

Jelek és Rendszerek 2

Előadás jegyzet

Biró Tamás
2012/2013 ősz

Előszó

- Ez egy hallgató által írt jegyzet, hibák előfordulhatnak.
- Az oldal méret azért ilyen kicsi, mert ebook olvasóra készítettem.
- Szabadon tejeszthető, amíg nem adod ki sajátodként.
- A kidolgozásnál segítségemre volt:
 - Fodor György: Hálózatok és Rendszerek
 - Bilicz Sándor előadásain készített órai jegyzet by Zita
 - Gábor-Kondor: Kidolgozott szóbeli témakörök
- Tanulás közben érdekes mellette nézni a fent említett órai jegyzetet, ugyanis ugyanazt a gondolatmenetet követtem, továbbá ábrákat nem tettem a jegyzetbe, csak szavakkal magyaráztam.
- Óhaj, sóhaj, panasz, kívánság, kérelem, sérelem esetén: b.tomy1990@gmail.com
- Jó tanulást és sikeres vizsgát!

A. Folytonos idejű (FI) rendszerek

Ismétlés (JR1):

Lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabilis rendszer:

Ha a vizsgált rendszerünkre ezek igazak, akkor az $u(t)$ gerjesztés és a rá adott $y(t)$ válasz csak amplitúdóban és kezdő fázisban tér el egymástól, körfrekvenciában nem, vagyis:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{U} \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) &= \hat{Y} \cos(\omega t + \rho) \end{aligned}$$

megj.1: a felülvonás jelöli a csúcértéket.

megj.2: lineáris: ha $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$ és $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$, akkor $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \rightarrow c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

invariáns: ha $u(t) \rightarrow y(t)$, akkor $u(t + T) \rightarrow y(t + T)$

megj.2: ezt talán úgy könnyű elképzelni, hogy ha én pofán vágog valakit egyszer, akkor rohadtul vissza fog ütni, de jó fej, ezért ő is csak egyszer teszi ezt meg. Viszont más erővel fog ütni, és a karját is más szögből fogja indítani, viszont az ütés sebessége változatlan marad.

Komplex leírása a függvénynek:

Először is le tudom írni komplex fazorral, de ez csak a csúcsértéket és a kezdőfázist fogja tartalmazni:

$$u(t) \leftrightarrow \bar{U} = \hat{U}e^{j\varphi}$$

Ha a komplett időfüggvényt akarom leírni, akkor komplex időfüggvénnyel tehetem meg, ami már az időfüggést és körfrekvenciát is tartalmazza:

$$u(t) = \text{Re}\{\hat{U}e^{j\varphi}e^{j\omega t}\}$$

megj.1: a kapcsos zárójelben lévő kifejezés a komplex időfüggvény.

megj.2: vegyük észre, hogy az első összefüggésben csak nyíl van, nem egyenlőség, vagyis az csak megfeleltetés, hogy az időfüggvényből leírható a fazor, de az maximálisan nem definiálja a függvényünket, még ismernünk kell külön a körfrekvenciát.

megj.3: a második összefüggésnél a valós rész az euler relációból következik, miszerint:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

amiből egyből látszik, hogy az eredeti függvényünket a valós rész írja le.

Átviteli karakterisztika:

Először definiáljuk az átviteli tényezőt. Az átviteli tényező a válasz és gerjesztés komplex fazorjának hányadosa. Az átviteli karakterisztika ezt az együtthatót adja meg a körfrekvencia függvényében:

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

megj.: Visszatérve a pofonos példára, az átviteli karakterisztika megadja, hogy egy adott ember ha egy adott erősségű pofont kap, mekkorát üt vissza. Akinek idegesítő a pofonos analógia, annak előre is bocsánat, gyakran fogok vele élni.

I. Periódikus állandósult állapot

A lényege ennek a támakörnek, hogy olyan speciális rendszerekkel foglalkozunk, amelyekre periódikus gerjesztést adva, kellően hosszú (néhány időállandónyi) idő után periódikus választ kapunk.

Alapvetően két féle rendszert különböztetünk meg. Tisztán szinuszos gerjesztésre tisztán szinuszos választ adó és általános periódikus gerjesztésre valami ismeretlen alakú periódikus választ adó rendszert.

Periódikus jel definiálása:

Egy jel periódikus, ha eleget tesz az alábbi kitételnek:

$$u(t) \equiv u(t + kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vagyis T periódusonként ugyanaz ismétlődik.

Kapcsolódó mennyiségek:

Alapkörfrekvencia: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

megj.1: az alapkörfrekvencia, az alapharmónikus körfrekvencia, a p-dik felharmónikus körfrekvenciája felírható $p\omega$ alakban (felharmónikusokat lásd Fourier-sorfejtésnél).

megj.2: a körfrekvenciát legkönnyebben úgy lehet elképzelni (ne aggódj, nem fogok pörgő pofonnal

analógiát vonni), hogy ugyebár a szinuszos jel a komplex fazor egyik komplex tengelyre való vetületéből áll elő (rajzold le és látni fogod). A körfrekvencia pedig az a körfrekvencia, amelyen gyorsan ez a fazor forog.

Állandó összetevő (U_0): ez gyakorlatilag a jel offsetje. Ha van ilyen állandó összetevőnk, akkor a jel alak nem változik ahhoz képest, mintha nem lenne, csak eltolódik függőlegesen U_0 értékkel. U_p adja a p-dik felharmónikus amplitudóját.

1. Fourier-sorfejtés:

a.) Alapgondolat: Ennél a borzalomnál az alapgondolat a következő. Egy periódikus jel felírható szinuszos jelek szuperpozíciójaként (összegeként). Ennek az az előnye, hogy bármilyen periódikus folyamat vizsgálata visszavezethető szinuszos folyamatok vizsgálatára, ami jóval egyszerűbb és kézzel foghatóbb. Ez matematikailag a következőképp néz ki:

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^N (U_p^A \cos(p\omega_0 t) + U_p^B \sin(p\omega_0 t))$$

Ez az N-ed rednű Fourier-polinom, ahol U_p^A és U_p^B a Fourier-együtthatók. N tetszőlegesen nagy egész szám, amiből következik, hogy végtelen sok jel összegéből áll elő a tényleges jelünk. N itt egy elegendően nagy

érték, amit mi határozunk meg, függően attól, hogy mennyire pontos közelítést kívánunk elérni.

b.) Együtthatók megválasztása:

A célunk, hogy az $u_N(t)$ közelített függvény hibája az eredeti jelhez képest minimális legyen. Ez matematikailag azt jelenti, hogy a $2N+1$ együtthatót (állandó összetevő plusz N szinuszos és N koszinuszos tag) akkor tekintünk optimálisnak, ha a

$$E_n \equiv \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - u_N(t)]^2 dt$$

négyzetes középhiba minimális. Ennek a kritériumnak az az egyik előnye, hogy az együtthatókra formula adható, a másik pedig, hogy az együtthatók nem függnek N -től. Ami annyit jelent, hogy ha kitalálom, hogy nekem 3-ad rendű F -polinom nem elég, hanem kell nekem még egy, akkor nem kell az összes együtthatót újra kiszámolnom, hanem a már meglévők felhasználhatók. Ez a négyzetes hiba tehát minimális, ha:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \\ U_p^A &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(p\omega_0 t) dt, \quad U_p^A = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(p\omega_0 t) dt \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ennek egy rakás jó tulajdonságai vannak. Bármely intervallumra számíthatók az integrálok, ami jól jön, ha valamilyen szimmetria van a jelben. Minél nagyobb N számot választunk, a négyzetes középhiba annál jobban csökken, vagyis $E_n \rightarrow 0$, ha $N \rightarrow \infty$. Viszont, ha $u(t)$ nem folytonos, akkor a szakadási helyek környezetében a hiba nem csökkenthető egy bizonyos korlát alá, ami hátrány, viszont a gyakorlatban kihasználható. Ugyanis nem fogok időt és energiát fordítani arra, hogy 15-öd rendű polinomot felírjak, ha 5 után már a hibám alig csökken. Végülis mérnökök leszünk, a mérnök meg egyszerűsít.

