

Logika Vizsga kérdések

Tartalomjegyzék

❖ Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).....	2
❖ Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.....	2
❖ Legyen Σ nulladrendű formulahalmaz, φ nulladrendű formula. Írjuk le $\Sigma \vdash \varphi$ definícióját (NEM kell megadni az axiómasémákat és a következtetési szabályt.) (6 pont).....	2
❖ Legyen Σ nulladrendű formulahalmaz, φ nulladrendű formula. Írjuk le $\Sigma \models \varphi$ definícióját (NEM kell megadni az axiómasémákat és a következtetési szabályt.) (6 pont).....	2
❖ Igazoljuk, hogy a $\{\neg, \wedge, \vee\}$ művelethalmaz funkcionálisan teljes. (9 pont).....	3
❖ Az ítéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya.....	3
❖ Ítéletkalkulus helyességi tétele.....	3
❖ Adjunk meg egy DNF-t, mely ekvivalens az $x \wedge (y \Leftrightarrow z)$ formulával. (A DNF elemi konjunkciók diszjunkciója.) (6 pont).....	3
❖ Írjuk le a Dedukciós tétel állítását és bizonyítását. (9 pont).....	4
❖ A Ded operátor lezárási operátor, és alaptulajdonságait (vagyis azt a 3 állítást, melyek szerint Ded egy lezárási operáció).	5
❖ Írjuk le a struktúrák elemi ekvivalenciájának definícióját. (6 pont)	5
❖ Az izomorfizmus fogalma. Izomorf struktúrák elemien ekvivalensek.	5
❖ Írjuk le a felszálló Löwenheim-Skolem tétel állítását.....	5
❖ Legyen $A = \langle N, < \rangle$ és legyen $B = \langle R, < \rangle$ (a rendezések a szokásosak). Elemien ekvivalensek-e az A és B struktúrák? Indokoljunk. (9 pont)	6
❖ Igazoljuk, hogy a valós számok teste és a komplex számok teste nem elemien ekvivalens egymással.	6
❖ Legyenek A és B elemien ekvivalens, véges alaphalmazú struktúrák, melyek közös nyelve csak véges sok reláció-, függvény-, és konstansszimbólumot tartalmaz. Igazoljuk, hogy ekkor A és B izomorfak.	6
❖ Írjuk le a Helyességi Tétel állítását és bizonyítását. (9 pont).....	6
❖ Írjuk le az elsőrendű nyelvek Herbrand-univerzumának definícióját.....	6
❖ Az L nyelvben c konstansszimbólum f 1-változós, g pedig 2-változós függvénytípusú szimbólum (és L-ben nincsenek más konstans- és függvénytípusú szimbólumok). Írjuk le L Herbrand-univerzumának összes olyan elemét, melyben legfeljebb 2 függvénytípusú szimbólum van. (6 pont)	7
❖ Írjuk le a Kompaktsági Tétel mindkét alakjának állítását és bizonyítását. (9 pont).....	7
❖ Írjuk le a Skolemizálás algoritmusát (a módszer helyességét nem kell bizonyítani). (6 pont)	7
❖ Igazoljuk, hogy egy nulladrendű rezolúciós kalkulus cáfolati teljességét (azaz azt, hogy egy nulladrendű klóz-halmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha levezethető belőle az üres klóz).	8
❖ Igazoljuk, hogy egy nulladrendű klóz-halmaz pontosan csak akkor kielégíthetetlen, ha szemantikus fája minden ágán van egy cáfoló csúcs.	8

❖ Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).

0. rendű nyelvek

- ítéletváltozók: $X_0, X_1, X_2, \dots$
- logikai összekötő jelek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- tagoló jelek: $(,)$ (a zárójelek)

1. Rendű nyelvek

- (1) nem változtatható komponensek:
 - individuum változók: $X_0, X_1, X_2, \dots$
 - logikai összekötő jelek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =$
 - tagoló jelek: $(,),$ (zárójelek és vessző)
- (2) változtatható komponensek:
 - függvényszimbólumok,
 - konstansszimbólumok (= 0-változós függvényszimbólumok),
 - relációszimbólumok.

