ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2001. dec. 20.**

Műszaki Informatika szak — A és B kurzus — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 2^{2n+1}}{6^{n-1} + 5} = ?$

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{2n+1}}{6^{n-1} + 5}$$

Megoldás:

a) $$a_n = \frac{3^n + 2\cdot 4^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n + 5} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{6} + 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+0}{\frac{1}{6}+0} = 0$$

b) $$a_n < \frac{4^n + 2\cdot 4^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$18\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q = \frac{2}{3}\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

2. feladat (24 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2x-1}, & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) A jobb és baloldali határértékek kiszámításával döntsön, hogy hol és milyen szakadása van a függvénynek!
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$

b) Létezik-e $f'(0)$?
Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

c) Indokolja meg, hogy a $(-\infty, 0]$ intervallumon létezik f^{-1}!
Írja fel az inverzfüggvényt, adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét!

Megoldás:

a) $$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{2x-1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}\frac{\sin(\pi x)}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,\pi = \pi \ne f(-0)$$

$\Longrightarrow$ véges ugrása van f-nek $x=0$-ban (elsőfajú szakadás).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2x-1} = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\sin(\pi x)}_{\text{korlátos}} \quad \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = 0$$

b)

$$f \text{ nem folytonos } x=0 \text{ -ban} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) \nexists$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)^2}\,\dfrac{-1}{(2x-1)^2}\,2\,, & \text{ha} \quad x<0 \\[2ex] \dfrac{\pi\, x\, \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2}\,, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases}$$

c) $f'(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, 0]$ $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton csökken itt $\Longrightarrow$ $\exists f^{-1}$

$D_f = (-\infty, 0]\,, \quad R_f = [-\frac{\pi}{4}, 0)$

$y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x-1} \longrightarrow \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{2x-1} \longrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}+1\right)$

Tehát $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}+1\right)$, $D_{f^{-1}} = R_f = [-\frac{\pi}{4}, 0)$, $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 0]$

3. feladat (10 pont)

Paraméteres megadású görbe felírhatósága $y=f(x)$ alakban, $f'(x)$ meghatározása. Írja fel és bizonyítsa be a témával kapcsolatban tanult tételeket!

Megoldás:

L. Segédlet!

4. feladat (8 pont)

A kétszer differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$x\,y^3 + 2\,y^4 - 1 = 0$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(-1)=1$.
Van-e lokális szélsőértéke illetve inflexiós pontja a függvénynek az $x=-1$ pontban?

Megoldás:

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$y^3 + x\,3\,y^2\,y' + 8\,y^3\,y' = 0$$

Behelyettesítve: $\quad x = -1,\ y = 1:$

$$y'(-1) = -\frac{1}{5} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{nincs lokális szélsőérték itt}$$

Újra deriválva:

$$3\,y^2\,y' + 3\,y^2\,y' + x\,6y\,y'\,y' + x\,3y^2\,y'' + 24y^2\,y'\,y' + 8y^3\,y'' \;=\; 0$$

Behellyettesítve: $\quad x = -1,\ y = 1,\ y' = -\dfrac{1}{5}:$

$$y''(-1) = \frac{8}{125} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{nincs inflexiós pont itt}$$

(A szükséges feltételek nem teljesültek.)

5. feladat (12 pont)*

a) $\displaystyle\int (x-3)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int (x-3)\,\mathrm{e}^{x^2-6x}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

a) Parciális integrálás:

$$\int \underset{\substack{u = x-3 \\ u' = 1}}{(x-3)} \quad \underset{\substack{v' = \mathrm{e}^{2x} \\ v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}(x-3)\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}(x-3)\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C$$

b) $f'\,\mathrm{e}^f$ alakú:

$$\frac{1}{2}\int (2x-6)\,\mathrm{e}^{x^2-6x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2-6x} + C$$

6. feladat (8 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{5x^2+10}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{5x^2+10}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

$$\text{a)}\ \int \frac{1}{5x^2+10}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{10}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{10}\,\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} + C$$

b) $\dfrac{f'}{f}$ alakú:

$$\int \frac{2x}{5x^2+10}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{10}\int \frac{10x}{5x^2+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+10\right)+C$$

7. feladat (13 pont)*

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+5\,\mathrm{e}^x+6}\,\mathrm{d}x = ? \qquad (\mathrm{e}^x = t \text{ helyettesítéssel dolgozzon!})$$

Megoldás:

$$\mathrm{e}^x := t \longrightarrow x = \ln t \longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$I \longrightarrow \int \frac{t}{t^2+5t+6}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t = \ln|t+2| - \ln|t+3| + C$$

Ugyanis $\qquad \dfrac{1}{(t+2)(t+3)} = \dfrac{A}{t+2}+\dfrac{B}{t+3}$

$$1 = A(t+3)+B(t+2) \quad\longrightarrow\quad t=-3:\ B=-1\,, \quad t=-2:\ A=1$$

Ennek megfelelően a megoldás:

$$I = \ln\left(\mathrm{e}^x+2\right) - \ln\left(\mathrm{e}^x+3\right) + C$$

8. feladat (15 pont)

a) Milyen α-ra konvergens az

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

integrál? Állítását bizonyítsa be!

b) * (5 pontos) Konvergens-e az alábbi integrál?

$$\int_0^1 \frac{\cos^2\left(x^3\right)}{\sqrt[3]{x^2}\ (x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás:

a) L. Segédlet!

b) $0 < \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2\left(x^3\right)}{\sqrt[3]{x^2}\ (x+1)^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\cdot 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$

Mivel $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$, a majoráló integrál konvergens, tehát a vizsgált integrál is konvergens.

Pótfeladat (csak az elégséges vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{4x} + 3}{5\,\mathrm{e}^{4x} + 3\,\mathrm{e}^{3x} + 7} = ?$

Megoldás:

a) $\dfrac{0}{0}$ alakú és a L'Hospital szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+25x^4}}\,10x}{\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\,6x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

b) Most a L'Hospital szabály alkalmazása nem vezet eredményre.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{4x} + 3}{5\,\mathrm{e}^{4x} + 3\,\mathrm{e}^{3x} + 7} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-3x} - 1 + 3\mathrm{e}^{-4x}}{5 + 3\,\mathrm{e}^{-x} + 7\,\mathrm{e}^{-4x}} = \frac{-1}{5}$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!