c.) Fourier-sor alakjai: ($N \rightarrow \infty$)

Valós alak (már volt, de leírom még egyszer):

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (U_p^A \cos(p\omega_0 t) + U_p^B \sin(p\omega_0 t))$$

Komplex alak:

$$u(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} U_p^c e^{j\omega_0 p t}$$

$$U_p^c = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-j\omega_0 p t} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; U_{-p}^c = (U_p^c)^*$$

Mérnöki valós alak:

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p^c \cos(p\omega_0 t + \varphi_p)$$

$$U_p^c = \sqrt{(U_p^A)^2 + (U_p^B)^2} = 2|U_p^c|, \varphi_p = \arg(U_p^c)$$

2. Periódikus jelek jellemzői:

a.) Egyszerű középérték:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

b.) Abszolút középérték:

$$U_a = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

c.) Négyzetes középérték (effektív érték):

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

megj.: definíció szerint a feszültség/áram effektív értéke az az egyen feszültség/áram, amelyet egy ellenállásra ráadva ugyanaz a hatásos teljesítmény disszipálódik, mint az eredeti jel esetén.

d.) Alaktényezők:

Forma~: $k_f = \frac{U_{eff}}{U_a}$

Csúcs~: $k_m = \frac{U_{max}}{U_{eff}}$

e.) Jellemzők Fourier-sorból (mérnöki alakból):

Egyszerű középérték: U_0

Effektív érték: $U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p^2}$

Torzítási tényező:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{p=2}^{\infty} U_p^2}}{U_{eff}}$$

Gibbs-jelenség:

Mint már korábban említettem, ha a jelnek szakadása van, akkor a négyzetes középhibánk egy bizonyos értéknél nem lehet kisebb. Erre ad példát a Gibbs-jelenség, ami akkor következik be, ha egy véges ugrás van a jelben. Ilyenkor a fellépő túllövés nem lehet kisebb, mint magának az ugrásnak a 9%-a, bármennyire is közelítjük meg a jelet F-sorával.

3. Rendszer-analízis Fourier-sorral:

Itt az idő egy kis pofonos magyarázatra. Hiányzott, mi? Szóval ezt az egész Fourier-soros felbontást úgy lehet elképzelni, hogy verekszik két ember. Az egyik adja a gerjesztést, a másik pedig reagál az ütésekre valamilyen válasszal. A probléma az, hogy mindkét embernek végtelen végtagja van, amivel verekszik, és fogalmunk sincs, hogy éppen melyik végtaggal mit csinál. A célunk az, hogy vesszük a gerjesztő emberünknek N darab végtagját és arról el tudjuk mondani, hogy milyen gyorsan üt, mekkorát és az első ütet honnan indította. És mivel tudjuk az átviteli karakterisztikát, így testrészenként meg tudjuk

mondani, hogy a visszaütő emberünk egy adott testrésztől elszenvedett ütés után ugyanazzal a testrésszel hogy üt vissza. Na ezután az algoritmusunk matematikailag:

1. Átviteli karakterisztika kiértékelése a meghatározott F-sorunk minden körfrekvenciájára:

$$H(j\omega)_{\omega=0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, N\omega_0}$$

2. A válasz komplex fázorjainak meghatározása:

$$\bar{Y}_p = \bar{U}_p \cdot \overline{H(jp\omega)}$$

3. Időfüggvény felírása (szuperpozíció linearitás miatt):

$$y(t) = Y_0 + \sum_{p=1}^N Y_p \cos(p\omega_0 t + \varphi_p)$$

2. Kétpólus teljesítmények kiszámítása:

Mielőtt definiálnánk matematikailag a teljesítményt, definiáljuk a feszültség és áram időfüggvényét a következőképp:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega_0 t + \rho_p) \\ i(t) &= I_0 + \sum_{p=1}^{\infty} I_p \cos(p\omega_0 t + \rho_p - \varphi_p) \end{aligned}$$

ahol φ_p az $u(t)$ és $i(t)$ közötti fáziskülönbség

a.) Pillanatnyi teljesítmény:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Fourier-soros alakra való átírás:

$$p(t) = U_0 I_0 + U_0 \sum_{p=1}^{\infty} I_p \cos(p\omega_0 t + \rho_p - \varphi_p) + \\ I_0 \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega_0 t + \rho_p) + \\ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \cos(p\omega_0 t + \rho_p) \cos(p\omega_0 t + \rho_p - \varphi_p)$$

b.) Hatásos teljesítmény:

A fenti kifejezés elég undorító, de háliszennek ritkán van szükségünk a teljesítmény időfüggvényére. Sokszor elég tudnunk a hatásos teljesítményt, ami a teljesítmény egy periódusára vett idő beli átlaga.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Fourier-soros alakra való átírás:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega_0 t + \delta) dt = 0, \delta \text{ tetszőleges} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega_0 t + \delta_p) \cos(p\omega_0 t + \delta_q) dt = \begin{cases} 0, p \neq q \\ \frac{1}{2}, p = q \end{cases} \\ \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega_0 t + \rho_p) \cdot \\ \cdot \cos(p\omega_0 t + \rho_p - \varphi_p) dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi_p) \\ P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \cos(\varphi_p)$$

Na csak hogy értsük mi történt itt az előbb. Ugye integrálni lehet tagonként szépen. Először bebizonyítottuk, hogy a hatásos teljesítmény egyenösszetevője megegyezik a pillanatnyi teljesítmény egyenösszetevőjével. Ez egyszerű integrálás. Utána vettük a pillanatnyi teljesítmény koszinuszos összetevőit, ami mivel ugyanannyit tölt a pozitív tartományban, mint negatívban, így az általa lefedett terület nulla, tehát azok nem számítanak a végső formulában. Utána kiintegráltuk, a koszinus négyzetes tagot, ami adta a fent lévő formulát. A kettő összege pedig kiadta a végső hatásos teljesítményt. Ennél többet szerintem nem kell tudni erről a levezetésről. Könyvben még ennyi sincs.

II. Analízis a frekvenciatartományban

Az alapgondolat az, hogy igaz a hálózati egyenletek felírását időtartományban érdemes elvégezni, sok esetben (számítástechnikában, méréstechnikában) érdekesebb az időfüggvényhez rendelt másik függvénnyel leírni a változókat és úgy felírni az egyenleteket. Erre ad megoldást a frekvenciatartománybeli leírása a jeleknek, ami sokkal könnyebbé tesz bizonyos rendszerek (pl. szűrők) leírását. Az itt elvégzett számítások után igaz könnyen vissza tudjuk alakítani a függvényünket időtartománybeli függvénnyé, de sok esetben az információkat is könnyen megszerezhetjük a frekvenciatartománybeli függvényből. Ennek a módszernek nagy előnye, hogy az időtartománybeli differenciál egyenletekből algebrai egyenletek lesznek, amit jóval egyszerűbb megoldani. Gyakorlatilag a Fourier-sorfejtésnél is ezt csináltuk, hiszen a jelünket szét szedtük adott frekvenciájú szinuszos jelekké. Itt ennek a módszernek az általánosítása fog megtörténni, és az egész jelet a frekvencia függvényében írjuk le.

