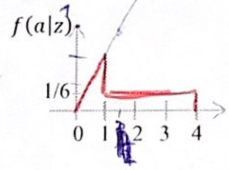
Méréselmélet 1. zárthelyi **2022. március 21.** **(100 perc)**

1. N zajos megfigyelésre alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában a $sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ vagy a $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ diszkrét időfüggvényű jel van-e jelen? A zaj additív, Gauss eloszlású, nulla várható értékű, $\sigma_w = 0.5$ szórású fehér zaj. H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy a $sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.9$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy a $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.1$. A költségek: $C_{01} = C_{10} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját, és a hozzátartozó döntési küszöb értékét (max. 5 pont)! Számítsa ki az előfeldolgozás súlytényezőit és a döntési küszöb numerikus értékét $N = 3$, és $n = 0,1,2$ diszkrét időpontokban vett minták esetére (max. 3 pont)!

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) értékét! Határozza meg az $\hat{a}_{MS}$ becslő varianciáját (max. 3 pont)?

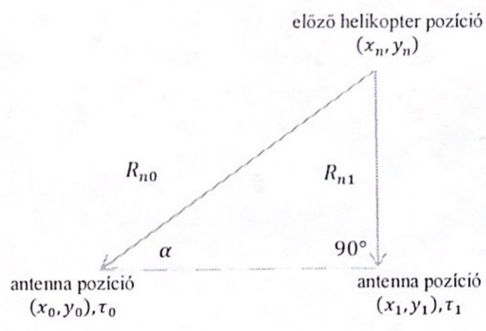


3. Additív, Gauss eloszlású zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k,\ k = 0,1,\ldots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, várható értéke nulla, de a szórása ismeretlen. Torzítatlan-e a következő becslés (max. 3 pont)? Ha igen, akkor mekkora a torzítás (max. 1 pont)?

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \widehat{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k \\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z_k - \hat{A}\right)^2 \end{bmatrix}$$

4. Egy kételemű zajsorozat kovariancia mátrixa $C = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Vezesse le, hogy milyen tulajdonságú mátrixszal kell transzformálni a zajsorozatot, hogy a transzformált zajsorozat kovariancia mátrixa egységmátrix legyen (max. 1 pont)! Határozza meg a transzformáció mátrixának elemeit (max. 3 pont)!

5. Helikoptert követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a vízszintes irányú pozíciót, mert a helikopter emelési feladatot lát el, tehát csak a magasság változás becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:



$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. $\boldsymbol{a} = [x_s \quad y_s]^T$. Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0,1,\cdots,N-1$, adatai.

$$R_k \cong R_{nk} + \left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s = x_n} \delta x_s + \left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s = y_n} \delta y_s = R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s,$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) - cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1) - sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1}) - cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1}) - sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} + \boldsymbol{w'} = \boldsymbol{U a'} + \boldsymbol{w'},$$

$$\boldsymbol{w'} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{N-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1}\end{bmatrix} = \boldsymbol{Aw}, \quad \boldsymbol{C_{w'}} = E[\boldsymbol{A w w' A^T}] = \sigma_w^2[\boldsymbol{AA^T}].$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}}' = \begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} = [\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{C}_{\widehat{a}'} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a függőleges irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.05\mu s$, $z_1 = -0.5\mu s$ és $\alpha = 30°$ (max. 4 pont)! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép tényleges magasságát is meg tudjuk határozni? (max. 1 pont)

6. A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, ismert $\boldsymbol{C_w}$ kovariancia mátrixú zaj, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. $N = 2$ esetére, amikor $\boldsymbol{C_w} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1\end{bmatrix}$, adja meg A MVU becslőjének és a becslés varianciájának explicit kifejezését!
   Fontolja meg, hogy tudja-e használ a következő összefüggéseket:
   $$\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},\ cov(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$
   (max. 4 pont)!

7. Írja fel egy valós időben működőképes, elsőrendű, diszkrét idejű, lineáris rendszer differencia-egyenletét! Származtassa a kimenet számításának jelfolyamgráfját, és állítsa elő annak azt a változatát, amely csak egyetlen késleltető elemet tartalmaz! Írja fel a rendszer állapotváltozós leírását is! Adja meg az állapotváltozós leírást a
   $$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-1}}$$
   átviteli függvényű rendszer esetére (max. 4 pont)! Tervezzen megfigyelőt, amely képes ezt a rendszert véges lépésben követni, és írj fel a megfigyelő átviteli függvényét is (max. 3 pont)!

Emlékeztető/Segítség:

A csatornakarakterisztika színes Gauss zaj esetén (a matematikusoktól átvett eredmény):

$$f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})},$$

A zárthelyivel maximum 40 pont érhető el. A zárthelyit azok teljesítik, akik legalább 16 pontot érnek el.

Jó munkát!