Algel I. gyakorlat

Nagyságrendek és vegyes feladatok

2012. szeptember 7.

1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén (a) n-nel, (b) n^3-bel, illetve (c) 2^n-nel arányos?

2. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = T(n-1) + 3$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$-t zárt alakban!

3. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 1$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$-t zárt alakban!

4. Egy f fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépnünk. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjunk algoritmust ami meghatározza, hogy a létra aljától fel tudunk-e jutni a létra legfelső fokára! (Feltehető, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni.) Az algoritmus lépésszáma legyen $c \cdot f$, ahol c valami fix konstans.

5. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás-e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet!

6. Adjunk hatékony algoritmust, amely egy $G = (V; E)$ irányítatlan gráfban talál egy olyan $S \subset V$ ponthalmazt, melyre az $(S; V \backslash S)$ mérete (azaz az S és $V \backslash S$ közötti élek száma) legalább $|E|/2$!

7. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mit mondhatunk az alábbi állitások igazságáról?
   (a) Ha valami nem hömpörő,akkor az surjancs.
   (b) Ha valami hömpörő, akkor az nem surjancs.
   (c) Ha valami nem surjancs, akkor az hömpörő.
   (d) Ha valami nem surjancs, akkoraz nem hömpörő.
   (e) Ha valami surjancs, akkor az nem hömpörő.

---

8. **[ZH: 2012. március 26.]** Tudjuk, hogy az $f(n), g(n)$ pozitív értékeket felvevő függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$. Következik-e ebből, hogy $2012^{\log n} + f(n) = O(\frac{1}{2012}n^{2012} + g(n))$?

9. **[PPZH: 2012. május 17.]** Tudjuk, hogy az $f(n), g(n)$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = \Theta(n^2 \log n + 5n)$ és $g(n) = \Theta(n \log n + n^5)$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(g(n))$?

10. Bizonyítsuk be, hogy
    (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$,
    (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$,
    (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$,
    (d) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)) \quad (f(n), g(n) > 0)$!

11. Igaz-e, hogy
    (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$;
    (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?

12. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

    $f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$

13. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
    (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma x^3?
    (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ? (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

14. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

15. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?

Algel II. gyakorlat

Dinamikus programozás

2012. szeptember 14.

www.cs.bme.hu/∼akorosi

1. Oldjuk meg a hátizsák-problémát az alábbit esetben! Legyen $n = 4$, a tárgyak súlyai $s_1 = 7, s_2 = 5, s_3 = 4, s_4 = 1$ és értékei $v_1 = 20, v_2 = 14, v_3 = 10, v_4 = 1$, a súlykorlát $b = 10$.

2. **[ZH: 2008. március 28.]** Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!

3. Adott egy fa, melynek csúcsaihoz súlyok vannak rendelve. Adjunk lineáris algoritmust, ami meghatározza a fában található maximális súlyú független ponthalmaz súlyát!

4. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1a_2\cdots a_n$ és a másik $b_1b_2\cdots b_m$, akkor olyan $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ indexeket keresünk, hogy

$$a_{i+1} = b_{j+1}, a_{i+2} = b_{j+2}, \ldots, a_{i+t} = b_{j+t}$$

teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjon erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust!

---

5. **[Vizsga: 2007. május 29.]** Legyen $w = w_1w_2\cdots w_n$ egy n betűből álló szó. Hívjuk részszónak w egy tetszőleges $w_iw_{i+1}\cdots w_{i+k}$ darabját ($1 \le i \le n-1$, $1 \le k \le n-i$). Adjunk algoritmust, ami $O(n)$ lépésben meghatározza az összes a-val kezdődő és b-re végződő részszó számát.

6. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges egész számok és $m < n^2$ egész. Adjunk algoritmust, amely a bináris alakjukkal megadott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és m számokról eldönti polinom időben, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül kiválasztható-e néhány úgy, hogy az összegük m-mel osztva egyet adjon maradékul!

7. Adjunk algoritmust, ami egy n csúcsú fában lineáris időben meghatározza a fában levő leghosszabb út hosszát!

8. **[Vizsga: 2009. június 11.]** A véges hosszú 0-1 sorozatok egy részét valamilyen szempontból jónak tekintjük, a többit rossznak. Van egy A algoritmusunk, mely adott n hosszú 0-1 sorozatról $O(\log(n!))$ lépésben megmondja, hogy a sorozat jó vagy rossz.

