

1. (15 p) Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+4}$$

Megoldás

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{3n+3} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = (e^2)^3 \cdot 1 = e^6 \end{aligned}$$

2. (15 p) Számítsa ki az $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ függvény minimumát és maximumát a $[-2, 2]$ intervallumon, amennyiben ezek léteznek!

Megoldás

$f(x)$ folytonos, ugyanis $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2) = \ln((x+1)^2 + 1)$ mutatja, hogy a logaritmus belsejében szereplő kifejezés mindig pozitív, így $f(x)$ pozitív. Weierstrass tétele szerint korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát.

A vizsgálandó pontok: az intervallum széle és a lokális szélsőértékek. A lokális szélsőértékek megkereséséhez deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

A derivált minden x -re értelmezett mert $x^2 + 2x + 2 \neq 0$. Egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0, így $2x + 2 = 0$ -ból csak $x = -1$ -ben lehet lokális szélsőérték. Itt a derivált negatívból pozitívba vált, tehát lokális minimum van, és $f(-1) = \ln(1 - 2 + 2) = \ln(1) = 0$.

Másrészt az intervallum szélein $f(-2) = \ln(4 - 4 + 2) = \ln(2)$ és $f(2) = \ln(4 + 4 + 2) = \ln(10)$. Mivel az $\ln(y)$ függvény szigorú monoton nő, így $\ln(2) < \ln(10)$, tehát $f(x)$ maximumát a 2-ben veszi fel, értéke $\ln(10)$, minimumát pedig a -1 -ben, értéke 0.

3. (20 p) Határozza meg az alábbi határértékeket amennyiben léteznek!

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\tan(x)}$$

Megoldás

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1||x+1|}{x-1},$$

Egyrészt $\lim_{x \rightarrow 1} |x + 1| = 2$.

Másrészt viszont mivel $|x| = -x$, ha $x < 0$ és $|x| = x$, ha $x \geq 0$ így

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1,$$

így

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = 2$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = -2,$$

tehát a keresett limesz nem létezik.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\tan(x)}$$

Mivel $\cosh(0) = 1$ és $\tan(0) = 0$ ez egy $\frac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, így:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\tan(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh(2x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{2 \cdot 0}{1 + 0} = 0,$$

hiszen $\sinh(0) = 0$.

4. (15 p) Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$(e^{7x} + 2x^2 + 1)^3 \quad \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x + 2}$$

Megoldás

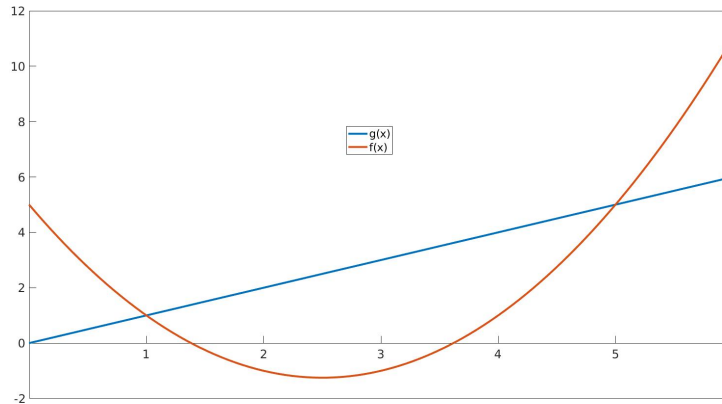
$$\left((e^{7x} + 2x^2 + 1)^3 \right)' = 3 (e^{7x} + 2x^2 + 1)^2 (7e^{7x} + 4x + 0)$$

Mivel $\sqrt{x^3 + 1} = (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}$, így

$$\left(\frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x + 2} \right)' = \frac{\frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 0)(x + 2) - \sqrt{x^3 + 1} \cdot 1}{(x + 2)^2}$$

5. (20 p) Határozza meg az $f(x) = x^2 - 5x + 5$ és a $g(x) = x$ függvények görbéje által határolt korlátos síkidom területét!

Megoldás



A felső határoló függvény az $g(x) = x$, az alsó az $f(x) = x^2 - 5x + 5$. A metszéspontok az $f(x) = g(x)$ megoldásából $x^2 - 5x + 5 = x$, azaz $x^2 - 6x + 5 = 0$, így $(x-5)(x-1) = 0$. A két metszéspont tehát az $x = 1$ és az $x = 5$. Így a keresett terület az alábbi integrál kiszámításával kapható meg:

$$\int_1^5 x - (x^2 - 5x + 5) dx = \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 =$$

$$\frac{-125}{3} + 3 \cdot 25 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = 52 - \frac{124}{3} = \frac{32}{3}$$

6. (15 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\int 2x \arctan(x) dx \quad \int_0^1 2x \arctan(x) dx$$

Megoldás Parciális integrálással dolgozunk. Legyen $f' = 2x$, innen $f = x^2$ és $g = \arctan(x)$, innen $g' = \frac{1}{1+x^2}$. Azaz:

$$\int \overbrace{2x}^{f'} \overbrace{\arctan(x)}^g dx = \overbrace{x^2}^f \overbrace{\arctan(x)}^g - \int \overbrace{x^2}^f \overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{g'} dx = x^2 \arctan(x) - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx =$$

$$x^2 \arctan(x) - \int 1 + \frac{-1}{1+x^2} dx = x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

A Newton-Leibniz formula szerint

$$\int_0^1 2x \arctan(x) dx = [x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - 1 + \arctan(1) - 0 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$$

7. (+15 p) Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2} dx$$

Megoldás Parciális törtekre bontással:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2} dx = \int \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} dx$$

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + 1)}$$

A két oldalon a nevezők megegyeznek, így kibontva a számlálót:

$$x^3(A + C) + x^2(B + D) + x(A) + B = x^3 + 1$$

adódik, ezt megoldva $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -1$, azaz

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \arctan(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

8. (15 p) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x + 2z &= 9 \\ -14x + 4y - 3z &= -13 \\ 21x + 8y + 8z &= 37 \end{aligned}$$

Megoldás

Felírva a kibővített együtthatómátrixot majd Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ -14 & 4 & -3 & -13 \\ 21 & 8 & 8 & 37 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A harmadik sorból $z = t$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ paraméter, aztán a második sorból: $4y + t = 5$, innen $y = \frac{5-t}{4}$, végül az első sorból $7x + 2t = 9$, innen $x = \frac{9-2t}{7}$.