1. Fourier-transzformáció:

a.) Algebrai definíció:

Legyen a periódikus jel Fourier sora a következő:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c \cdot e^{j\omega_k t}$$

$$X_p^c = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

A Fourier-sorfejtésnek az a problémája, hogy nem periódikus jelnél nem működik. Ekkor az $x(t)$ aperiódikus jelhez olyan $x(t,T)$ periódikus jelet rendelünk, ahol $[-T/2, T/2]$ intervallumon a megegyezik az $x(t)$ jellel, vagyis a jelből levágunk egy darabot és azt ismételjük. Viszont a T periódus időt a végtelenhez tartatva megkapjuk az eredeti jelet. Ezután a $TX_k^c \equiv X(j\omega_k)$ megfeleltetés és T végtelenbe tartatása után megkapjuk az új Fourier-együtthatót.

$$X(j\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

Ennek segítségével már előállítható az eredeti jel Fourier-sora.

$$x(t, T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

Ami T növekedésével következő integrálba megy át, aminek annál kisebb a hibája, minél nagyobb T .

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ez a jel inverz Fourier-transzformáltja.

Tehát összegezve a Fourier-transzformáció:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

megj.1: az első összefüggéssel a jel spektruma, csak akkor számítható, ha a jel abszolút vagy négyzetesen integrálható.

megj.2: Ha az első összefüggéssel számított spektrumot visszahelyettesítjük a második összefüggésbe, akkor kapunk egy $x'(t)$ jelet, ami megegyezik $x(t)$ -vel, ha a jel folytonos. Ha $x(t)$ szakadós, akkor a bal és jobb oldali határérték számtani közepét adja ki. Ennek egyik szemléletes mellékhatása, hogy ha egy négyszög jelet fejtünk Fourier-sorba és valamilyen programmal kirajzoltatjuk, akkor bárhány rendő sorbafejtését is végezzük el a jelnek, az ugrásnál a közelítő jelünk a felénél fogja az az eredeti jel fel- és lefutó élet metszeni. Nézzétek meg a www.falstad.com honlapon.

Jelölés: $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega), \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t)$

b.) A Fourier-transzformáció tételei:

α) Lineáris:

$$\mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 X_1(j\omega) + c_2 X_2(j\omega)$$

β) Ha $x(t)$ valós:

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

következményei:

$$\begin{array}{l} |X(j\omega)| \quad \text{páros fv.} \\ \arg(X(j\omega)) \quad \text{páratlan fv} \end{array}$$

$\gamma 1$) Ha $x(t)$ valós, páros:

$$X(j\omega) = 2 \operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt\right\}$$

$\gamma 2$) Ha $x(t)$ valós, páratlan:

$$X(j\omega) = 2j \cdot \operatorname{Im}\left\{\int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt\right\}$$

δ) Eltolási tétel:

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = X(j\omega) e^{-j\omega T}$$

Levezetés:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - T) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega(u+T)} du = \\ &= e^{-j\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega T} X(j\omega) \end{aligned}$$

ε) Modulációs tétel (Eltolási tétel duálisa):

Ha egy $x(t)$ jellel beszorzunk egy ω_0 körfrekvenciájú szinuszos jelet, akkor az így előálló $x(t)e^{j\omega_0 t}$ komplex amplitúdó-modulált jel spektruma a jel spektrumából frekvenciatartománybeli eltolással adódik.

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega - \omega_0))$$

Ebből Euler-relációval következik az alábbi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} &= \frac{X(j(\omega + \omega_0)) + X(j(\omega - \omega_0))}{2} \\ \mathcal{F}\{x(t)\sin(\omega_0 t)\} &= \frac{X(j(\omega + \omega_0)) - X(j(\omega - \omega_0))}{2j}\end{aligned}$$

ξ) Skálázási tétel:

$$\mathcal{F}\{x(mt)\} = \frac{1}{|m|} X\left(j\frac{\omega}{m}\right), m > 0$$

$m > 1$: $x(t)$ keskenyedik, $X(j\omega)$ szélesedik.

$m < 1$: $x(t)$ szélesedik, $X(j\omega)$ keskenyedik.

μ) Derivált-tétel:

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega \cdot X(j\omega)$$

Levezetés:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-j\omega t} dt &= [x(t)e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}(-j\omega) dt &= x(\infty)e^{-j\omega\infty} - \\ x(-\infty)e^{j\omega\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt &= j\omega \cdot X(j\omega)\end{aligned}$$

θ) Konvolúció-tétel:

A konvolúció definíció szerint:

$$h(t) * u(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Ha mindkét jel abszolút integrálható, akkor igaz, hogy:

$$\mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} = H(j\omega)U(j\omega)$$

c.) Elemi jelek spektruma:

α) Négyyszögimpulzus:

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \int_{-T}^T 1e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} = 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

$T \rightarrow 0$ esetén megkapjuk a Dirac-impulzust

β) Dirac-impulzus:

A Dirac-impulzusban minden frekvenciakomponens ugyanazzal a súllyal vesz részt:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)1dt = 1$$

γ) Korlátos jel:

$$\mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega)$$

δ) Előjel függvény spektruma:

$$\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

ε) Egységugrás:

$$\mathcal{F}\left\{\varepsilon(t) = \frac{(1+\text{sign}(t))}{2}\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

ξ1) Belépő exponenciális jel:

Mivel belépő jel, lehet 0-tól integrálni.

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(\alpha+j\omega)} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

ξ2) Mindkét irányba lecsengő exponenciális jel:

Ilyenkor szét lehet szedni az integrált minusz végtelentől 0-ig és 0-tól minusz végtelenig való integrálásra, és ilyenkor $|t|$ helyére t és $-t$ kerül. Innentől viszont tudjuk, $e^{\alpha t}$ a minusz végtelenben és $e^{-\alpha t}$ a végtelenben is 0.

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha}{(\alpha+j\omega)^2}$$

μ) Szinuszos jelek:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dots = -j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

2. A spektrális leírás alkalmazása:

a.) A rendszer válaszáinak számítása:

Még mindig lineáris, invariáns, GV-stabilis rendszerekről beszélünk. Ebben az esetben a Fourier-transzformáció jól használható a válasz számítására, hiszen, mint korábban mondtuk, a differenciál egyenletekből algebrai egyenletek álnak elő. Tehát gyakorlatilag, most levezetjük a konvolúció tételt. Előzetes elmondom, hogy milyen matematikai trükkal fogunk operálni. Ugyebár az integrál olyasmi mint az összegzés. Fogjuk egy mondjuk $x(t)$ függvény nagyon kicsi dx darabkait és azt 'összegezzük' egy adott intervallumon. Ezt használjuk ki most is, mert ha az integrál jelet elhadjuk, vagyis nem összegzünk, akkor megkapjuk a kis dx darabkáinkat. Na és most maga a levezetés.

Először is előállítjuk a gerjesztést a spektrum segítségével:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a gerjesztésünk különböző frekvenciájú szinuszos komponensek szuperpozíciója:

$$du(t) = \frac{U(j\omega)d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}$$

ahol a $[\omega, \omega + d\omega]$ nagyon kicsi intervallumba eső komplex amplitúdója a jelnek $\frac{U(j\omega)d\omega}{2\pi}$. Mivel tudjuk, hogy a szinuszos gerjesztésre adott válasz kifejezhető a az átviteli karakterisztika ω körfrekvencián felvett értékének ismeretében:

$$dy(t) = \frac{Y(j\omega)d\omega}{2\pi} e^{j\omega t} = H(j\omega)du(t) = H(j\omega) \frac{U(j\omega)d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}$$

Ebből jól látszik, hogy a válasz spektruma kifejezhető az átviteli karakterisztika és a gerjesztés spektrumának ismeretében:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$$

Az átviteli karakterisztikát a következő képp tudjuk definiálni:

$$H(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Ahol $K(\omega)$ az amplitúdó-spektrum, $\varphi(\omega)$ pedig a fázis-spektrum. Ennek segítségével a válasz:

$$\begin{aligned} |Y(j\omega)| &= K(\omega)|U(j\omega)| \\ \arg(Y(j\omega)) &= \varphi(\omega) + \arg(U(j\omega)) \end{aligned}$$

Most gyakorlatilag annyit csináltunk, hogy az átviteli karakterisztikát szét szedtük komplex amplitúdó hosszának és fázisának frekvencia függvényére, és

ezzel jellemeztük külön a válasz amplitúdóját és fázisát. Ugyebár az argumentum függvény a komplex szám szögét adja meg.

b.) Sávzélességek:

α) A jel sávzélessége:

Egy jel sávzélessége azt a frekvencia intervallumot adja meg, amelyen kívül a jel amplitúdóspektruma elhanyagolható. Két féle értelmezése van:

Amplitúdó-spektrumon alapuló értelmezés:

Egy $x(t)$ jel sávzélessége az a (ω_1, ω_2) frekvenciasáv, amelyen kívül a jel $|X(j\omega)|$ amplitúdó-spektruma kisebb maximumának egy megadott részénél:

$$\boxed{\begin{aligned} |X(j\omega)| &> \sigma \cdot |X(j\omega)|_{\max} \\ 0 \leq \omega < \omega_1, \quad \omega_2 < \omega < \infty; \quad 0 < \sigma < 1 \end{aligned}}$$

megj.: gyakran szokták a $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ mennyiséget a jel sávzélességének nevezni.