   Adjon olyan eljárást, mely A-t felhasználva, ha adott egy m hosszú 0-1 sorozat, $y = y_1y_2\cdots y_m$, akkor eldönti, hogy y előáll-e néhány jó sorozat egymás után fűzéséből. Az eljárás lépésszáma összesen legyen $O(m^4)$.

9. **[ZH:2012.04.25]** Egy n-szer n-es táblázat minden kockájában egy (nem feltétlenül pozitív) egész szám van írva vagy rózsaszínnel vagy sárgával Sétát szeretnénk tenni a táblázatban, bárhol indulhat és végződhet, egy lépésben vagy balra, vagy felfelé léphetünk egyet, de csak akkor, ha közben színt is váltunk. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben megtalálja a legértékesebb sétát (a séta értéke az érintet mezök értékeinek az összege)!

10. **[Vizsga: 2012.06.14]** Két ügynök érkezik Csillagvárosba. A város úthálózatát egy $n+1$ csúcsú irányítatlan csillag írja le, ahol a központi v_0 ponthoz csatlakoznak a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok, ezekre az élekre ismert, hogy hány percig tart végig utazni rajtuk. Minden v_i csúcshoz tartozik még egy h_i szám is, ekkora bevételt lehet elérni a csúcs meglátogatásával. Az ügynökök egymástól függetlenül haladnak, de mindketten a v_0-ból indulnak és ott is fejezik be, egy v_i csúcsba legfeljebb egyikük látogat el, és legfeljebb egyszer, az utazásra összesen fejenként legfeljebb T percük van. Javasoljon $O(nT^2)$ költségü algoritmust, mely meghatározza a kettőjük által közösen elérhető maximális hasznot!

11. Egy n szóból álló szöveget kell sorokra tördelni. A szöveg i-edik szava ℓ_i karakterből áll, egy sor s karakter hosszú. Ha egy sor a szöveg i-edik szavával kezdődik és a j-edik szóval végződik, akkor az elválasztó szóközöket is figyelembe véve $t = s-(\ell_i+\ell_{i+1}+\cdots+\ell_j+j-i)$ üres hely marad a sor végén. Egy ilyen sor hibája legyen t^2. A tördelés hibája a nem üres sorok hibáinak összege. Adjunk $O(n^2)$ lépéses algoritmust egy legkisebb hibájú tördelés meghatározására! (A szavak sorrendje rögzített.)

12. Adottak $M_1, M_2, \ldots, M_n$ munkák $H_1, H_2, \ldots, H_3$ határidőkkel és $P_1, P_2, \ldots, P_n$ profitokkal. Mindegyik munka elvégzése pontosan 1 napunkba kerül. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy mely munkákat vállaljuk el a profit maximalizálása érdekében!

Algel III. gyakorlat

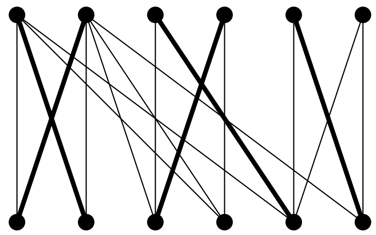
Bejárások, párosítások

2012. szeptember 21.

www.cs.bme.hu/∼akorosi

1. Hogy néz ki egy irányítatlan teljes gráf szélességi bejárása?

2. Egészítsük ki maximális párosítássá a megadott párosítást a javítóutas módszerrel az alábbi páros gráfban!



3. Éllistával adott a súlyozott élű $G(V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az $1, 2, 3$ számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására!

4. Legfeljebb hány komponensből állhat egy irányított gráf szélességi bejárása során keletkező erdő?

5. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és és merre akar rajta áthaladni.) Írjon le egy algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n + e)$, ahol n a csúcsok és e az élek száma.

6. Adott éllistával egy n pontú, e élű G összefüggő irányítatlan gráf. Adjunk $O(e)$ költségű algoritmust olyan $X \subset V(G)$ központi ponthalmaz keresésére, melyre $|X| \leq n/2$ teljesül! Az $X \subseteq V(G)$ egy *központi ponthalmaz*, ha G minden pontja vagy X-beli, vagy egyetlen éllel elérhető valamelyik X-beli pontból.