❖ Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.

Definíció A $k : \{\text{változók}\} \rightarrow \{i, h\}$ függvényeket *kiértékeléseknek* nevezzük. A kiértékelés tehát minden egyes változóhoz igazságértéket rendel.

Definíció: *TERM (elem különírás)*

- (1) ha t változó, vagy konstansszimbólum, akkor term;
- (2) ha f n -változós függvényszimbólum, $t_1, \dots, t_n$ term, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is term;
- (3) Minden term az előző két szabály véges sok alkalmazásával áll elő.

Definíció. *Elsőrendű formula:*

- (1) ha $t_1, \dots, t_n$ term, R n változós reláció szimbólum, akkor $R(t_1, \dots, t_n)$ és $t_1 = t_2$ is formulák (atomi formulák);
- (2) ha ϕ, ψ formula, x változó, akkor $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \Rightarrow \psi, \phi \Leftrightarrow \psi, \exists x\phi, \forall x\phi, [(\phi)]$ is formulák ;
- (3) Minden formula az előző két szabály véges sok alkalmazásával áll elő.

Definíció Legyen $t = (I, J, K, \rho, \delta)$ típus. $\mathcal{A} = \langle A, R_i, f_j, C_k \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$ egy t típusú *struktúra*, ha A egy nemüres (alap)halmaz, és minden $i \in I, j \in J, k \in K$ -ra $R_i \subseteq A^{\rho(i)}$ egy $\rho(i)$ változós reláció, $f_j : A^{\delta(j)} \rightarrow A$ egy $\delta(j)$ változós függvény, $C_k \in A$ konstans.

❖ Legyen Σ nulladrendű formulahalmaz, ϕ nulladrendű formula. Írjuk le $\Sigma \vdash \phi$ definícióját (NEM kell megadni az axiómasémákat és a következtetési szabályt.) (6 pont)

Definíció. Modus Ponens: $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$

Definíció. Legyen Σ formulahalmaz, ϕ formula.

$\Sigma \vdash \phi$ ha van olyan véges $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formulasorozat, hogy $\alpha_n = \phi$ és mindent Σ -ból ϕ levezethető $i \leq n$ -re:

- α_i axióma, vagy
- $\alpha_i \in \Sigma$, vagy
- α_i Modus Ponens-el megkapható korábbi α_j -kből.

❖ Legyen Σ nulladrendű formulahalmaz, ϕ nulladrendű formula. Írjuk le $\Sigma \models \phi$ definícióját (NEM kell megadni az axiómasémákat és a következtetési szabályt.) (6 pont)

Definíció. Legyen Σ formulahalmaz, ϕ formula, $\mathcal{A}$ struktúra.

- $\underbrace{\mathcal{A} \models \Sigma}_{\Sigma \text{ igaz } \mathcal{A}\text{-ban}}$, ha minden $\rho \in \Sigma$ -ra $\mathcal{A} \models \rho$.

❖ Igazoljuk, hogy a $\{\neg, \wedge, \vee\}$ művelethalmaz funkcionálisan teljes. (9 pont)

1.1. Tétel. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ funkcionálisan teljes.

Bizonyítás Legyen $f : \{i, h\}^n \rightarrow \{i, h\}$ tetszőleges. Ha $s \in \{i, h\}^n$, akkor legyen

$$x_j^s = \begin{cases} x_j & \text{ha } s \text{ j. koordinátája igaz} \\ \neg x_j & \text{ha } s \text{ j. koordinátája hamis} \end{cases}$$

f a következő formula táblázata:

$$\bigvee_{s: f(s)=i} (x_1^s \wedge x_2^s \wedge \dots \wedge x_n^s) \text{ (diszjunktív normálforma, DNF.)}$$

A zárójelen belüli rész csak s-ben lesz igaz. Rögzített s-re $x_1^s \wedge \dots \wedge x_n^s$:
elemei konjunkció. ■

❖ Az ítétekalkulus axiómái, következtetési szabálya.