β) A rendszer sávzélessége:

Az átviteli karakterisztika (ω_a, ω_b) áteresztő-sávja, illetve (ω_c, ω_d) záró-sávja az a körfrekvencia-intervallum, amelyben $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika ártáke nem kisebb, illetve nem nagyobb maximumának egy-egy előírt tört részénél.

Áteresztő-sáv:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}K(\omega)_{max} \leq K(\omega) \leq K(\omega)_{max}, \omega_a \leq \omega \leq \omega_b$$

Záró-sáv:

$$0 \leq K(\omega) \leq \eta K(\omega)_{max}, \omega_a \leq \omega \leq \omega_b; \eta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}$$

γ) Tolerancia sémák:

Először definiáljuk a szűrő fogalmát, ugyanis általában szűrő tolerancia sémájáról beszélünk. Legtágabb megfogalmazásban a szűrő olyan rendszer, melynek viselkedése előírt. Eszerint, te is amikor vizsgaidőszak van, szűrőként működsz. Viselkedésed előírt, miszerint ülsz a valagodon és tanulsz, a külső behatásokat meg, mint például a társadalom nyomását, hogy 'nem jó az neked, ha átmész a vizsgán, gyere inkább sörözni', kiszűröd, vagy a felelősség tudatot szűröd ki, és addig iszol, amíg a memóriád folytonosból diszkrétte nem válik, jó nagy mintavételezési periódusidővel.

Mi viszont ennél sokkal szűkebb megfogalmazással fogunk élni. A szűrő olyan lineáris, invariáns, GV-stabilis rendszer, amelynek $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájára, valamilyen előírás vonatkozik. Magyarul a szűrő viselkedését a frekvencia-tartományban írjuk le.

A sávzélességnél definiált mennyiségeket alkalmazva a szűrő toleranciasémája leírja, hogy mely frekvencia-intervallumon van a zárós-sávja, és melyiken az áteresztő-sávja. Ábrát a Fodor könyv 315. oldalán találtok.

c.) Alakhú átvitel:

Ha egy $u(t)$ gerjesztést, alakhűen akarunk átvinni egy lineáris, invariáns, kauzális, stabilis rendszeren, akkor az átvitel akkor ideálisan alakhű, ha:

$$y_0(t) = Cu(t - T); C > 0, T \geq 0$$

Csak, hogy ne vádoljon meg senki azzal, hogy nem csinállok mást, mint lemásolom a könyvet és kiteszem a netre, elmondom ez mit jelent. Egész egyszerűen annyit, hogy ha ráadok egy gerjesztést a rendszerre, akkor ugyanolyan alakú választ fogok kapni, csak esetleg más amplitudóval és időben egy kicsit eltolva, mivel valóságban nulla idő alatt ritkán megy át egy jel egy rendszeren.

Erre időtartományban van egy csinos kis kritérium, miszerint a feladat ideális megoldása egy olyan rendszer, amelynek impulzusválasza:

$$h_0(t) = C\delta(t - T)$$

Ez így első körben nem olyan meglepő, annyit csináltunk, hogy $u(t)$ helyére beírtuk a Dirac-impulzust. Amit itt érdemes viszont megjegyezni, hogy ha egy rendszer impulzusválasza alakhű, abból következik, hogy bármilyen gerjesztésre alakhű választ kapunk. Ennek az oka szerintem ott bújik meg, hogy az Dirac-impulzus olyan jel, amelyben minden frekvenciájú komponens szerepel, még hozzá ugyanolyan súllyal. Ezzel viszont csak az a probléma, hogy nehéz eldönteni két rendszer közül, hogy melyiknek hasonlít impulzusra az impulzusválasza leginkább. Úgyhogy megyünk tovább, hátha találunk jobb megoldást.

A fenti feltételből következik a frekvencia-tartománybeli ideális megoldás:

$$H_0(j\omega) = Ce^{-j\omega T}; C > 0, T \geq 0$$

Ebből látszik, hogy az alakhű átvitel közelítőleg akkor biztosított, ha az amplitúdó-karakterisztika közelítőleg állandó, a fázis-karakterisztika pedig közelítőleg lineáris.

És itt értünk el a lényeghez. Ugyanis igaz, hogy ezt biztosítani a teljes frekvencia-tartományra elég nehézkes, de nem is szükséges. Ugyanis, ha az átviteli karakterisztika az (ω_a, ω_b) intervallumon belül

állandó, a fázis-karakterisztika pedig lineáris(vagyis ez a sávszélessége), és a gerjesztő jelem spektruma (ω_1, ω_2) intervallumon kívül elhanyagolható, akkor az átvitelem alakhű lesz abban az esetben, ha (ω_a, ω_b) intervallum magába foglalja a (ω_1, ω_2) intervallumot. És hogy miért nem kezdtem mindjárt ezzel? Amit itt látni kell az az, hogy igaz, tudjuk mi a feltétele időtartományban az alakhű átvitelnek, azt a feltétel nagyon nehéz kezelni (pl. kimérni). Viszont frekvencia-tartományban egy könnyen ellenőrizhető feltételt kaptunk.

3. A jel energiája frekvencia-tartományban:

a.) Parseval-tétel:

Egy jel abszolút értékének négyzete gyakran arányos a teljesítménnyel, idő szerinti integrálja pedig az energiával. Tehát egy $x(t)$ jel energiája abszolút értékének négyzetének integrálját jelenti. Ha ez véges, akkor kifejezhető a jel amplitúdó-spektrumának ismeretében a Parseval-tétellel:

$$E_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt ; E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Ahol $|X(j\omega)|^2$ a jel energia-spektruma. Ha a jel valós, akkor ez a spektrum páros függvény. Továbbá az

$|X(j\omega)|^2 d\omega$ mennyiség arányos a jel $(\omega, \omega + d\omega)$ frekvenciasávba eső energiájával.

Ebből annyit érdemes megjegyezni, hogy önmagában nem lehet beszélni egy jel energiájáról egy adott frekvencián, csak egy frekvenciasávban. Tehát ha a jel energia-spektrumát veszem (integrálom) egy intervallumra akkor megkapom a jel energiáját azon az intervallumon.

b.) Energiaátviteli karakterisztika:

Az előbbiekhez hasonlóan a válasz energia-spektruma kifejezhető a gerjesztés energi-spektrumának és a rendszer energiátviteli karakterisztikájának ismeretében:

$$|Y(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 = K^2(\omega) |U(j\omega)|^2$$

4. Diszkrét Fourier-transzformáció:

III. Analízis a complex frekvencia- tartományban

A Fourier-transzformációval az a probléma, hogy a nem abszolút integrálható jelek, nem stabilis hálózatok vagy rendszerek kezelése nehézkes. Erre vezették be a Laplace-transzformációt, amivel ezen nehézségek nagy része áthidalható. Itt a kitétel csak az, hogy kauzális legyen a rendszer. Az hogy egy rendszer kauzális csak annyit jelent, hogy ha adok valakinek egy pofont, akkor annak a pofon után kezdel sajogni az arca nem pedig előtte, vagyis a rendszer nem jósol. Tudni kell viszont, hogy ez csak egy fogalom. Akauzális rendszer fizikailag nem megvalósítható, ezt csak arra vezették be, hogy ha Sanyi bejön reggel az irodába, hogy 'Gyerekek, megvan a megoldás! Olcsó és a hatásfoka is majdnem 100%', akkor tudjuk neki mondani, hogy 'Sanyikám, ez a rendszer akauzális. Na üljél le gondolkozni még egy kicsit.'