7. **[ZH: 2007. április 27.]** Kutyasétáltatáskor egy parkban egy gazda rögzített, egyenes szakaszokból álló útvonalon halad, aminek töréspontjai $t_1, \ldots, t_n$, a bejáratot jelölje t_0, a kijáratot t_{n+1}. A kutyája szabadon szaladgál, de a t_i pontokban találkozik a gazdájával. A t_i és t_{i+1} pontokban való találkozás között a kutya szeretne egy fát is meglátogatni (minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legfeljebb egyet-egyet). Legyenek adottak az $s(t_i, t_{i+1})$ távolságok ($0 \leq i \leq n$), valamint minden fának az összes t_i ponttól vett távolsága. Tegyük fel, hogy két találkozás között a kutya legfeljebb kétszer akkora távolságot tud megtenni, mint a gazda. Adjon algoritmust, ami segít a kutyának eldönteni, hogy mikor melyik fát látogassa meg ha a kutya célja, hogy minél több fánál járjon. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2 f + n f^2)$, ahol f a parkban levő fák számát jelöli.

8. **[ZH:2012.030.26]** Egy városban 17 busztársaság közlekedik, az egyes társaságok buszait csak a társaság saját buszbérletével lehet használni. Nekünk maximum két társaság bérletére van pénzünk (a bérletek ugyanannyiba kerülnek). A város buszhálózatát ismerjük: bármely két megállóra adott, hogy van-e közöttük közvetlen járat (amelyik közben nem áll meg máshol) és ha igen, akkor melyik társaság üzemelteti (lehet több társasásgnak is járata ugyanott). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú eljárást, ami n buszmegálló esetén eldönti, hogy melyik két bérletet vegyük meg, hogy a lehető legtöbb buszmegállóba el tudjunk jutni a lakásunkhoz legközelebb eső megállóból gyaloglás nélkül. (Az átszállások számára nincs korlátozás.)

9. **[PZH:2012.04.25]** Ürhajónkkal egy véges, egy dimenziós univerzumban ragadtunk, amelynek pontjait 0 és r közötti egész koordinátákkal azonosítjuk. A közlekedést a $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq r$ koordinátákon elhelyezett *tükörteleportok* segítik: egy-egy tükörteleport aktiválásakor ürhajónk pozíciója tükröződik a teleport pozíciójára, azaz például az y koordinátáról a $2x_i - y$ koordinátára jutunk (vagy megsemmisülünk, ha ezzel kilépnénk az univerzumból). Az s koordinátáról kiindulva szeretnénk a t koordinátán található - menekülést jelentő - féregjárathoz jutni. Adjon $O(r^2)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy ehhez legkevesebb hányszor kell teleportálnunk!

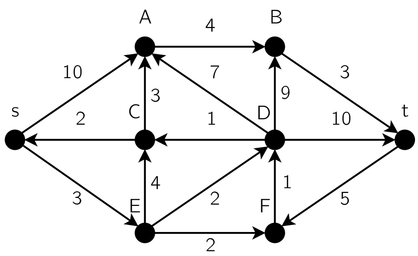
10. **[PPZH:2012.05.17]** Éllistával adott egy n csúcsú irányítatlan barátsági gráf, ahol minden pont fogszáma legfeljebb $\sqrt{n}$. Nevezzünk két embert *kettő-barátnak*, ha vagy barátok, vagy van közös barátjuk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú megoldást annak az embernek a meghatározására, akinek a legtöbb kettő-barátja van! Ha több ilyen is van, akkor keressük meg az összeset.

Algel IV. gyakorlat

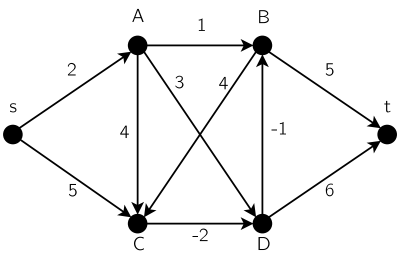
Legrövidebb utak

2012. szeptember 28.