Definíció. Axióma sémák:

1. $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha$,
2. $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$,
3. $(\neg \alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg \alpha \Rightarrow \neg \beta) \Rightarrow \alpha$.

α, β, γ formula változók.

Axiómák: α, β, γ helyére tetszőleges formulákat írhatunk.

❖ Ítétekalkulus helyességi tétele

Helyesség: Helyes-e a nulladrendű logika? Ha egy formula valamely formulahalmazból (szintaktikailag) levezethető, akkor az vajon ugyenezen formulahalmaznak szemantikai következménye-e, és fordítva?

Tétel: Ha $\{F1, F2, \dots, Fn\} \vdash_0 G$ akkor $\{F1, F2, \dots, Fn\} \models_0 G$. (**Helyesség**)

Teljesség: Ha valamely formula egy formulahalmaznak szemantikai következménye, akkor vajon levezethető-e ezen formulahalmazból?

Tétel: Ha $\{F1, F2, \dots, Fn\} \models_0 G$, akkor $\{F1, F2, \dots, Fn\} \vdash_0 G$. (**Teljesség**)

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\{F1, F2, \dots, Fn\}$ formulahalmazból levezethető a G formula, ha van olyan $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_k$ formulasorozat, amelyre a ϕ_k formulák :

- F-ből valók vagy
- axiómák vagy
- Modus Ponenssel keletkezett a megelőző formulákból

Jelölés: $\{F1, F2, \dots, Fn\} \vdash_0 G$

Teljességi tétel Ekvivalensek:

1. $\Sigma \models \phi$.
2. $\Sigma \vdash \phi$.

❖ Adjunk meg egy DNF-t, mely ekvivalens az $x \wedge (y \Leftrightarrow z)$ formulával. (A DNF elemi konjunkciók diszjunktója.) (6 pont)

Ekvivalencia felbontása: $x \wedge ((y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z))$
 $\wedge$ disztributív $\vee$ -ra: $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)$

❖ Írjuk le a Dedukciós tétel állítását és bizonyítását. (9 pont)

Tétel. (Dedukciós tétel) Legyen Σ formulha halmaz, ϕ, ψ formula. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \psi$,
2. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$;

(Implikáció levezethető, ha $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.)

Bizonyítás.

- (1) $\Rightarrow$ (2): (1) és előző állítás (2) (monotonitás) miatt

1. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \phi \Rightarrow \psi$
2. $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \phi$
3. MP(1,2): $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Bizonyítás (1) $\Rightarrow$ (2): lásd előző előadás. (2) $\Rightarrow$ (1): ha $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, akkor van olyan véges $\alpha_1 \dots \alpha_n$ formulasorozat, hogy $\alpha_n = \psi$ és $\forall i \leq n$ -re

$$\alpha_i \begin{cases} \text{axióma vagy} \\ \in \Sigma \cup \{\phi\} \text{ (azaz } \alpha_i \in \Sigma \text{ vagy } \alpha_i = \phi) \text{ vagy} \\ \text{van } k, l < i : \alpha_i \text{ megkapható Modus Ponenssel } \alpha_k, \alpha_l \text{-ből.} \end{cases}$$

i -re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$ ($i = n$ -re ez éppen (1)).

$i = 1$ esetén

α_1 axióma esetén:

$\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_1$ (ez az első axióma egy példánya)
 α_1 axióma
 $\phi \Rightarrow \alpha_1$ Modus Ponenssel kapható az előző kettőből.

$\alpha_1 \in \Sigma$ hasonlóan:

$\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_1$ (ez az első axióma egy példánya)
 $\alpha_1 \in \Sigma$
 $\phi \Rightarrow \alpha_1$ Modus Ponenssel kapható az előző kettőből.

ha $\alpha_1 = \phi$:

$\emptyset \vdash \phi \Rightarrow \phi$ ezért $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \phi$.

