**ANALÍZIS 2**
Mérnök Informatikus szak

**I. ZÁRTHELYI**

2013 október 21
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

**Név:**

**Neptun kód:** | | | | | | | **Gyak.:** ☐ **8–10.** ☐ **16–18.**

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**1. feladat (20 pont)**

Adjuk meg (nem feltétlen explicit alakban) a következő diffegyenletet összes megoldását!

$$x \mapsto y(x)? \qquad y' = y^2 + 2xy + x^2 - 5\,.$$

**2. feladat (20 pont)**

Oldjuk meg a következő diffegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$x \mapsto y(x)? \qquad y'' - 5y' + 6y = e^{2x}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

**3. feladat (20 pont)**

Találjunk egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt ami minden $x$ valósra kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\int_0^x f(t)e^t\,dt = f^4(x) - 1.$$

**4. feladat (20 pont)**

Válasszuk meg — ha lehet — az $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy a

$$x \mapsto y(x)? \qquad a_0y + a_1y' + a_2y'' + a_3y^{(3)} + y^{(4)} + y^{(5)} = 0$$

diffegyenletnek az $x \mapsto 3x + \sin(2x) + 4$ függvény megoldása legyen!

**5. feladat (20 pont)**

$$S = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots = ?$$

1

$x \to y(x)?$

$y' = y^2 + 2xy + x^2 - 5$

$y' = (y+x)^2 - 5$

legyen $u = y + x \Rightarrow u' = y' + 1$

$u' - 1 = y'$

$u^2 - 4 = 0$ ezt?

$u' - 1 = u^2 - 5$

Szeparálható egyenlet

$u' = u^2 - 4$

$\cancel{u' = (u-2)(u+2)}$

$\to u = \pm 2$ egyensúlyi ...

$\int (u^2-4)^{-1}\, du = \int 1\, dx$

$x + C$

$x + c =$

$\frac{1}{4} \ln|u-2| - \frac{1}{4} \ln|u+2|$

ahol $u = y + x$

$c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{u^2-4}\, du$

$(u^2 - 4) = (u-2)(u+2)$

$\frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} = \frac{1}{u^2-4}$

$A(u+2) + B(u-2) = 1 = u(A+B) + 2A - 2B$

$A + B = 0 \qquad A = -B$

$2A - 2B = 1$

$-4B = 1$

$B = -\frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u-2}\, du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+2}\, du = \ln|u-2| - \ln|u+2|$

15

②

$x \to y(x)$? $\quad y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \qquad y(0) = y'(0) = 0$

Inhomogén, másodrendű állandó együtthatós és lineáris diffegyenlet

Homogén egyenlet:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \left< \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_{H,\acute{a}}(x) = C_1, C_2 \in R$$

$$= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

Inhomogén, partikuláris:

$f(x) = e^{2x}$. Próbafüggvény:

$Ae^{2x}$, de külső rezonancia miatt: $Axe^{2x} \quad A \in R$

Deriváltak:

$$(Axe^{2x})' = A(2e^{2x} \cdot x + e^{2x}) = A2e^{2x}x + Ae^{2x}$$

$$(2Ae^{2x} \cdot x + Ae^{2x})' = 2A(2e^{2x}x + e^{2x}) + 2Ae^{2x} = 2A(2e^{2x}x + 2e^{2x})$$

Helyettesítés:

$$2A(2xe^{2x} + 2e^{2x}) - 5A(2xe^{2x} + e^{2x}) + 6Axe^{2x} = e^{2x}$$

$xe^{2x}$-es tagok: $4A + (-10A) + 6A = 0$

$e^{2x}$-es tagok: $4A - 5A = -A$

$-Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = -1 \Rightarrow y_{i,p}(x) = -xe^{2x}$

$y_{i,\acute{a}} = y_{i,p} + y_{H,\acute{a}} = -xe^{2x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$y(0) = y'(0) = 0$-hoz tartozó megoldás:

$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \qquad (3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x})$

$y'(0) = 3C_1 + 2C_2 - 1 = 0 \qquad (-xe^{2x})' = -(2e^{x}x + e^{2x})$

$\Downarrow$

$2(C_1 + C_2) + C_1 - 1 = 0$

$y'(0) = y(0) = 0$-hoz:

$\left. \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -xe^{2x} + e^{3x} - e^{2x} = y(x)$ tartozik.