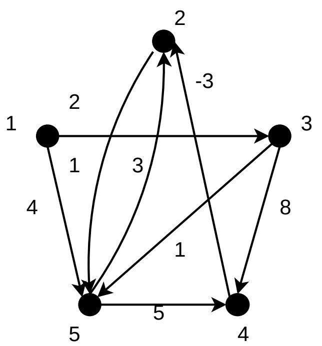
1. Határozzuk meg az alábbi gráfban Dijkstra-algoritmussal a legrövidebb s-ből induló utakat a többi csúcsba, nyomon követve az algoritmust!



2. Határozzuk meg az alábbi gráfban Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb s-ből induló utakat a többi csúcsba, nyomon követve az algoritmust!



3. **[Vizsga: 2009. június 4.]** Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az F_4 tartalmazza az ismert úthosszakat.

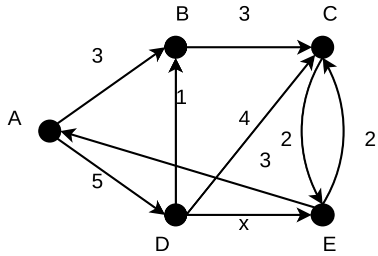


$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hogyan változik a táblázat amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?

4. **ZH: 2012.03.26** Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 6$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = -2$, $s(D, C) = -4$, $s(D, E) = -2$, $s(E, F) = 4$. Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az A csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására.

5. **[ZH: 2009. április 24.]** Dijsktra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Minden lépésnél írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit.



6. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra algoritmusban szereplő $D[]$ tömb változásait mutathatja. Adjuk meg a legrövidebb utakat tartalmazó $P[]$ tömb állapotait is!

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

7. Egy G gráfban pontosan egy él súlya negatív, és nincs a gráfban negatív összsúlyú irányított kör. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására!

8. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n pontú, súlyozott élű irányított gráf! Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására!

9. **Vizsga: 2012.06.07** Egy város úthálózata adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányított gráf írja le. A gráf egyik csúcsában lévő állatkertből öt elefánt szökött meg, ezeket szerencsére elfogták, a város öt különböző pontján tartják őket ketrecben. Szeretnénk egy elefántszállító autóval mindet begyűjteni, de az elefántok és az autó is nehéz, nem minden úton tudunk vele haladni. Minden élre ismert, hogy ott hány elefánttal tudunk közlekedni és élhez tartozó út hossza is. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti(az állatkertből indulva és érkezve), és ha igen megad egy legrövidebb útvonalat is.

Algel V. gyakorlat

Kupac és rendezés

2012. október 12.

1. Építsünk kupacot a következő tömbből: $[4, 11, 9, 10, 5, 6]$. Ezután szúrjuk be a következő számokat: $8, 1, 2, 16$. Levezetésként csináljunk 3 MINTÖR-t!

2. **[ZH: 2012.03.26]** Egy szalagon $n = 2^k$ különböző súlyú csomag várakozik, ezeket szeretnénk sorbarendezni súly szerint növekvően. Két eszközünk van ehhez: egy mérlegelő szerkezet, ami a sorban elöl álló és egy tetszőleges másik csomagról megmondja, hogy melyik a nehezebb (anélkül, hogy a csomagok helyzetén változtatna) és egy daru, ami tetszőleges csomagot a sor végére tud rakni (ekkor persze a hátrarakott csomag utáni csomagok mind egy-egy hellyel előrébb csúsznak). Adjon olyan eljárást, ami a fenti két műveletből $O(nk)$-t használva sorbarakja az $n = 2^k$ csomagot. A fenti két eszközön kívül mást nem tehetünk a csomagokkal, pl. nem rakhatjuk le őket a szalagról, nem mérhetjük meg egyesével a súlyukat, de azt pl. nyilvántarthatjuk, hogy melyik csomagokat mozgattuk eddig.

3. **[ZH: 2010. április 19.]** Igaz-e, hogy az $A[1] = 3$, $A[2] = 15$, $A[3] = 10$, $A[4] = 25$, $A[5] = 29$, $A[6] = 17$, $A[8] = 28$, $A[9] = 30$ tömb egy kupacot tartalmaz? Ha igen, rajzolja le a kupacot és a rajzon hajtsa végre a BESZÚR(11) műveletet!

4. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Egy kupacba beraktunk egy új x elemet, majd végrehajtottunk egy MINTÖR műveletet. Mikor fordul elő, hogy végül az eredeti kupacot kapjuk vissza?

