A Számítástudomány alapjai

2. ZH 2011. XI. 24. 8^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

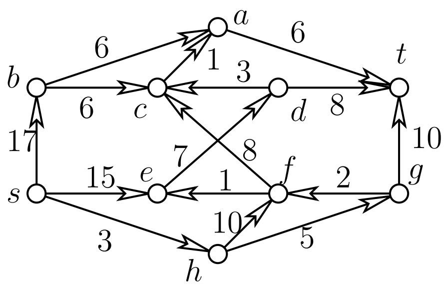
1. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \ldots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i,j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27" csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27" csúcstól való távolságát.

2. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefogó élhalmazok közül egy minimális összkapacitásút.

3. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

4. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.



6. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 3n + 6$ teljesül.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

Jó munkát!

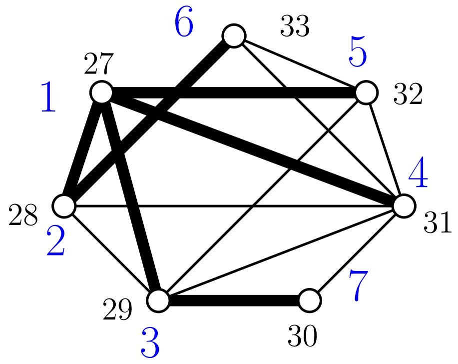
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

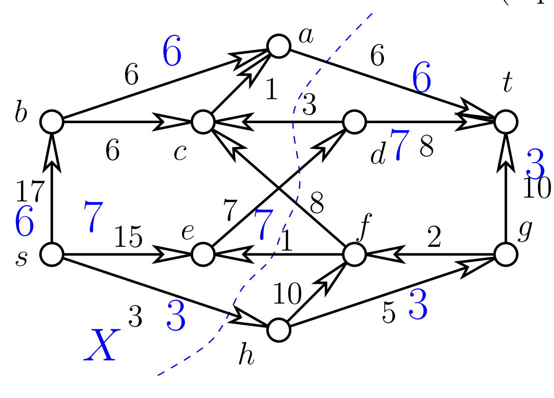
1. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \ldots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27” csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27” csúcstól való távolságát.

   Az ábrán látható G diagramja. (3 pont)
   Az órán tanult BFS algoritmust futtatva a nagyobb, kék számok jelzik az egyes csúcsok szélességi számozását (azaz az elérési sorrendet), a vastagon húzott élek pedig azt mutatják, hogy az adott csúcsot melyik másik csúcsból értük el. (5 pont)
   A „27” csúcstól mért távolságok a BFS fán mért távolságokkal azonosak, azaz a $28, 29, 31$ és 32 csúcsok 1, míg a 30 és 33 csúcsok 2 távolságra vannak. (2 pont)



2. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefogó élhalmazok közül egy minimális összkapacitásút.

   A feladat szerint minimális kapacitású st-vágást kell keresnünk az ábrán megadott hálózatban, és a válasz ennek a vágásnak az s-t tartalmazó részből a t-t tartalmazó részbe futó élei lesznek. (2 pont)
   Ehhez maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult növelő utas algoritmussal. A kapott folyamot és a maximalitást bizonyító minimális vágást meghatározó X halmazt a rajzon megjelöltük. (6 pont)
   Ezek szerint az at, ed, sh élek rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal: összkapacitásuk 16, és ennél kisebb összkapacitású st-vágás nem létezhet a rajzon jelölt 16 nagyságú folyam miatt. (2 pont)



3. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

   Legyenek a G páros gráf színosztályai a villamosmérnök-hallgatók ill. a beüzemelt számítógépek halmazai, és akkor fusson él egy hallgató és számítógép között, ha az adott hallgató be tud lépni az adott gépre, azaz rendelkezik ott felhasználói fiókkal. A cél, hogy olyan párosítás létezését igazoljuk, ami minden hallgatót fed. G-ről annyit tudunk, hogy a hallgató-színosztályban minden fok legalább 10, a számítógép-színosztály tetszőleges csúcsából pedig legfeljebb 7 él indul. (3 pont)
   Ehhez a Hall tételt fogjuk használni, ami szerint akkor létezik ilyen párosítás, ha a hallgatók tetszőleges k elemű részhalmazához legalább k olyan beüzemelt számítógép létezik, amin a k hallgató legalább egyikének van felhasználói fiókja. (3 pont)

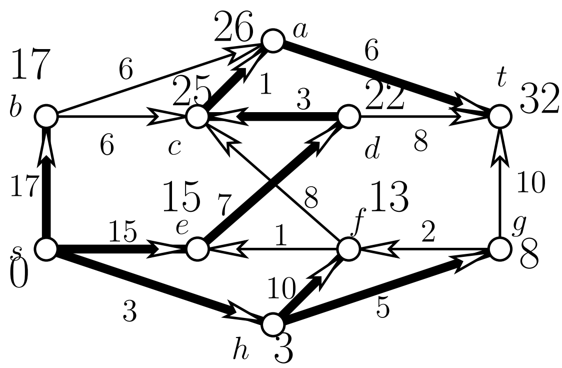
Tegyük fel, hogy a k hallgatóhoz tartozó számítógépek száma m. Mivel a k hallgatóból G-nek legalább $10k$ él indul és ezen élek mindegyike az m számítógép valamelyikéhez tartozik, ezért a $10k$ él részhalmaza az m számítógép-csúcsból induló legfeljebb $7m$ élnek. (2 pont)
Ezek szerint $10k \leq 7m$, ahonnan $k \leq m$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk az állítás bizonyításához. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)
Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G-nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)
Ha pedig egy gráf K_5-tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgáfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)
A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, g, f, e, b, d, c, a, t$-t. (2 pont)
Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)
Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont) és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t. (2 pont)



6. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 3n + 6$ teljesül.

Mivel $1 \mid n$ és $n \mid n$, ezért $\sigma(n) = n + 1$ csak úgy lehetséges, ha n prímszám. (3 pont)
Az $n > 2$ feltétel miatt n páratlan, ezért $2 \mid n - 1$ és $2 \mid n + 1$, (1 pont)
ezért $\frac{n-1}{2} \mid n - 1$ és $\frac{n+1}{2} \mid n + 1$. (2 pont)
(Ráadásul $n > 5$ miatt $2 < \frac{n-1}{2}$ is teljesül, tehát különböző osztókról van szó.) (0 pont)
Innen azt kapjuk, hogy $\sigma(n-1) \geq 1+2+\frac{n-1}{2}+(n-1)$ ill. $\sigma(n+1) \geq 1+2+\frac{n+1}{2}+(n+1)$, (2 pont)
ahonnan $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 6 + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + (n-1) + (n+1) = 3n + 6$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

(Az $n > 5$ feltevésre azért volt szükség, mert pl $n = 5$-re azért nem teljesül a feladat állítása, mert $2 = \frac{n-1}{2}$ miatt $(n-1)$-nek csak 3 osztója van. Könnyen látható az is, hogy ilyenkor nem lehet $n - 1$ és $n + 1$ is prímszám kétszerese (hiszen az egyikük 4-gyel is osztható).)