1. A Laplace-transzformáció:

A Laplace-transzformáció definíció szerint a következő:

$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

A -0 egyszerűen azt jelenti, hogy minden jelet belépőként kezel, továbbá, hogy ha a jelnek van $\delta(t)$ összetevője, akkor azt is figyelembe kell venni. Tehát lehet nem belépő jelet is Laplace-transzformálni, csak nem érdemes, mert a negatív információ elvész. Viszont nagy előny, hogy $x(t)$ -nek nem kell abszolút integrálhatónak lennie. Az s jelenti a komplex körfrekvenciát: $s = j\omega + \sigma$

Jelölés: $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \varepsilon(t)x(t)$

a.) A Laplace-transzformáció tételei:

α) Lineáris:

$$\mathcal{L}\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1X_1(s) + c_2X_2(s)$$

β) Csillapítási tétel:

$$\mathcal{L}\{e^{-\gamma t}x(t)\} = X(s + \gamma)$$

Következménye:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\gamma t}\} = \frac{1}{s+\gamma}$$

γ) Eltolási tétel:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t-T)x(t-T)\} = e^{-sT}X(s), T > 0$$

δ) Derivált-tétel:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(-0)$$

Levezetés (hasonló, mint a F-transzformációnál):

$$\begin{aligned}\int_{-0}^{\infty} x'(t)e^{-st}dt &= [x(t)e^{-st}]_{-0}^{\infty} - \int_{-0}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}dt \\ x(\infty)e^{-s\infty} &= 0, x(-0)e^{-s\cdot 0} = x(-0) \rightarrow \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} &= -x(-0) - (-s)X(s)\end{aligned}$$

ε) Integrálási tétel: (parciális integrálással)

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

ξ) Szorzás hatvány függvénnel: (s szerinti differenciál)

$$\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$$

Általánosítva:

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

η) Konvolúció-tétel:

A konvolúció kauzális rendszerekre és belépő gerjesztésre:

$$h(t) * u(t) = \int_{-0}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Tehát, ha $h(t)$ és $u(t)$ is belépő, akkor:

$$\mathcal{L}\{h(t) * u(t)\} = H(s)U(s)$$

megj.: Az integrálásnál a felső határ azért lehet t , mert a rendszer kauzális, vagyis $h(t)$ belépő. Az alsó határ pedig azért lehet $-\infty$ helyett -0 , mert a gerjesztés is belépő.

9) Kezdeti- és végérték tétel:

$$\begin{aligned} x(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \{sX(s)\} \\ x(+\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \{sX(s)\}, \operatorname{Re}\{p_i\} \end{aligned}$$

megj.: A végérték esetén a feltétel annyit jelent, hogy minden pólusnak a bal félsíkon kell lennie.

b) Elemi jelek Laplace-transzformáltja:

$$\alpha) \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\beta) \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\gamma) \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\gamma t}\} = \dots = \frac{1}{s+\gamma}$$

$$\delta) \mathcal{L}\{t \cdot \varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon 1) \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cos(\omega t)\} &= \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-j\omega t}\}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon 2) \quad \boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin(\omega t)\} = \dots = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

ξ) Ablakozott jelek:

$$\boxed{x(t) = [\varepsilon(t - T_1) - \varepsilon(t - T_2)]f(t)}$$

Először is értelmezzük ezt a kifejezést. Az ablakozott jel annyit tesz, hogy egy tetszőleges $f(t)$ függvényt megszorozok egy olyan egységugrással, amelynek 0 az értéke mindenütt, kivéve a (T_1, T_2) intervallumon belül, ahol 1. Tehát az eredeti jeleket csak ezen az intervallumon értelmezem, azon kívül 0, belül pedig az eredeti jel.

A probléma itt az, hogy az eltolási tétel közvetlenül nem alkalmazható, mivel az $f(t)$ jelünk nincs eltolva, meg ugye egyszerre kéne két irányba eltolni. Ilyenkor alkalmazható a következő módszer.

Ha például az $f(t)$ jel így áll elő: $e^{-\alpha t}$, akkor felbontjuk a zárójelre és egyszerűen megszorozzuk $e^{+\alpha T_1 - \alpha T_1}$ -vel az első tagot, $e^{+\alpha T_2 - \alpha T_2}$ -vel pedig a másik tagot, és máris használható az eltolási tétel.

c) Kiegészítő megjegyzések:

α) Konvergencia-abszcissa:

Tudom, ez egy olyan kifejezésnek hangzik, amit még káromkodásnak sem használnál nyugodt lelkiismerettel, de nem olyan bonyolult, sőt meglehetősen fontos. Igazából ezzel lehet megérteni, hogy mi is valójában a σ az s kifejezésében. Először elmagyarázom úgy, ahogy szerintem megérthető, aztán úgy, ahogy a könyvben is van.

Először térjünk vissza a Fourier-transzformációhoz. Ugye azzal az volt a baj, hogy nem abszolút integrálható jeleknél nem működött, vagy csak nagyon nehézkesen. Ilyen például az egységugrás. Jól látszik, hogy egyszerű integráltja végtelent eredményez. Itt jön a képbe Laplace, aki előállt egy elegáns megoldással. Rájött, hogy ha találnánk egy függényt, ami 0-hoz tartatná az eredeti függvény értékét, akkor abszolút integrálhatóvá válna. Erre tökéletesen alkalmas az exponenciális függvény.

Vegyük az egységugrást elő megint. Az egység ugrás Fourier-transzformáltját ugye tudjuk:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-j\omega t} dt$$

Szorozzuk meg a jelünket egy $e^{-\sigma t}$ függvénnyel, ahol σ valami választott érték (majd később látjuk, hogy bármi nem lehet).

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

Összevonva már majdnem megkapjuk a Laplace-integrált.

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-(j\omega + \sigma)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt$$

Már majdnem kész vagyunk, csak egy probléma akad. Igaz a függvényünk most már nullához tart $t \rightarrow \infty$ esetén, viszont $t \rightarrow -\infty$ még mindig végtelenhez, tehát a fenti integrál végtelent ad. Ezért kikötjük, hogy belépő jelenek tekintünk minden jelet és -0 -tól integrálunk.

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt$$

Említettem, hogy σ nem lehet bármi, és itt jön képbe a konvergencia-abszcissa. Ugyanis σ sokféle érték lehet (egységugrást is nem egyfajta exponenciális függvény tartatja a nullához), viszont van egy alsó határa, a legkisebb olyan σ , ahol az így kapott s -ünket

az integrálba helyettesítve végtelentől eltérő értéket kapunk. Mivel mint a témakör címe is mutatja, ez az s a komplex frekvencia, tehát a komplex számsíkon tudjuk ábrázolni, ahol $j\omega$ a képzetes rész σ pedig a valós. A konvergencia-abszcissza tehát a komplex számsíkon az az σ_0 pontba húzott függőleges tengely, amelytől jobbra minden választott s -el a Laplace-integrál konvergens (vagyis végtelentől eltérő értéket ad), balra pedig divergens.