Indukciós lépés Tegyük fel, hogy ha $j < i$, akkor $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_j$ (kell $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$)

ha α_i axióma vagy $\alpha_i \in \Sigma \cup \{\phi\}$, akkor $i = 1$ esethez hasonlóan $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$.

ha α_i Modus Ponenssel jön α_k, α_l -ből ($k, l < i$), akkor $\alpha_k = \alpha_l \Rightarrow \alpha_i$ és az indukciós feltevés miatt $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_k$ azaz $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow (\alpha_l \Rightarrow \alpha_i)$ és $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_l$

Ekkor a 2. axiómát kétszer kombinálva a modus ponens-sel:

$$(\phi \Rightarrow \alpha_l \Rightarrow \alpha_i) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \alpha_l) \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_i$$

$$(\phi \Rightarrow \alpha_l) \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_i$$

$$\phi \Rightarrow \alpha_i.$$

□

❖ A Ded operátor lezárási operátor, és alaptulajdonságait (vagyis azt a 3 állítást, melyek szerint Ded egy lezárási operáció).

Definíció. Legyen Σ formulahalmaz, $\text{Ded}(\Sigma) = \{\phi : \Sigma \vdash \phi\}$.

Definíció. Modus Ponens: $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$

Definíció. Legyen Σ formulahalmaz, ϕ formula.

$\Sigma \vdash \phi$ ha van olyan véges $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formulasorozat, hogy $\alpha_n = \phi$ és mindent Σ -ból ϕ levezethető $i \leq n$ -re:

- α_i axióma, vagy
- $\alpha_i \in \Sigma$, vagy
- α_i Modus Ponens-el megkapható korábbi α_j -kből.

❖ Írjuk le a struktúrák elemi ekvivalenciájának definícióját. (6 pont)

Definíció: Legyen $\mathcal{A}$ elsőrendű *struktúra*. $\mathcal{A}$ elmélete:

$$\text{TH}(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Legyen $\mathcal{B}$ struktúra. $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ *elemi ekvivalens*, ha $\text{TH}(\mathcal{A}) = \text{TH}(\mathcal{B})$.

❖ Az izomorfizmus fogalma. Izomorf struktúrák elemien ekvivalensek.

Definíció:

$$\mathcal{A} = \langle A, R_i^{\mathcal{A}}, f_j^{\mathcal{A}}, c_k^{\mathcal{A}} \rangle_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}} \quad \mathcal{B} = \langle B, R_i^{\mathcal{B}}, f_j^{\mathcal{B}}, c_k^{\mathcal{B}} \rangle_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}}$$

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ (izomorfok), ha létezik $\varphi : A \rightarrow B$ bijekció úgy, hogy

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A, \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \text{-ra}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_i^{\mathcal{A}} \text{ pontosan akkor, ha } (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)) \in R_i^{\mathcal{B}}$$

$$\varphi(f_j^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f_j^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$$

$$\varphi(c_k^{\mathcal{A}}) = c_k^{\mathcal{B}}$$

Tétel:

- (1) Ha $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$.
- (2) (1) visszafele nem igaz. Sőt, ha $\mathcal{A}$ végtelen struktúra, akkor van olyan $\mathcal{A}'$, amire $\mathcal{A}' \equiv_e \mathcal{A}$, de $\mathcal{A}' \not\cong \mathcal{A}$. (azaz a végtelen struktúrák elsőrendben izomorfizmus erejéig leírhatatlanok.)

❖ Írjuk le a felszálló Löwenheim-Skolem tétel állítását.