5. Adott egy n elemet tartalmazó kupac és egy k kulcs. Keressük meg a kupac k-nál kisebb elemeit! Ha m ilyen elem van, akkor az algoritmus $O(m)$ elemi lépést használhat.

6. Adjunk konstans szorzó erejéig optimális költésgű algoritmust az alábbi problémára!
INPUT: Egy $A[1 : n]$ tömb, amely eredetileg az $1, \dots, n$ számokat tartalmazta kupacba rendezve, de öt elem megsérült, és a helyére $*$ került.
FELADAT: Találjuk meg a tömb összes olyan kitöltését, ami lehetett az eredeti!

7. Tervezzünk olyan adatszerkezetet, ami egy rendezett halmaz elemeinek tárolására szolgál. A megvalósítandó műveletek: *Felépít*(n): n elemből felépíti a struktúrát; *Mintör*, *Maxtör*: a min. illetve max. elem törlése; *Beszúr*(x): az x elemet a struktúrába illeszti. Az egyes műveletek költsége ne legyen több, mint *Felépít*: $O(n)$; *Mintör, Maxtör, Beszúr*: $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.

8. **[ZH: 2004. március 29.]** Az $A[1 \dots n]$ tömbben egész számokat tárolunk, ugyanaz a szám többször is szerepelhet. Határozzuk meg $O(n \log n)$ lépésben az összes olyan számot, amelyik egynél többször fordul elő a tömbben.

9. **[ZH: 2009. április 24.]** Adottak a $p_0 = (0, 0), p_1 = (x_1, y_1), \dots p_n = (x_n, y_n), p_{n+1} = (100, 0)$ pontok a síkban ($n \geq 1$) úgy, hogy $1 \leq i \leq n$ esetén x_i és y_i racionális számok, $0 < x_i < 100$, és semelyik három pont nem esik egy egyenesbe. Egyenes szakaszokkal akarjuk ezeket a pontokat valamilyen sorrendben összekötni úgy, hogy egy $n+2$ csúcsú zárt töröttvonalat kapjunk, amiben a behúzott szakaszok nem metszik egymást. Adjon egy $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, melyik pontot melyikkel kössük össze!

10. Legyen adott egy egészekből álló $A[1 : n]$ tömb valamint egy b egész szám. Szeretnénk hatékonyan eldönteni, hogy van-e két olyan $i, j \in \{1, \dots, n\}$ index, melyekre $A[i] + A[j] = b$. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n \log n)$ időben!

11. **[Vizsga: 2009. június 11.]** Adott a számegyenesen n intervallum, $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$. Azt akarjuk tudni, hogy együtt milyen hosszú részt fednek le a számegyenesből (azaz, hogy mennyi az $\cup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ összhossza). Adjon $O(n \log n)$ lépéses algoritmust ennek a hossznak a meghatározására!

12. Adottak a sík egész koordinátájú $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ koordinátájú pontjai. Javasoljunk $O(n)$ költségű módszert olyan $P_i \neq P_j$ pontok kiválasztására, amelyeken átmenő egyenes által meghatározott félsíkok közül az egyik tartalmazza az összes pontot!

13. **[Vizsga: 2004. június 10.]** Az n méretű (nem feltétlenül rendezett) A tömb elemei különböző pozitív egész számok. Adjon algoritmust, amely meghatároz egy $1 \leq k \leq n$ számot és kiválaszt k különböző elemet az A tömbből úgy, hogy a kiválasztott elemek összege nem több, mint k^3. Ha nincs ilyen k, akkor az algoritmus jelezze ezt a tényt! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \log n)$! (Két szám összehasonlítása, összeadása vagy szorzása egy lépésnek számít.)

14. Hány összehasonlításra van szükségünk, hogy n elem közül a két legkisebbet meghatározozhassuk?

Algel VI. gyakorlat

Rendezés, keresőfák

2012. október 19.

1. Rendezzük a következő láncokat a radix rendezés segítségével: $abc, acb, bca, bbc, acc, bac, baa$!

2. **[ZH: 2007. április 27.]** A valós számokból álló $a_1^2 \ldots a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjon $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots a_n$ sorozat!