20

③

$$\int_0^x f(t)\, e^t\, dt = f^4(x) - 1 \quad \Big/ \frac{d}{dx} \qquad f(0)^4 - 1 = 0$$

$$\underbrace{f(x)\, e^x}_{\text{konstans tag eltűnik!}} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(f^4(x) - 1\right)}_{4f^3(x)\cdot f'(x)}$$

$$f(x)e^x = 4f^3(x) f'(x) \qquad \Big/ \begin{matrix}\text{Tfh} \\ f(x) \neq 0 \quad \forall x\text{-re}\end{matrix}$$

$$e^x = 4f^2(x) f'(x)$$

$y = f(x)$

$e^x = 4y^2 \cdot y'$ diffegyenlet

$\frac{e^x}{4y^2} = y'$ Szeparálható

$$\int 4y^2\, dy = \int \overbrace{e^x\, dx}^{e^x + C}$$

$$4\underbrace{\int y^2\, dy}_{\frac{y^3}{3}} = \cancel{\frac{4y}{3}}\ \frac{4y^3}{3}$$

Legyen $C = 0$

$$\frac{4y^3}{3} = e^x + C$$

$$\frac{4y^3}{3} = e^x$$

$$4y^3 = 3e^x$$

$$y^3 = \frac{3}{4} e^x$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{4} e^x}$$

$f(x) \neq 0 \ \forall x$-re!

egy ilyen fgv.

16

(4)

$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ Homogén lineáris

$x \mapsto y(x)$ $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y^{(3)} + y^{(4)} + y^{(5)} = 0$

$x \to 3x + \sin(2x) + 4$

4-ből következik $\Rightarrow \alpha_1 = 0$ gyök

$\sin(2x)$-ből következik: $\alpha_2 = 2i$; $\alpha_3 = -2i$ gyökök

Az

$3x$-ből $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 0$: kétszeres gyök

$a_2 = a_3 = 4$

$a_0 = a_1 = 0$

megoldás

Kar. polinom:

$a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \lambda^4 + \lambda^5 = 0$

A kétszeres 0 gyök miatt $\Rightarrow$

$a_0 = a_1 = 0$

Marad:

$a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 = 0$ Tfh: $/ \lambda^2 \neq 0$

$a_2 + a_3\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 = 0$

Tegyünk bele 2i-t: $(2i)^3 = (2i)^2 \cdot 2i = -4i \cdot 2i =$

$a_2 + a_3 2i - 4 - 8i = 0$ Javítás: $= -8i$

$(-2i)^3 =$

$= (-2i)^2 = (-1)^2 \quad -8i^3$

$(2i)^2$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = 4}$

-2i miatt:

$a_2 + a_3(-2i) - 4 + 8i = 0$

$-2a_3 i - 2a_3 i + 8 + 16i = 0$

$-4a_3 i + 16i + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 4}$

2 10

(5)

$$S=\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Legyen $x=\frac{1}{2}$ és vizsgáljuk:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ függvénysort

Miért deriválhatjuk tagonként?

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{1}{1-x^2}\qquad |x^2|<1$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=f(x)$$

$$\frac{1}{1-x^2}=-\frac{1}{x^2-1}=-\frac{1}{(x-1)(x+1)}=-\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}$$

$A(x+1)+B(x-1)=1$

$Ax+Bx+A-B=1$

$Ax+Bx \Rightarrow A+B=0$

$A-B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$A=\frac{1}{2}$

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=-\int\frac{1}{2(x-1)}\,dx+\int\frac{1}{2(x+1)}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

$f(0)=0=\frac{1}{2}$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C=\frac{1}{2}$$

ha $x=0$

$$\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2+C=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{C=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln(x+1)}$$

amelyből

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}+1\right|+C$$

15