Felszálló Löwenheim-Skolem-tétel. Legyen κ végtelen számosság. Minden végtelen struktúra elemien beágyazható egy legalább κ méretű struktúrába. ■

Együttesen a két Löwenheim-Skolem-tételből adódik, hogy

Következmény. Ha egy elméletnek van végtelen modellje, akkor $|t| \omega$ -tól kezdve felfele minden számosságra van akkora modellje. ■

Tehát nem remélhetjük, hogy olyan konkrét és fontos végtelen struktúrát, mint a természetes számok vagy a valós test, izomorfia erejéig lehetne axiomatizálni elsőrendű apparátussal. A Löwenheim-Skolem tételek volt az egyik első olyan jellegű eredmény, ami behatárolta az elsőrendű nyelv kifejezőerejét.

A Löwenheim-Skolem-tételek a teljesség problematikájához is kínálnak egy támadási felületet: ha κ egy számosság, akkor egy elmélet κ -**kategorikus**, ha izomorfia erejéig egyetlen κ méretű modellje van. A Löwenheim-Skolem-tételekből egyenesen következik a

❖ **Legyen $A = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ és legyen $B = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ (a rendezések a szokásosak). Elemien ekvivalensek-e az A és B struktúrák? Indokoljunk. (9 pont)**

Igen, a felszálló Löwenheim - Skolem tételt kell alkalmazni. A két struktúra viszont nem izomorf.

❖ **Igazoljuk, hogy a valós számok teste és a komplex számok teste nem elemien ekvivalens egymással.**

(Két modell elemien ekvivalens, ha a leírás szintjén megkülönböztethetetlenek, azaz ugyanazokat az állításokat teszik igazzá. Ezeknek a modell típusoknak egy részhalmaza az, amikor két struktúra izomorf is; ekkor a két struktúra között van egy bijekció. Ugyanakkor, ha két végtelen struktúra elemien ekvivalens, akkor nem biztos, hogy izomorfak. Ha ugyanis egy T elméletnek van végtelen modellje, és K az elméletnél nagyobb egyenlő számosság, akkor biztos van K számosságú modellje is, ez Löwenheim-Skolem tétel felszálló ága. A Löwenheim-Skolem tétel felszálló ága miatt megállapíthatjuk, hogy két elemien ekvivalens struktúra univerzumai számosságában eltérhet. Ugyanakkor mégis van köztük hasonlóság; két modell pontosan akkor elemien ekvivalens, ha vannak omega hosszú izomorf ultraláncaik (Frayne), vagy izomorf ultrahatványaik.)

❖ **Legyenek A és B elemien ekvivalens, véges alaphalmazú struktúrák, melyek közös nyelve csak véges sok reláció-, függvény-, és konstansszimbólumot tartalmaz. Igazoljuk, hogy ekkor A és B izomorfak.**

❖ **Írjuk le a Helyességi Tétel állítását és bizonyítását. (9 pont)**

Tétel: Legyen Σ formulahalmaz, φ formula. Ha $\Sigma \vdash \varphi$ (φ levezethető Σ -ből), akkor $\Sigma \models \varphi$ (φ következik Σ -ből). Biz.

(2) $\Rightarrow$ (1): tegyük fel, hogy 2. szerint: $\Sigma \not\models \varphi$. Ekkor van olyan véges formula sorozat $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, hogy $\alpha_n = \varphi$ és az összes többi α_i -re ($1 \leq i \leq n$):

- α_i axióma, vagy
- $\alpha_i \in \Sigma$, vagy
- α_i *modus ponens*-sel kapható korábbi α_j -kből.

Ezután i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $\Sigma \models \alpha_i$ minden i -re (így $\Sigma \models \alpha_n$ azaz $\Sigma \models \varphi$).

(*) Vegyük észre, hogy a *modus ponens* helyes: $\{P, P \Rightarrow Q\} \models Q$:
Ha $\sigma \models P$, $\sigma \models P \Rightarrow Q$ akkor σ -ban igaz a Q ($\sigma \models Q$).

Legyen σ olyan interpretáció, hogy $\sigma \models \Sigma$. Ekkor elég megmutatnunk, hogy $\sigma \models \alpha_i$.

