1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. pótZH. 2021-11-25 **Neptun:** ________ **Név:** ______________________________

*A dolgozat feladatainak **eredményeit** mind erre az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat** a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. Válaszoljon az alábbi kérdésekre (mindegyik 0 vagy 1 pont)! *(4 pont)*

a) Karikázzuk be az alábbi struktúrák közül azokat, amelyek testek!

$$\mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_7,\ \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{N}\quad \mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}_7$$

b) Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1. Minden valós diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^{\mathsf{T}}$$

alakban, ahol az $\mathbf{x}_i$ vektor a λ_i-hez tartozó sajátvektor, $\mathbf{y}_i$ pedig a hozzá tartozó bal sajátvektor. I

2. Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ sajátfelbontás $\mathbf{C}$ mátrixa a sajátvektorokból alkotott bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixa. I

3. $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha van n független sajátvektora. I

c) Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1. $\mathbf{A}$ ortogonálisan hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha van olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$. I

2. $\mathbf{A}$ ortogonálisan hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha van olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{Q}$. I

3. $\mathbf{A}$ pontosan akkor normális, ha unitéren diagonalizálható. I

d) Mit tudunk az alábbi négyzetes mátrixok sajátértékeiről:

Ortogonális mátrix $\forall$ sajátértéke… 1 absz. értékű

Ferdén önadjungált mátrix $\forall$ sajátértéke… imaginárius

Nilpotens mátrix $\forall$ sajátértéke… 0

2. *(4 pont)* Mi az x^2 függvénynek a legfeljebb elsőfokú polinomok terére eső merőleges vetülete (vagyis melyik lineáris függvény van legközelebb x^2-hez), ha $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ az euklideszi térben a skaláris szorzás.

A Gram-mátrixszal felírt egyenletből:

$$-1/6 + x$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x - 2y \phantom{{}+3z} = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}$$

egyenletrendszer összes megoldását a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve!

A megoldás a Gauss–Jordan-módszerrel és a sortérbe eső megoldással kifejezve (mely a minimális abszolút értékű is egyben):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

4. *(4 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását!

GS-ortogonalizáció: $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{*i}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, -1)$,
$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 1)$, mert $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$,
$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = (-1, -1, 1, 1)$
az egységvektorok: $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)$, ezek mátrixa $\mathbf{Q}$, amiből $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. *(4 pont)* Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix Cholesky-felbontását!

A Cholesky-felbontás $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}$, ahol

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$