Ezután remélem könnyen érthető lesz a könyvben is szereplő definíció. Egy $x(t)$ jelnek akkor létezik $X(s)$ Laplace-transzformáltja, ha a Laplace-integrál az s valamely értékére konvergens. Ha az integrál valamely s_1 értékre létezik, akkor létezik mindazon s értékekre is, amelyekre $Re(s) > Re\{s_1\}$. A konvergenciát biztosító $\sigma_1 = Re\{s_1\}$ értékek alsó határa a σ_0 konvergencia-abszcissza. A Laplace-integrál a $Re > \sigma_0$ félsíkban konvergens és ott egy reguláris $X(s)$ függvényt állít elő.

megj.: Értelmezett két oldali Laplace-transzformált is, mivel a Laplace-integrál kiterjeszthető az analitikus folytatás elve alapján kiterjeszthető az egész komplex számsíkra, kivéve a szinguláris pontjait, amelyek a

konvergencia-abszcisszától balra találhatók. Ha $X(s)$ racionális és meromorf (vagyis a szingularitásai a p_i pólusok), akkor a konvergencia-abszcissza:

$$\sigma_0 = \max [Re(p_i)]$$

β) Kapcsolat a Fourier-transzformációval:

Ez gyakorlatilag az, amit a konvergencia-abszcissza bevezetőjében mondtam el.

γ) Inverziós integrál:

Itt az a cél, hogy $X(s)$ -hez akarunk egy $x(t)$ függvényt rendelni az inverz Laplace-transzformációval. Ennek általános kifejezése:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \sigma > \sigma_0$$

Magyarul az integrálást a komplex számsíkkal (és ezzel együtt a konvergencia-abszcisszával is) párhuzamos egyenes mentén végezzük el. Vagyis a σ -ánk állandó, a körfrekvenciánk megy mínusz végtelentől végtelenig. A módszer lényege, hogy ha $X(s)$ meromorf, akkor t pozitív esetére az egyenes egy véges szakaszát (vagyis egy meghatározott frekvencia-intervallumot) a bal fél síkon zárt görbévé alakítjuk, alkalmazzuk a reziduum-tételt, majd a kör sugarával végtelenhez tartunk. Ha t negatív, akkor a félkört a jobb fél síkon zárjuk, ekkor az inverziós integrál nullát, vagyis belépő

jelet eredményez. A pontos matematikai háttérét nem értem, de véleményem szerint amit ebből le kell szűrni az annyi, hogy ez az inverz Laplace-transzformáció kifejezése, ami bizonyos feltételek esetén egy egyszerűbb matematikai módszerrel számítható.

2. Inverz Laplace-transzformáció:

Az onverz transzformáltat általánosan egy integrállal tudjuk előállítani, mint korábban láttuk. Ez viszont elég nehézkes feladat, ezért a legtöbb gyakorlati esetben nem érdemes használni. Az alábbiakban néhány gyakorlatban alkalmazható trükköt tárgyalunk.

a.) Ránézésre:

Ez a legegyszerűbb eset. Mivel korábban sok elemi függvény transzformáltját kiszámoltuk, ezért sokszor látszik a függvényünkön egyből, hogy milyen jelek transzformáltjából adódott.

b.) $X(s)$ valódi periódikus törtfüggvény:

Egy törtfüggvény akkor valódi törtfüggvény, ha egy $M(s)$ és egy nála nagyobb fokszámú $N(s)$ polinom hányadosa:

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s^1 + a_0}$$

Ekkor $N(s)$ -t átírjuk gyöktényezősz felbontásba:

$$N(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

ahol p_i a pólusokat jelöli.

Ezután részlet törtre bontjuk $X(s)$ -t:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

Ezt remélem mindenki felismeri. Innentől alkalmazható tagonként a csillapítási tétel:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \varepsilon(t)[C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots + C_n e^{p_n t}]$$

Most már csak a feladatunk a C -k meghatározása:

α) Letakarásos módszer:

Ezt talán egy példával tudom a legegyszerűbben szemléltetni.

Egy hárompólusú rendszert keressük a következő alakban:

$$H(s) = \frac{A}{(s-p_1)} + \frac{B}{(s-p_2)} + \frac{C}{(s-p_3)}$$

Pl. az ' A '-t úgy határozzuk meg, hogy az eredeti alakban letakarjuk az $(s-p_1)$ -t és a maradék s -ek helyére behelyettesítjük p_1 -t (számlálóba és nevezőbe is). Az így kialakuló tört adja ki ' A '-t. Így kell ' B '-t és ' C '-t is meghatározni.

β) Többszörös gyökök:

Itt is vegyünk egy példát:

$$H(s) = \frac{s}{(s+5)^2} = \frac{A}{(s+5)^2} + \frac{B}{s+5}$$

Ekkor a két tagot közös nevezőre hozzuk és egyenlővé tesszük az eredeti alakban lévő számlálóval:

$$As + 5A + Bs^2 + 10Bs + 25B = s$$

$$s^2B + s(A + 10B) + (5A + 25B) = s$$

Ezután az azonos együtthatójú tagokat egyenlővé tesszük páronként és így egy lineáris egyenlet rendszert kapunk (az s^2 -es taggal nem tudunk mit kezdeni, mert abból nem határozható meg semmi):

$$A + 10B = 0$$

$$5A + 25B = 1$$

γ) Komplex pólusok:

A komplex pólusokról tudjuk, hogy mindenképpen komplex konjugált párokat fognak alkotni. Ugyanúgy kiszámoljuk őket, majd az Euler-reláció segítségével koszinuszos alakra hozzuk.

c.) $X(s)$ nem valódi törtfüggvény:

Ugyebár ez azt jelenti, hogy:

$$X(s) = \frac{G(s)}{N(s)}$$

alakú függvény esetén $G(s)$ fokszáma megegyezik $N(s)$ fokszámával. Ilyankor a következő átalakítást akarjuk elvégezni:

$$X(s) = A + \frac{M(s)}{N(s)}$$

Ahol A egy konstans, $\frac{M(s)}{N(s)}$ meg már valódi törtfüggvény. Erre az átalakításra szolgál a polinom osztás, amit bevallok őszintén sosem volt türelmem megtanulni. Az esetek többségében a következő egyszerű megoldás is működik. $G(s)$ -t és $N(s)$ -t is meghagyjuk eredeti alakban, nem írjuk át gyöktényezős felbontásra. Ilyenkor megnézzük, hogy $G(s)$ legnagyobb fokú tagjának mekkora az együtthatója, az lesz az A . Ezután átírjuk a függvényünket a következő alakra:

$$X(s) = \frac{AN(s)+M(s)}{N(s)}$$

vagyis $G(s)$ -ből kiszedünk $AN(s)$ -t. Ezután már látszik a végeredmény:

$$X(s) = \frac{AN(s)}{N(s)} + \frac{M(s)}{N(s)} = A + \frac{M(s)}{N(s)}$$

3. A Laplace-transzformáció alkalmazása:

Mint az a Fourier-transzformációra is igaz volt, a Laplace-transzformáció nagy előnye, hogy differenciálegyenletből algebrai egyenletet kapunk. Kötöttségként viszont meg kellett adnunk, hogy a rendszer kauzális legyen, a gerjesztés pedig belépő legyen. Most átvesszük a különböző módszereket, amivel lehetséges a rendszer-analízis s-tartományban.

a.) Eljárás

1. Hálózati egyenletek felírása idő tartományban (pl. állapotváltozós leírás).
2. Áttérés komplex frekvencia-tartományba Laplace-transzformáció segítségével.
3. Algebrai egyenletek megoldása.
4. Inverz Laplace-transzfirmáció segítségével visszatérés időtartományba.

b.) Hálózati egyenletek közvetlenül az s-tartományban:

- Összekapcsolási kényszerek (Kirchoff-törvények):

$$\boxed{\sum_{hurok} U_k(s) = 0, \sum_{vágat} I_k(s) = 0}$$

- Komponensek karakterisztikái (operátoros impedanciák):

-Ellenállás:
$$\frac{U_R(s)}{I_R(s)} = R = Z_R(s)$$

-Tekercs:
$$\frac{U_L(s)}{I_L(s)} = sL = Z_L(s)$$

-Kapacitás:
$$\frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} = Z_C(s)$$

c.) Átviteli függvény:

Lineáris, invariáns, kauzális rendszer esetén a belépő gerjesztésre adott belépő válasz.

$$H(s) \triangleq \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

megj.: A $\triangleq$ jel azt jelenti, hogy definíció szerint.

d.) A válasz számítása:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$$

megj.: példák az órai jegyzetben, meg a háziban, amit ugye magatoktól csináltatok?