Indukciós alaplépés: α_1 vagy axióma, ekkor $\sigma \models \alpha_1$ (táblázattal ellenőrizhető, hogy az axiómák minden interpretációban igazak), vagy $\alpha_i \in \Sigma$.

Tegyük fel, hogy minden $j (< i)$ -re $\sigma \models \alpha_j$.

α_i vagy axióma, vagy $\alpha_i \in \Sigma$ (mint az alaplépésnél), vagy *modus ponens*-sel jön korábbi α_j -kből. Utóbbi esetben van $j, k < i$: $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow \alpha_i$, az indukció miatt $\sigma \models \{\alpha_k, \alpha_j\}$, azaz $\sigma \models \{\alpha_j \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j\}$, így (*) miatt $\sigma \models \alpha_i$.

❖ **Írjuk le az elsőrendű nyelvek Herbrand-univerzumának definícióját.**

2.2. Definíció (Herbrand-univerzum). Legyen Γ elsőrendű formulahalmaz. Ha Γ -ban nincs konstans szimbólum akkor hozzáveszünk egyet. (ha van konstans szimbólum, akkor nem veszünk hozzá). Legyen L' az így kapott nyelv. Ekkor Γ Herbrand-univerzuma L' változó mentes term-jei.

- ❖ **Az L nyelvben c konstansszimbólum f 1-változós, g pedig 2-változós függényszimbólum (és L -ben nincsenek más konstans- és függényszimbólumok). Írjuk le L Herbrand-univerzumának összes olyan elemét, melyben legfeljebb 2 függényszimbólum van. (6 pont)**

$c \mid f(c) \mid f(f(c)) \mid f(g(c, c)) \mid g(c, c) \mid g(f(c), c) \mid g(c, f(c)) \mid g(g(c, c), c) \mid g(c, g(c, c))$

- ❖ **Írjuk le a Kompaktsági Tétel mindkét alakjának állítását és bizonyítását. (9 pont)**

Tétel: Kompaktsági tétel első alakja

Legyen Σ (nulladrendű vagy elsőrendű) formulahalmaz, φ formula.

Ekvivalensek:

- (1) $\Sigma \models \varphi$.
- (2) van olyan véges $\Sigma' \subseteq \Sigma$: $\Sigma' \models \varphi$.

Bizonyítás: (2) $\Rightarrow$ (1) triviális.
 (1) $\Rightarrow$ (2): tegyük fel, hogy $\Sigma \models \varphi$, ekkor a teljességi tétel miatt: $\Sigma \vdash \varphi$.
 Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ egy ilyen levezetés ($\alpha_n = \varphi$), ebben Σ -nak csak véges sok eleme van, ezért $\Sigma' = \Sigma \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ véges és ugyanez a sorozat $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mutatja, hogy $\Sigma' \vdash \varphi$. Végül a teljességi tétel miatt $\Sigma' \models \varphi$.

Tétel: Kompaktsági tétel második alakja

Legyen Σ (nulladrendű vagy elsőrendű) formulahalmaz.

Ekvivalensek:

- (1) Σ -nak van modellje.
- (2) Σ összes VÉGES részének van modellje.

Bizonyítás: (1) $\Rightarrow$ (2) triviális.
 (2) $\Rightarrow$ (1): tegyük fel, hogy Σ összes VÉGES részének van modellje, de Σ -nak nincs. A teljességi tétel (c) pontja miatt Σ ellentmondásos kell legyen. Ekkor létezik α formula, amire $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \neg \alpha$, így van véges $\Sigma' \subseteq \Sigma$: $\Sigma' \vdash \alpha$ és $\Sigma' \vdash \neg \alpha$ (úgy, mint az első kompaktsági tétel bizonyításában). A teljességi tétel miatt $\Sigma' \models \alpha$, $\Sigma' \models \neg \alpha$. Σ' véges, így $(\Sigma'$ -nek is) van $\mathcal{A}$ modellje: $\mathcal{A} \models \Sigma'$. Tehát $\mathcal{A} \models \alpha$ és $\mathcal{A} \models \neg \alpha$, ami viszont nem lehetséges, ellentmondásra jutunk.