3. Az $A[1:n]$ tömbben egy rendezett univerzum n különböző eleme volt, nagyság szerint növekvő sorrendben. Valaki időközben megkeverte a tömb elemeit, de csak annyira, hogy minden egyes elem új helye az eredetitől legfeljebb 5 távolságra esik. Adjunk $O(n)$ futásidejű algoritmust az eredeti állapot helyreállítására!

4. A (növekvően) rendezett $A[1:n]$ tömb k elemét valaki megváltoztatta. A változtatások helyeit nem ismerjük. Javasoljunk $O(n + k \log k)$ költségű algoritmust az így módosított tömb rendezésére!

5. Adott egy dobozban n különböző méretű anyacsavar, valamint egy másik dobozban a hozzájuk illő apacsavarok. Kizárólag a következő összehasonlítási lehetőségünk van: egy apacsavarhoz hozzápróbálunk egy anyacsavart. A próbának háromféle kimenete lehet: apa<anya, apa=anya, apa>anya, annak megfelelően, hogy az apacsavar külső átmérője hogyan viszonyul az anyacsavar belső átmérőjéhez. Szeretnénk minden anyacsavarhoz megtalálni a megfelelő apacsavart. Adjunk erre a feladatra *átlagosan* $O(n \log n)$ összehasonlítást felhasználó módszert!

---

6. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy $KERES(x)$ hívás során a keresési út mentén a $20, 18, 3, 15, 5, 8, 9$ kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha nem lehetséges, indokolja meg miért nem, ha pedig lehetséges, határozza meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet.

7. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x, 7, 5, y, 2. Mi lehet az x és mi az y?

8. Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B-beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U-beli csúcs kulcsánál, és minden U-belis csúcs kulcsa kisebb tetszőleges J-beli csúcs kulcsánál?

9. Adott n pont a síkon, melyek páronként mindkét koordinátájukban különböznek. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy bináris fa létezik, melynek csúcsai az adott n pont, és az első koordináta szerint a keresőfa tulajdonsággal, a második szerint a kupac tulajdonsággal rendelkezik! (A kupac tulajdonságba most nem értjük bele, hogy a fa teljes bináris fa legyen.)

10. **[Vizsga: 2009. május 28.]** Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v-nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

11. Adott egy $n = 2^k - 1$ pontú teljes bináris keresőfa. A fában tárolt elemek egészek az $I = [1, 2^k]$ intervallumból, és egy szám legfeljebb egyszer fordul elő a fában. Utóbbi feltétel szerint pontosan egy olyan i egész szám van 1 és 2^k között, amely nincs a fában. Adjunk egy hatékony módszert i meghatározására!

12. Egy fában az x csúcs *súlya* legyen x leszármazottainak száma. Egy bináris fát szigorúan binárisnak mondunk, ha a levelek kivételével minden csúcsnak pontosan 2 fia van. Tegyük fel, hogy egy szigorúan bináris fa minden x csúcsára fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{s\acute{u}ly(bal(x))}{s\acute{u}ly(jobb(x))} < 2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez csakis egy teljes fa lehet, azaz ha k szintje van, akkor a csúcsok száma $2^k - 1$. *(Ez nem kifejezetten keresőfázós feladat, de úgy általában érdekes.)*

Algel VIII. gyakorlat

2-3 és B-fák

2012. március 28.

1. Építsünk 2-3 fát a következő elemekből, ebben a sorrendben: D, B, E, A, C, F, G! Ezután töröljük D-t és B-t!

2. Egy 2-3 fának 10^9 levele van. Mekkora a szintjeinek minimális, ill. maximális száma? És ha B_{20} fát használnánk?

3. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy 2-3 fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illetve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?

4. **[Vizsga: 2009. június 17.]** Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvélteli pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjon meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!
   BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – $O(\log n)$
   KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal $(FP = p)$ rendelkező jelentkezők számát határozza meg – $O(\log n)$
   KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – $O(1)$

5. Az $[1, 178]$ intervallum összes egészei egy 2-3 fában helyezkednek el. Tudjuk, hogy a gyökérben két kulcs van, és ezek közül az első 17. Mi lehet a második? Miért?

6. Az S_1 és S_2 kulcshalmazokat kiegészített 2-3 fákban tároljuk. Ezek az eredeti 2-3 fától annyiban különböznek csak, hogy minden csúcsban nyilván van tartva az onnan induló részfa magassága. Tudjuk továbbá, hogy az S_1-beli kulcsok mind kisebbek, mint az S_2-beliek. Javasoljunk hatékony algoritmust a két fa egyesítésére!