IV. Rendszerjellemző függvények

A rendszerjellemző függvények olyan függvények, amelyek leírják egy rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát, vagyis ismeretében tetszőleges $u(t)$ esetén kiszámítható $y(t)$.

Szemponatok:

- Enyhe feltételek mellett alkalmazható (pl. GV stab., kauzális,...)
- Egyszerűen alkalmazható
- Ábrázolható
- A hálózattól könnyen felírható

1. Impulzusválasz:

A rendszer Dirac-impulzusra adott válasza.

$$u(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$$

Jelölése: $h(t)$ (időtartományban értelmezett)

Feltétel: Lineáris, invariáns hálózatokra lehet felírni. (Kauzalitás és GV-stabilitás nem feltétel)

Alkalmazás: ennek segítségével tudjuk a választ számítani. Gerjesztés és válasz konvolúciója:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Mérése: Egyszerűen mérhető, csak egy megfelelően rövid impulzust kell előállítani, és kirajzoltatni a választ.

Ábrázolás: Egyértelmű

megj.1: segítségével meghatározható, hogy GV-stabilis-e az adott rendszer, ugyanis GV-stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy az impulzus válasz abszolút integrálható legyen. (GV-stab.: bármely korlátos gerjesztésre korlátos a válasz)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)| dt < \infty$$

megj.2: a rendszer hálózati reprezentációjából közvetlenül nem határozható meg, előbb meg kell határoznunk az állapotváltozós leírást, átviteli karakterisztikát vagy átviteli függvényt.

megj.3: Meghatározható az egységugrásra adott ugrásválasz általános deriválásával.

2. Átviteli karakterisztika:

A rendszer gerjesztés- és válasz spektrumának a hányadosa. (Frekvencia függvényében megadja az átviteli együtthatót.)

Jelölése:
$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$
 (frekvencia-tartományban értelmezett)

Feltétel: a vizsgált rendszer GV-stabilis legyen.

Számítása: ha ez előbbi feltétel teljesül, akkor az impulzusválasz Fourier-transzformáltjaként előáll az átviteli karakterisztika.

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \equiv U(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = Y(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}}$$

Mérése: Kimérjük a szinuszos állandósult állapotot valamilyen kis körfrekvencia mellett (vagyis a rendszer szinuszos gerjesztésére adott választ), utána növeljük a gerjesztés körfrekvenciáját, és megfelelően sok diszkrét értékből ki tudjuk fejezni.

Ábrázolása: Bode- vagy Nyquist-diagramm.

Bode: a Bode-diagramm két görbéből áll. Az egyik görbén ábrázoljuk az amplitúdó-karakterisztikát a frekvencia függvényében, a másikon a fázis-karakterisztikát szintén a frekvencia függvényében.

megj.: általában szokás logaritmikus egységekben felvenni a frekvencia tengelyt, hiszen ilyenkor két pont közötti 10-szeres szorzó különbség ad egy egységet. Magyarul 1 és 10 között ugyanannyi a távolság, mint 1000 és 10000 között, aminek következménye, hogy sokkal nagyobb frekvencia-intervallumot tudunk lefedni. Ez nagyon előnyös itt, hiszen ha csak a hangfrekvenciás tartományt nézzük az is 20Hz-20kHz,

amit lineáris léptékekben nem túl felhazsnálóbarát ábrázolni.

Nyquist: A Nyquist-diagramm gyakorlatilag a Bode két diagrammjának az összevonása. Ezt a diagrammot ugyanis a komplex koordináta rendszerben ábrázoljuk, ahol ugye egy adott pontnak van hossza (amplitúdó) és szöge (fázis).

3. Átviteli függvény:

A rendszer gerjesztés- és válasz Laplace-transzformáltjának a hányadosa.

Jelölése:
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
 (komplex frekvencia-tartományban értelmezett)

Feltétele: a gerjesztés belépő legyen és a rendszer kauzális legyen.

Számítása: ha az előbbi feltételek teljesülnek, akkor az impulzusválasz Laplace-transzformáltjaként áll elő.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \equiv U(s) \rightarrow H(s) = Y(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Mérése: Közvetlenül nem mérhető.

Ábrázolása: Pólus-zérus eloszlással ábrázoljuk. Nagyon egyszerű. Először is az átviteli függvény számlálóját és nevezőjét is felírjuk gyöktényezős felbontásban, így látni fogjuk a zérusokat (számláló gyökei) és pólusokat

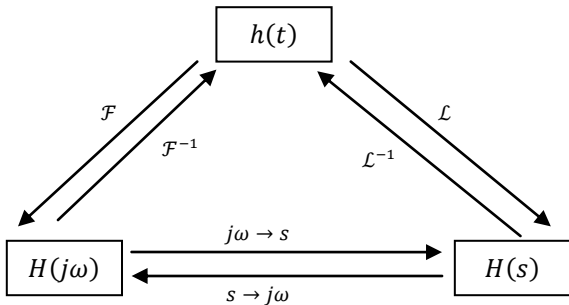
(nevező gyökei). Ezután felvesszük a komplex koordináta rendszer és ábrázoljuk a zérusokat körrel jelölve, a pólusokat pedig x-el.

megj.: segítségével meghatározható, hogy GV-stabilis-e a rendszer. A GV-stabilitásnak szükséges és elégséges feltétele (amellett, hogy $h(t)$ abszolút integrálható), hogy:

$$\forall i - \operatorname{Re} \{p_i\} < 0$$

4. Rendszerjellemző függvények kapcsolata:

Most röviden összefoglaljuk, hogy lehet egyik rendszerjellemző függvényről a másikra áttérni. Továbbra is mindegyikre igaz, hogy csak lineáris, invariáns rendszerre létezik.



5. Kapcsolat az állapotváltozós leírással:

ÁVL normál alakja: (emlékeztetőül JR1)

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B}u \\ y = \underline{C}^T \cdot \underline{x} + Du \end{cases}$$

a.) Impulzusválasz:

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\underline{A}t} \underline{B}$$

ahol:

$$\begin{cases} e^{\underline{A}t} = \sum_{i=1}^N \underline{L}_i e^{\lambda_i t} \\ \underline{L}_i = \prod_{p=1; p \neq i}^N \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{I}}{\lambda_i - \lambda_p} \end{cases}$$

megj.: λ_i a rendszermátrix ($\underline{A}$) i-dik sajátértéke, amit a következő egyenlet megoldásával határozhatunk meg:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$$

b.) Átviteli függvény:

Itt az egész levezetést nézzük. Először is Laplace-transzformáljuk az állapotváltozós leírást és feltesszük, hogy: $x(0)=0$. Ez szerintem azért kell, mert az integrál s-el való szorzásba megy át, viszont még kivonódna belőle $x(-0)$. Ezt ne vegyék szent írásnak, csak megérzés. Tehát az ÁVL-t átírjuk s-tartományba:

$$\begin{aligned} s\underline{X}(s) &= \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{B}U(s) \\ Y(s) &= \underline{C}^T \cdot \underline{X}(s) + DU \end{aligned}$$

