Pótló zárthelyi dolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek A és B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Legyen továbbá C olyan esemény, amelyre az A és C illetve a B és C eseménypárok függetlenek, és tegyük fel, hogy egyszerre mindhárom esemény nem következhet be. Számoljuk ki az A, B és C események valószínűségét, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{8}$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{19}{40}$.

   Megoldás:
   (2 pont) Definíció szerint $\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
   (1 pont) tehát $\mathbb{P}(B) = 2\,\mathbb{P}(A \cap B)$
   (1 pont) ugyanígy $\mathbb{P}(A) = 2\,\mathbb{P}(A \cap B)$
   (1 pont) amiből egyrészt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ is következik,
   (1 pont) másrészt a Poincaré-formulát alkalmazva
   (2 pont) $\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
   (1 pont) amiből a fentiek alapján: $\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{2}\,\mathbb{P}(A)$
   (1-1 pont) így $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ és mivel egyenlőek, ezért $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$
   A Poincaré-formulát alkalmazva
   (2 pont)

   $$\frac{19}{40} = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

   (2 pont) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, hiszen egyszerre nem következhetnek be.
   (2 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
   A fenti egyenlet tehát így alakul
   (1 pont)

   $$\frac{19}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \mathbb{P}(C) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(C) - \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(C) + 0$$

(2 pont) ahonnan $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}$

2. Három rekeszben vannak a Kőbányai és Borsodi sörök a presszóban. Az elsőben $12 - 12$, a másodikban 16 Kőbányai és 8 Borsodi, a harmadikban 6 Kőbányai és 18 Borsodi. A kocsmáros nem szeret feleslegesen mozogni, ezért $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a hozzá legközelebbi első rekeszből vesz ki egy üveget véletlenszerűen, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel a következő, második rekeszből választ egy üveget véletlenszerűen és $\frac{1}{6}$ valószínűséggel megy csak a el a harmadik rekeszig és emel ki onnan egyet véletlenszerűen.
(a) Mekkora valószínűséggel kap a sört rendelő vendég Borsodit?
(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a kocsmáros elfáradt egészen a harmadik rekeszig és onnan adott egy üveg sört feltéve, hogy Borsodit kapott a vendég?

Megoldás:
Tekintsük a következő eseményeket:
(2 pont) B=Borsodit kap a vendég, A_i=a kocsmáros az i. rekeszből vesz ki egy sört, $i = 1, 2, 3$
(a) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{6}$ adottak, a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(B)$
(1 pont) A teljes valószínűség tételéből
(2 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3)\,\mathbb{P}(A_3)$
(2-2-2 pont) $\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B|A_3) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$
(2 pont) Behelyettesítve: $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{35}{72}$ $(\approx 0,4861)$
(b)
(1 pont) A kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(A_3|B)$
(1 pont) Bayes-tételből
(2 pont) $\mathbb{P}(A_3|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_3)\,\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B)}$
(2 pont) behelyettesítve: $\mathbb{P}(A_3|B) = \dfrac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{35}{72}} = \dfrac{9}{35}$ $(\approx 0,2571)$

3. Válasszunk két számot egymástól függetlenül a $(0, 3)$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szám hányadosa $\frac{1}{3}$ és 3 közé esik?

Megoldás:
(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy pont választásával a $[0, 3] \times [0, 3]$ négyzetben.
(2 pont) Ez az Ω eseménytér.
(2 pont) A kedvező terület ezen téglalapnak az $y = \frac{1}{3}x$ és az $y = 3x$ egyenes közé eső része.
(3 pont) jó ábra
(4 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség= $\dfrac{T_{kedvezo}}{T_\Omega}$
(2 pont) $T_\Omega = 3 \cdot 3 = 9$
(1 pont) Most célszerű a nem kedvező területet kiszámolni, ami két derékszögű háromszög egyenként $\frac{3 \cdot 1}{2}$ területűek.
(1 pont) $T_{kedvezo} = T_\Omega - T_{kedvezotlen}$
(1 pont) $T_{kedvezo} = 9 - 2\frac{3 \cdot 1}{2} = 6$
(Ha másképp számolja ki jól a kedvező terület nagyságát, akkor is járnak a pontok.)
(2 pont) A kérdezett valószínűség tehát $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

4. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{x}{c}}, & \text{ha } 0 < x \leq c, \\ 1, & \text{ha } c < x, \end{cases}$$

ahol $c > 0$ egy pozitív valós szám.
Határozzuk meg c értékét, ha tudjuk, hogy X várható értéke 1.

