Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Mérnök informatikus szak
2010. január 8.
Megoldás

1. Jelölje X a háromszög oldalhosszát. $X \in U(1,2)$.
   $F_X(x) = x - 1$, ha $x \in (1,2)$ (1 pont)
   A terület $T = X^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbf{P}(T < t) = \mathbf{P}\left(X^2 \frac{\sqrt{3}}{4} < t\right) && \text{(1 pont)} \\ &= \mathbf{P}\left(X < \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}\sqrt{t}\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}\sqrt{t}\right) && \text{(1 pont)} \\ &= \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}\sqrt{t} - 1 \end{aligned}$$

   $f_T(t) = \left(\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}\sqrt{t} - 1\right)' = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{t}}$ (1-1 pont)
   ha $\frac{\sqrt{3}}{4} < t < \sqrt{3}$ különben 0. (1 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}\left(X^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{E}\left(X^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\boldsymbol{\sigma^2} X + (\mathbf{E}X)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{(2-1)^2}{12} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

   /**vagy** a várható értékre másképp $\mathbf{E}(T) = \int t f_T(t) dt$ (2 pont) = ... (2 pont)/

2. A : szabályos kockát vettünk ki, B : a kivett kockával 3-szor hatost dobtunk.
   $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B \mid \bar{A}\right)\mathbf{P}\left(\bar{A}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}$ (2-2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \mid B) &= \frac{\mathbf{P}(B \mid A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{99}{100}}{\frac{99}{100}\frac{1}{6^3} + \frac{1}{100}} = \frac{11}{35} && \text{(1 pont)} \end{aligned}$$

Ez kisebb, mint $\frac{1}{2}$, azaz 3 hatos dobásnál már valószínűbb, hogy szabálytalan a kocka, mint hogy szabályos. (1 pont)

Legyen, most B' az az esemény, hogy a kivett kockával 2-szer hatost dobtunk. Ekkor

$\mathbf{P}(A \mid B') = \frac{\mathbf{P}(B'|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B')} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{99}{100}}{\frac{99}{100}\frac{1}{6^2}+\frac{1}{100}} = \frac{11}{15} > \frac{1}{2}$, (1 pont)

vagyis ekkor még annak a valószínűsége nagyobb, hogy szabályos a kocka.

Tehát legalább háromszor kell hatost dobnunk vele ahhoz, hogy valószínűbb legyen az, hogy szabálytalan a kocka, mint hogy szabályos. (1 pont)

3. $F_{X,Y}(1,1) = 1$, kell, hogy legyen, vagyis $c = 1$. Ekkor teljesíti a szükséges tulajdonságokat, vagyis eloszlásfüggvény. (2 pont)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(0,25 \le X \le 0,5\ ,\ 0,25 \le Y \le 0,75) \\
&= F_{X,Y}(0,5\ ,\ 0,75) + F_{X,Y}(0,25\ ,\ 0,25) - F_{X,Y}(0,25\ ,\ 0,75) - F_{X,Y}(0,5\ ,\ 0,25)
\end{aligned}$$

(3 pont)

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} = \frac{13}{128}$$ (1 pont)

X és Y független, ha $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. (2 pont)

$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,1) = x$

$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(1,y) = y^3$

Tehát függetlenek. (2 pont)

4. Mivel $R(X,Y) = 1$, ha Y $aX+b$, alakú és $a > 0$, valamint $R(X,Y) = -1$, ha Y $aX+b$, alakú és $a < 0$, (4 pont)

ezért $R(X,Z) = -1, R(X,Y) = 1$. (2 pont)

Y felírható $-3Z + (3e - \pi)$ alakban, (3 pont)

ezért $R(X,Z) = -1$. (1 pont)

/**vagy** ha képlet alapján számolja, akkor: $R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma X \sigma Y}$ (2 pont),minden helyes cov, szórásnégyzet 1-1 pont, a három korrelációs egyhó összesen 2 pont./

5. Likelihood-fv: $L(\mathbf{x},\vartheta) = \Pi_{i=1}^n f(x_i) = \Pi_{i=1}^n \vartheta \cdot x_i^{-(\vartheta+1)}$ (3 pont)

Loglikelihood-fv: $l(\mathbf{x},\vartheta) = n\ln\vartheta - (\vartheta+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$ (2 pont)

Ezt kell maximalizálni: $0 = l'(\mathbf{x},\vartheta) = n\frac{1}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$ (3 pont)

Vagyis a paraméter maximum likelihood becslése $\hat{\vartheta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$. (2 pont)

6. Adja meg az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlást! (2 pont)

várható értéke, szórása és a módusza (1,5-1,5-1 pont)

a várható értéket bizonyítása (4 pont)