Ezután csinálunk egy kis egyenlet rendezést:

$$\begin{aligned} s\underline{X}(s) - \underline{A} \cdot \underline{X}(s) &= \underline{B}U(s), s \rightarrow s\underline{I} \\ (s\underline{I} - \underline{A})\underline{X}(s) &= \underline{B}U(s) \\ \underline{X}(s) &= (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}U(s) \\ Y(s) &= U(s) \cdot \left(\underline{C}^T (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D \right) \end{aligned}$$

És innen látszik is a végeredmény:

$$H(s) = \underline{C}^T (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D$$

c.) Átviteli karakterisztika:

Ha GV-stabil a rendszer, akkor $s \rightarrow j\omega$ helyettesítéssel működik az előbb levezetett formula:

$$H(j\omega) = \underline{C}^T (j\omega\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D$$

6. Speciális rendszerek:

a.) Mindent áteresztő rendszer:

A mindent áteresztő rendszer egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, GV-stabilis rendszer, aminek az amplitúdó-spektruma állandó minden körfrekvencián. Ez annyit tesz, hogy bármilyen frekvenciájú gerjesztést átvisz ugyanolyan erősítéssel. Ebből a definícióból az következik, hogy a gerjesztés amplitúdó-spektruma arányos a válasz amplitúdó-spektrumával, a fázis-spektrumra nincsen megkötés.

A mindent áteresztő rendszernek minden zérusa a jobb félsíkon van, minden pólusa pedig a bal félsíkon, továbbá a pólusok és zérusok egymással komplex-konjugált párokat alkotnak, amiről tudjuk, hogy egy komplex konjugált párnak az abszolút értékei megegyeznek a szögük pedig egymásnak (-1) -szeresei. Következésképp ha az átviteli-karakterisztikának vesszük az abszolút értékét (vagyis az előállítjuk az amplitúdó-karakterisztikát) akkor a fázisinformáció eltűnik, vagyis a számláló és nevező egyenlő lesz.

A rendszer egy általános alakja:

$$H(s) = A \frac{\prod_{i=1}^n (s + p_i^*)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

Átviteli karakterisztikával pedig:

$$H(j\omega) = A \frac{\prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)}}{\prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j(\pi - \alpha_i(\omega))}}$$

megj.1: mint látszik ez a levezetés akkor is érvényes lenne, ha minden pólus is a jobb félsíkon lenne, viszont akkor nem lenne a rendszer GV-stabilis.

megj.2: Ilyen mindent áteresztő rendszer például a memóriamentes mindent áteresztő rendszer, aminek már az alap átviteli-karakterisztikája is konstans. $H(j\omega) = K_0$

b.) Minimálfázisú rendszer:

A minimálfázisú rendszer egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, GV-stabilis rendszer, amelynek minden pólusa a bal félsíkon van és nincsen zérusa a jobb félsíkon.

Na most egy kis magyarázat, hogy megértsük, mit is takar az, hogy minimálfázis. Hogyha felrúgjuk a definícióban előírt feltételeket és bármelyik i -dik zérust átesztem a jobb félsíkra ($z_i' = -z_i^*$), akkor az átviteli karakterisztika a következőképp fog változni:

$$j\omega - z_i = A_i(\omega)e^{j\alpha_i(\omega)} \rightarrow j\omega - z_i' = A_i(\omega)e^{j(\pi-\alpha_i(\omega))}$$

Tehát az amplitúdókarakterisztika nem változik, viszont a fázis-karakterisztikám nagyobb lesz, ami általában nem kedvező (pl. ha egy rendszer fázis-karakterisztikája átlépi a 180 fokot akkor pozitív visszacsatolás léphet fel és elszáll a rendszer). Tehát összegezve, azonos amplitúdó-karakterisztikájú rendszerek közül a minimálfázisúnak a legkisebb a fáziskarakterisztikája.

megj.: beszélhetünk még szigorúan minimálfázisú rendszerről, aminél nem engedjük meg, hogy bármely zérus is a képzetes tengelyen legyen, vagyis minden zérus a bal félsíkon van. Ebben az esetben már az amplitúdó-karakterisztika is rendszer jellemző függvény, mert Bode tételével egyértelműen előállítható belőle a fázis-karakterisztika:

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{\ln K(\lambda) - \ln K(\omega)}{\lambda - \omega} d\lambda$$

V. Jelfolyam típusú hálózatok

Hogy ezt az előadó miért a folytonos idejű támakörhöz vette, pontosan nem értem. Valószínűleg azért, mert van diszkrét és folytonos idejű jelfolyat hálózat, csak előadáson láthatólag csak diszkrét idejűről volt szó. Szívem szerint én már a diszkrétéhez raknám, de akkor felrúgnám a vázlatmenetet, úgyhogy ide veszem én is. Nem megyek bele részleteibe, mert nem fontos, de alapvetően itt arról van szó, hogy van nekünk egy objektumunk, például valamilyen elektronikus eszközünk. Erre az objektumra tudunk mi definiálni hálózatot, amiben változókkal vesszük figyelembe a tényleges objektumban számunkra fontos történéseket. Két alapvető változó a gerjesztés és a hozzá tartozó válasz, de ezen kívül más is lehet. Viszont a hálózatban értelmezettek lehetnek olyan változók is, amelyeknek az objektumban nem felelnek meg fizikai mennyiségek. Tehát magyarul a lényeg, hogy az objektum működését le tudjuk írni így vagy úgy.

Hálózatot tudunk még objektumot modellező rendszerhez is rendelni. Ebből a szempontból a hálózat

egy speciális modell, amiből matematikai modellek felírhatók, vagy fordítva. Viszont a rendszer és a hálózat között nincsen lényeges különbség. Igaz szigorúan véve a rendszer kétféle változót tartalmaz: gerjesztést és választ. Viszont egy rendszer felépülhet részrendszerekből és akkor meg már ugyanott vagyunk. Ugyanis a hálózat elméleti definíciója, hogy meghatározott komponensek meghatározott szabályok szerinti összekapcsolása. És itt el is jutottunk ahhoz, hogy írhatjuk fel egy hálózat teljes egyenlet rendszerét, ami végső soron maradéktalanul leírja a hálózatunk működését. Két dolog kell. A hálózati komponensek karakterisztikái, vagyis gerjesztés-válasz kapcsolata, továbbá szükségünk van az összekapcsolási kényszerekre, vagyis hogy effektíve hogy kötöttük össze a szeremcsétlen kis komponenseinket.

Tudom, sok volt itt a fogalom, ami összekeverhető de ez nem olyan fontos inkább csak amolyan bevezető. A lényeg, hogy vannak objektumaink, amit le tudunk írni egy hálózattal (pl kapcsolási rajz), a hálózatot meg a fent említett módon tudjuk matematikailag leírni. Ennyi a lényeg. A tárgy keretein belül egy bemenetű, egy kimenetű hálózatokkal fogunk foglalkozni.

1. A hálózat komponensei:

Ahogy az előbb elmondta, a hálózat komponenséről tudjuk, mi a bemeneti változója, kimeneti változója és a kettő közötti kapcsolat. Matematikailag, ha a bemenetem p_i , a kimenetem q_i , akkor a komponens leírható a következő képpen:

$$q_i = \mathcal{H}_i\{p_i\}$$

ami az elem karakterisztikája.

Speciális komponensek:

-Forrás (az adott gerjesztés): $q_i = u$

-Nyelő (a keresett válasz): $p_i = y$

2. Összekapcsolási szabályok:

a.) Összegző csomópont:

Kimenete a bemenetek összege:

$$p_i = \sum_{k=1}^n q_k$$

b.) Szétágazó csomópont:

Minden kimenete a bemenet:

$$p_i = q_i$$

3. Visszacsatolt rendszer:

Erről itt csak annyit írok, hogy olyan rendszer, ahol valamely komponens kimenete vissza van csatolva a bemenetre akár egy másik komponensen keresztül is.