Megoldás:
(2 pont) $\mathbb{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$
(2 pont) az f_X sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriválásával kapható meg
(2 pont) $f_X(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{c}$
(2 pont) $= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{c \cdot x}}$, ha $0 < x \leq c$
(2 pont) $f_X(x) = 0$ különben
(2 pont) $1 = \mathbb{E}\, X = \int_0^c x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{c \cdot x}}\, dx$
(2 pont) $= \int_0^c \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{c}}\, dx$
(2 pont) $= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{c}}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^c dx$
(2 pont) $= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}} = \frac{c}{3}$
(2 pont) tehát $c = 3$

5. Egy társasjátékban a soron következő játékos a saját körében dob egy kockával, és a dobás eredményének megfelelően lép, kivéve, ha hatost dob. Hatos esetén újra dob a kockával, és ezt egészen addig ismétli, amíg 6-ostól különböző eredmény adódik. Végül a játékos lépéseinek száma az adott körben dobott összes szám összege.
Határozzuk meg az egy játékos által egy körben megtett lépések számának várható értékét.

Megoldás:
Jelölje X a kockadobások számát, Y az utolsó dobás értékét és Z a játékos lépéseinek számát.
(3 pont) $X \sim Geo\left(\frac{5}{6}\right)$ (2 pont, hogy geometriai, 1 pont a paraméter)
(3 pont) $\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{5}$, ha $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(3 pont) $Z = (X - 1) \cdot 6 + Y$
(3 pont) $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(6(X - 1) + Y) = 6\,\mathbb{E}(X) - 6 + \mathbb{E}(Y)$
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{6}{5}$, mert geometriai
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \sum_i i \cdot \mathbb{P}(Y = i)$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5}1 + \frac{1}{5}2 + \frac{1}{5}3 + \frac{1}{5}4 + \frac{1}{5}5 = 3$
(2 pont) $\mathbb{E}(Z) = \frac{21}{5} = 4,2$

6.* Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül 1-p valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy hárommotoros?

Megoldás:
A hárommotoros gép akkor tud repülni, ha legalább 2 motorja működik, azaz legfeljebb 1 hibásodik meg. Legyen X a hárommotoros gépben repülés közben meghibásodó motorok száma.
(1 pont) $X \sim B(3, 1 - p)$
(ha ez nem szerepel, de jól számolja a valószínűséget, akkor nem kell levonni)
(3 pont) $\mathbb{P}$(a hárommotoros tud repülni)$=\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0) = 3(1 - p)p^2 + p^3$
Az ötmotoros gép akkor tud repülni, ha legalább 3 motorja működik, azaz legfeljebb 2 hibásodik

meg. Legyen Y az ötmotoros gépben repülés közben meghibásodó motorok száma.
(1 pont) $X \sim B(5, 1-p)$
(ha ez nem szerepel, de jól számolja a valószínűséget, akkor nem kell levonni)
(3 pont) $\mathbb{P}$(az ötmotoros tud repülni)$=\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 0) = 10(1-p)^2p^3 + 5(1-p)p^4 + p^5$
(2 pont) Az ötmotoros biztonságosabb, ha $10(1-p)^2p^3 + 5(1-p)p^4 + p^5 > 3(1-p)p^2 + p^3$
(1 pont) azaz, ha $10(1-p)^2p + 5(1-p)p^2 + p^3 > 3(1-p) + p$
(1 pont) átrendezve, ha $10(1-p)^2p + 5(1-p)p^2 + p^3 + 2p - 3 > 0$
(1 pont) átrendezve, ha $6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 > 0$
(3 pont) a baloldal szorzattá alakítható: $3(p-1)^2(2p-1)$
(1 pont) az első tényező a négyzeten van, így nem lehet negatív, és 0 is csak akkor ha $p = 1$, tehát
(2 pont) a pozitivitás feltétele, hogy $2p - 1 > 0$ és $p < 1$
(1 pont) azaz a feltétel: $\frac{1}{2} < p < 1$