7. **[ZH: 2009. június 4.]** Mutassa meg, hogyan kell a 2-3 fa BESZÚR eljárását módosítani, ha a fa minden v csúcsában a szokásos dolgokon kívül azt is nyilvántartjuk, hogy hány levél van a v gyökerű részfában!

8. **[PZH: 2008. május 9.]** Vázolja a 2-3 fának (és műveleteinek) egy olyan módosítását, amiben továbbra is van KERES, BESZÚR, TÖRÖL, MIN, MAX művelet, és ezeken kívül van még RANG és K-ADIK művelet is, ahol RANG(x) azt adja vissza, hogy a tárolt elemek között az x a rendezés szerint hányadik elem, a K-ADIK(i) pedig, hogy a rendezés szerint a tárolt elemek közül melyik az i-edik. A módosítás során a felsorolt szokásos műveletek lépésszámának nagyságrendje ne változzon, és mindkét új művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.

9. **[Vizsga: 2003. március 31.]** Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
   BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
   TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
   MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
   DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
   ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
   Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha *m-féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$.
   (Például ha a tárolt elemek $1, 1, 3, 3, 3, 8$, akkor DARAB$(1) = 2$, ELEM$(4) = 3$ és $m = 3$.)

10. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy kezdetben üres 2-3 fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.

Algel IX. gyakorlat

Hash, DAG

2012. november 10.

1. Nyitott címzéssel hash-eltünk egy 11 elemű táblába a $h(k) = k \pmod{11}$ hash-függvény segítségével. A következő kulcsok érkeztek (a megadott sorrendben): $10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59$. Adjuk meg a tábla végső állapotát a következő két próbamódszerre:

   (a) lineáris próba;

   (b) kvadratikus maradék próba!

2. Mi a baja a $h(k) = k^2 \pmod{7}$ hash-függvénynek, ha a tábla 7 méretű?

3. **[Vizsga: 2010. január 21.]** Kettős hashelést használva szúrja be egy kezdetben üres, $M = 11$ méretű táblába a következő kulcsokat (ebben a sorrendben): 26, 3, 48, 14, 15, 7. A használt hash függvény legyen

   $$h(k) = (k \pmod{M}),$$

   a próbasorozat hash függvénye pedig

   $$h'(k) = 1 + (k \pmod{M - 5}).$$

   Minden beszúrás után rajzolja le a tábla pillanatnyi állapotát!

4. A $T[0 : M - 1]$ táblában $2n$ elemet helyeztünk el az első $3n$ helyen egy ismeretlen hash-függvény segítségével. A táblában minden $3i$ indexű hely üresen maradt ($0 \le i \le n$). Legfeljebb hány ütközés lehetett, ha az ütközések feloldására

   (a) lineáris próbát használtunk?

   (b) kvadratikus próbát használtunk?

5. **[ZH: 2005. április 8.]** Egy m méretű hash-táblában már van néhány elem. Adjon $O(m)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy egy újabb elem lineáris próbával történő beszúrásakor maximum hány ütközés történhet.

6. **[Vizsga: 2008. június 3.]** Az 1 és 91 közötti összes 3-mal osztható egész számot valamilyen sorrendben egy M méretű hash-táblába raktuk a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvény segítségével, lineáris próbával. Ennek során hány ütközés fordulhatott elő, ha $M = 35$, illetve ha $M = 36$?

---

7. A 6 pontú irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: $x : 1, 6$; $y : 2, 4$; $z : 6, 5$; $u : 3, 3$; $v : 4, 1$; $w : 5, 2$. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit! Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében?

8. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Éllistával adott egy n pontú e él? irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerét?l a levelek felé irányított fa. Adjon $O(ne + n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.

9. **[Vizsga: 2010. június 3.]** Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:
   - S_i személy meghalt S_j születése előtt;
   - S_i személy élete során született S_j;
   - S_i személy korábban született, mint S_j;
   - S_i korábban halt meg, mint S_j.

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjon algoritmust, amivel k db fenti típusú válaszról $O(n + k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.

10. **[ZH: 2005. április 8.]** Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak egy olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.

