ANALÍZIS 1.	**II. ZÁRTHELYI**	**2015. november 19.**
Mérnök informatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 50 perc

---

1. feladat (11 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x(x+2)}$$

függvénynek?

A arctg függvény mindenhol folytonos, és folytonos függvények kompozíciója valamint hányadosa is folytonos, amennyiben a nevező nem 0 (**2p**), így a függvénynek csak az $x = 0, -2$ pontokban van szakadása (**1p**).
A arctg függvény korlátos (**2p**), így $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (**1p**), tehát az $x = 0$ pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. (**1p**)

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = -2 \lim_{y\to\mp\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\pi, \qquad \textbf{(3p)}$$

tehát az $x = -2$ pontban a függvénynek véges ugrása van. (**1p**)

---

2. feladat (11 pont)
Adja meg az alábbi függvény deriváltfüggvényét, valamint érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^3 .$$

$x \neq 0$ esetén a szorzat-, illetve összetett függvény deriválási szabályából

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^3 + 3\sqrt[5]{x^2}(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x})^2 \cdot \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \operatorname{ch}\sqrt[5]{x}\,. \qquad \textbf{(4p)}$$

$$f'(0) \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^2}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^3}{x} \overset{\textbf{2p}}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}\right)^3 \overset{\textbf{1p}}{=} \left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sh} y}{y}\right)^3 \overset{\textbf{1p}}{=} \left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{ch} y}{1}\right)^3 = 1.$$

Mivel $f(0) = 0$, így az érintő egyenlete $y = x$ (**2p**)

---

3. feladat (6+5 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(2x)}{\operatorname{ch}(3x)-1}, \qquad b)\ \lim_{x\to\pi} (-\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$a)$ $\frac{0}{0}$ típusú határérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(2x)}{\operatorname{ch}(3x)-1} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}(2x)\frac{2}{\cos^2(2x)}}{3\operatorname{sh}(3x)} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\operatorname{sh}(3x)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{3\operatorname{ch}(3x)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{8}{9}$$

$b)$ 1^∞ típusú határérték:

$$\lim_{x\to\pi} (-\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to\pi} \frac{\ln(-\cos x)}{\sin x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\sin x}{-\cos x}}{\cos x}} \overset{\mathbf{1p}}{=} e^0 = 1.$$

---

4. feladat (9 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = (x^2 - 8x + 4)e^{2x}$ függvény?

$D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (2x-8)e^{2x} + 2(x^2-8x+4)e^{2x} = (2x^2-14x)e^{2x}$,

$$f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (4x-14)e^{2x} + 2(2x^2-14x)e^{2x} = (4x^2-24x-14)e^{2x} = 0$$

az $x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144+56}}{4} = 3 \pm \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ pontokban (**2p**), vagyis a függvény a $\left[3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, 3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$ intervallumon konkáv, a $\left[-\infty, 3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$ és a $\left[3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \infty\right]$ intervallumokon pedig konvex. (**3p**)

---

5. feladat (8 pont)
Létezik-e az

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{x + 2}$$

függvénynek minimuma, illetve maximuma a $[-4, -1]$, valamint a $[-6, -3]$ intervallumon? Ha igen, mennyi?

$\lim_{x \to -2\pm} \frac{x^2 - 2x - 4}{x + 2} = \pm\infty$, vagyis az $[-4, -1]$ intervallumon nincs se minimmum, se maximum. (**3p**)
A $[-6, -3]$ intervalllumon a függvény folytonos, tehát Weierstrass 2. tétele miatt felveszi a szélsőértékeit (**1p**).

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x - 4)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0, \qquad \textbf{(1p)}$$

tehát lokális szélsőértékek a $0 \notin [-6, -3]$, $-4 \in [-6, -3]$ pontokban lehetnek (**1p**). $f(-6) = -11$, $f(-4) = -10$, $f(-3) = -11$, vagyis a maximum -10, a minimum pedig -11 (**2p**).