredeti  $L$  nyelvre, ami ellentmond annak, hogy az  $L$  minimálautomatájából indultunk ki.

8. Álljon az  $L \subseteq \{a,b\}^*$  nyelv azokból a szavakból, melyekben minden  $a$ -blokk páratlan hosszú. Adjon  $L$ -hez reguláris kifejezést!

*Megoldás:* A páratlan hosszú blokkok így írhatók fel:  $a(aa)^*$ . Amire vigyázni kell, hogy két ilyen blokk közé kerüljön legalább egy  $b$ , mert különben összeolvadnak egy páros blokká. Továbbá, hogy a szó elején és végén állhat  $b$  is, de lehet  $a$ -blokk is. Tehát ez jó lesz:  $b^* (a(aa)^* bb^*)^* (\varepsilon + a(aa)^*)$ .

9. A  $(0+1)^*01(0+1)^* + 1^*0^*$  reguláris kifejezés által meghatározott nyelvhez adjon DVA-t!

*Megoldás:* Követhetjük a tanult konstrukció lépéseit (a végén a kapott automatát determinizálni is kell!), de mivel a feladat szövege ezt nem kéri, inkább gondolkodjunk...

A reguláris kifejezés első tagja azokat a szavakat írja le, amiben szerepel a 01 részszó. Ami ebben nem szerepel az vagy üres, vagy csak egyféle karakterből áll, vagy néhány 1-t követ néhány 0. Ezeket együtt leírja az  $1^*0^*$  reguláris kifejezés. Azaz a feladatban megadott reguláris kifejezéshez tartozó nyelv a  $\{0,1\}^*$ , amihez az egyetlen állapotú,  $\delta(q,0) = \delta(q,1)$  állapotátmenetű DVA, ahol  $q$  a kezdő és egyben az elfogadó állapot is.

10. Legyen  $\Sigma = \{0,1\}$ . Az  $M$  véges automata állapotai  $Q = \{1,2,3\}$ , ezekből az 1 a kezdőállapot,  $F = \{2,3\}$  az elfogadó állapotok,  $\delta(i,0) = i$ ,  $\delta(1,1) = 2$ ,  $\delta(2,1) = 3$ ,  $\delta(3,1) = 1$ .

(a) Mi az  $M$  által elfogadott nyelv?

(b) Adja meg az  $R(i,j,0)$  reguláris kifejezéseket!

(c) A tanult eljárást használva adjon meg az  $L(M)$  nyelvhez egy reguláris kifejezést!

*Megoldás:* (a)  $L(M) =$  az 1-k száma nem osztható 3-mal.

(b)  $R(i,i,0) = \varepsilon + 0$ ,  $R(i,i+1,0) = 1$ ,  $R(i,i+2,0) = \emptyset$ . (Az összeadást mod 3 kell érteni.)

(c)  $R(i,j,1) = R(i,j,0) + R(i,1,0)R(1,1,0)^*R(1,j,0) = R(i,j,0) + R(i,1,0)^*R(1,j,0)$ , ami egyszerűsítve:

$i \setminus j$	1	2	3
1	$0^*$	$0^*1$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\varepsilon + 0$	1
3	$10^*$	$10^*1$	$\varepsilon + 0$

$R(i,j,2) = R(i,j,1) + R(i,2,1)R(2,2,1)^*R(2,j,1) = R(i,j,1) + R(i,2,1)0^*R(2,j,1)$ , ami egyszerűsítések után:

$i \setminus j$	1	2	3
1	$0^*$	$0^*10^*$	$0^*10^*1$
2	$\emptyset$	$0^*$	$0^*1$
3	$10^*$	$10^*10^*$	$\varepsilon + 0 + 10^*10^*1$

$R(i, j, 3) = R(i, j, 2) + R(i, 3, 2)R(3, 3, 2)^*R(3, j, 2) = R(i, j, 2) + R(i, 3, 2)(0 + 10^*10^*1)^*R(3, j, 2)$ , amiből  
a nyelv  $R(1, 2, 3) + R(1, 3, 3) = R(1, 2, 2) + R(1, 3, 2) + R(1, 3, 2)(0 + 10^*10^*1)^*(R(3, 2, 2) + R(3, 3, 2)) =$   
 $0^*10^* + 0^*10^*1(0 + 10^*10^*1)^*(10^*10^* + \varepsilon)$ .

.....