- ❖ **Írjuk le a Skolemizálás algoritmusát (a módszer helyességét nem kell bizonyítani). (6 pont)**

2.1. Lemma. Az algoritmus Skolem formára hozásra:

1. Hozzuk prenex formára.
2. Az 1-lépéses skolemizálást ismételtessük, míg van „ $\exists$ ”.

-
1. Hozzuk prenex-alakúra.
 2. Az „ $\exists$ ” kvantorokat küszöböljük ki az alábbiak szerint:
 $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_m \exists y$ esetén vegyünk fel egy m -változós új f függényszimbólumot (Skolem fgv.) $\rightarrow m=0$ esetén f konstans szimbólum
 $\rightarrow$ töröljük „ $\exists y$ ”-t és másutt y előfordulásait cseréljük $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ -re.

❖ **Igazoljuk, hogy egy nulladrendű rezolúciós kalkulus cáfolati teljességét (azaz azt, hogy egy nulladrendű klózalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha levezethető belőle az üres klóz).**

Def: Σ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan k kiértékelés, melyre $k \models \Sigma$.

Tétel:

(1) ha Σ ellentmondásos, akkor kielégíthetetlen (teljességi tétel miatt visszafelé is igaz)

(2) Ekvivalensek:

(a) $\Sigma \models \varphi$.

(b) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Biz: (1): ha Σ ellentmondásos, akkor van α :

$\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Teljességi tétel miatt $\Sigma \models \alpha$ és $\Sigma \models \neg\alpha$.

Tegyük fel, hogy van olyan k : $k \models \Sigma$. Ekkor $k \models \alpha$ és $k \models \neg\alpha$. Így ellentmondásra jutottunk.

(2) $\Sigma \models \varphi$ pont akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos $\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Elemi diszjunkció $\sim$ klóz.

KNF-t azonosítunk a benne szereplő klózok halmazával

Klózt azonosítunk a benne szereplő atomi formulák és negált atomi formulák halmazával.

Üres klóz: $\square$. Ez kielégíthetetlen, mert nem érhető el, hogy min. 1 diszjunkciós komponense igazzá váljon (mivel nincs diszjunkciós komponense).

Γ kielégíthetőségének vizsgálatánál feltehető, hogy Γ elemei klózok

❖ **Igazoljuk, hogy egy nulladrendű klózalmaz pontosan csak akkor kielégíthetetlen, ha szemantikus fája minden ágán van egy cáfoló csúcs.**

Def: **Szemantikus fa:** olyan teljes bináris fa, amelynek szintjeit azonosítottuk az ítélet-változókkal, ágai megfelelnek az interpretációnak.

-Ha C klóz, akkor C illesztése a szemantikus fára:

Sorra vesszük a szinteket: ha a szinthez tartozó ítélet változó: negátlanul / negálva / sehogy sem szerepel C -ben, ennek megfelelően: jobbra / balra / mindkét irányba megyünk tovább

Az így elért csúcsok C cáfoló csúcsai.

Def: Szemantikus fa **zárt**, ha minden ágán van cáfoló csúcs.

Tétel: Ekvivalensek:

(1) Γ kielégíthetetlen

(2) Γ szemantikus fája zárt

Def: Legyen $C = C_1 \vee L$, $C' = C_1' \vee \neg L$, ahol L és $\neg L$ ellentétesen negált atomi formulák.

C és C' rezolvense: $C_1 \vee C_1'$

Tétel: Legyen Γ klózalmaz, c klóz.

$\Gamma \vdash_R c$ (Γ -ból rezolúcióval levezethető c), ha van olyan véges $C_1, \dots, C_n$ klózsorozat, hogy $C_n = c$, és minden i -re

$C_i \in \Gamma$, vagy korábbi C_j -k rezolvense.