11. **[ZH: 2007. április 27.]** Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, melyek mélységi és befejezési száma megegyezik?

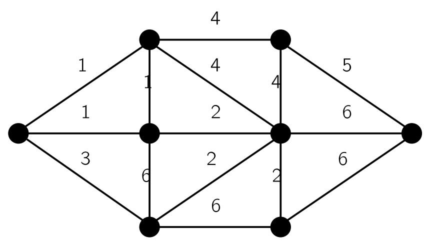
12. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk eljutni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá, hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln^2)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen.

Algel X. gyakorlat

Feszítő gráfok

2012. november 16.

1. Mennyi az alábbi gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van? (Gyakorlásképpen mindhárom módszerrel – Prim, Kruskal, Borůvka – csináljuk meg a feszítőfa-keresést!)



2. Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa? Hány különböző minimális feszítőfa van?

3. **[Vizsga: 2005. június 23.]** Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.

4. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő, súlyozott gráf az éllistájával valamint egy $f \in E$ él. Tegyük fel, hogy a gráfban minden él súlya különböző. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e olyan minimális feszítőfa G-ben, amely tartalmazza az f élet!

5. **[Vizsga: 2008. június 3.]** Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c : E \to \{-1, 1\}$. Adjon algoritmust, ami G-ben $O(|V| + |E|)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő.

6. Mátrixával adott egy G irányítatlan súlyozott gráf. Adott még a G-nek egy F minimális súlyú feszítőfája, és az F-nek egy f éle. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az f él súlyát meddig lehet úgy felemelni, hogy az F a gráf minimális feszítőfája maradjon.

7. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjon $O(|V| \cdot |E|)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.

8. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n csúcsú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G-ből a v_1 csúcs, valamint a v_1-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott a G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk $O(n \log n)$ futási idejű algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának elkészítésére!

9. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan, n csúcsú, e élű G gráf csupa különböző élsúllyal. Adjunk egy olyan $O(e)$ költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának legalább $\frac{2}{3}n$ élét előállítja! (Azaz egy olyan élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)

10. Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

11. Bizonyítsuk be, hogy a piros-kék algoritmus akkor is helyesen működik, ha egy feszítőfa költségét az élsúlyok összege helyett az élsúlyok maximumával definiáljuk!

12. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Útépítéskor a környéken sok helyen felszedték a járdát. Az építők 1-től n-ig megszámozták a fontos pontokat (kapualj, útkereszteződés, stb.). A környék állapotát két $n \times n$ táblázat írja le. A J táblázatban $J[i, j] = 1$, ha az i és j pontok az utcán szomszédosak és megmaradt az ezeket összekötő részen a járda, egyébként az érték 0. A P táblázat az ideiglenesen elhelyezhető pallókat írja le: ha az i és j pontok összeköthetőek egy pallóval, akkor $P[i, j]$ ennek a pallónak a költsége. Amennyiben a két pont nem köthető össze egy pallóval, akkor a táblázatban $*$ szerepel. (Minden palló pontosan két pontot érint.) Szeretnénk biztosítani, hogy mindenhonnan mindenhova el tudjunk jutni (hol járdán hol pallón haladva). Az építők célja, hogy úgy válasszák meg a pallók helyét, hogy minél kevesebb pallót kelljen használniuk, és ezen belül a pallók értékeinek összege minimális legyen. Írjon le egy algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben javasol egy ilyen elhelyezést. (Egy pontra tetszőlegesen sok palló illeszkedhet, és a gyalogosok az egy pontra illeszkedő pallók bármelyikéről bármelyikére át tudnak lépni.)

Algel XI. gyakorlat

P?NP

2012. november 30.

Feladatok

1. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!

2. Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!

3. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

4. Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben

   (a) meghatározza $\alpha(G)$-t!

   (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

5. **[Vizsga: 2008. június 10.]** Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?

   (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.

   (b) Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.

   (c) az X probléma NP-beli.

6. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!

   (a) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?

   (b) Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?

   (c) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

   (d) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

7. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy $L = \{(G, k) \mid G$ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább k súlyú út$\}$ NP-teljes!

8. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

   $\{(G, k) \mid G$ egy síkgráf, amiben van k pontú klikk$\}$

   Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.

9. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

10. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

    Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

11. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

12. **[Vizsga: 2010. június 17.]** Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?

13. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.