1. tétel

Euler út (kör) def: a gráf egy olyan (zárt) élsorozata, ami minden élét pontosan egyszer érinti.
Euler tétel: (összefüggő gráfra)
1. a gráfnak van Euler-köre ←→ gráf minden fokszáma páros
2. a gráfnak van Euler-útja ←→ a gráfnak 0 v. 2. páratlan fokszámú csúcsa van
Hamilton-kör (út) def: olyan kör (út), ami a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.
Állítás: Ha egy gráfban létezik Hamilton-kör (út), akkor k tetszőleges pontját törölve k (útnál k+1) komponens van.

2. tétel

Dirac tétel: Ha az n pontú, egyszerű gráfban minden pont fokszáma legalább n/2, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.
Ore tétel: Ha az n pontú, egyszerű gráfban az összekötetlen pontok páronkénti fokszám összege ≥ n, akkor a gráfban van Hamilton-köre.
Ore tételből → következik a Dirac tétel.

3. tétel

folyam def: (G, s, t, c) hálózatban f folyam, ha minden élre 0 ≤ f(e) ≤ c(e) és minden élben a be és kifolyó összfolyam egyenlő (kivéve s és t).
folyamérték: 1. (s-ből kifolyik) — (s-be befolyik)
2. X st-vágás esetén: (X-ből kifolyik) — (X-be befolyik)
Ford-Fulkerson tétel: (maximális folyamérték) = (minimális s-t vágás kapacitása)
javítóút: előreél, ha telítetlen az él; visszaél, ha f(e) ≠ 0
Emonds-Karp tétel: ha mindig a legrövidebb javító út mentén javítunk, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.

4. tétel

Menger tétel1: u és v különböző csúcsok, akkor az élidegen uv utak maximális száma megegyezik az uv utakat lefogó élek minimális számával
Menger tétel2: u és v nem szomszédos csúcs, akkor a pontidegen uv utak maximális száma megegyezik az uv utakat lefogó (u és v-től különböző) csúcsok maximális számával.
Def: Az irányítatlan gráf k-szorosan (pont)összefüggő, ha (legalább k+1 pontja van és) összefüggő marad, bárhogy is hagyunk el belőle k-1 pontot.
Def: Az irányítatlan gráf k-szorosan élösszefüggő, ha összefüggő marad, bárhogy is hagyunk el belőle k-1 élt.
Tétel: Az irányítatlan gráf k-(pont)összefüggő, ha bármely két különböző pontja között létezik k pontidegen út.
Tétel: Az irányítatlan gráf k-élösszefüggő, ha bármely két különböző pontja között létezik k élidegen út.
Menger tétel3: (legalább 3 pontú gráf esetén):
2-szeresen összefüggő ←→ két tetszőleges pontján át vezet kör
2-szeresen összefüggő ←→ (ha nincs izolált pont) két tetszőleges élén át vezet kör
Dirac tétel: Ha a gráf k-szorosan összefüggő (k≥2), akkor bármely x_1, x_2, … x_k pontján át vezet kör.

5. tétel

páros gráf: csúcsai két színnel színezhetőek (minden él végpontjai különböző színű)
Tétel: a gráf páros ←→ nem tartalmaz páratlan kört (= minden köre páros)
Párosítás (független élek): olyan élhalmaz, amiben semelyik két élnek nincs közös pontja. A párosítás lefedi az élek végpontjait. Egy párosítás teljes párosítás, ha a gráf összes pontját lefedi.
$\nu(G)$: max független élhalmaz, $\tau(G)$: min lefogó ponthalmaz
$n/2 \leq \nu(G) \leq \tau(G)$
Kőnig tétel: páros gráfnál $\nu(G) = \tau(G)$

6. tétel

Hall tétel: G = (A, B; E) páros gráfban van A-t fedő párosítás ←→ A bármely X részhalmazára: $|X| \leq |N(X)|$ (N(X) — X szomszédai)
Frobenius tétel: G = (A, B; E) páros gráfban van teljes párosítás ←→ van A-t fedő párosítás és $|A| = |B|$
Tutte tétel: tetszőleges gráfban van párosítás ←→ gráfból k élet elhagyva a páratlan élek száma ennél nem nagyobb ($c_p \leq k$)

7. tétel

$\alpha(G)$: max független pontok, $\rho(G)$: min lefogó élek
Gallai tétel1: (hurokmentes gráfban) $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$
Gallai tétel2: (izolált pont mentes gráfban) $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$
Páros gráfban: $\alpha(G) = \rho(G)$ (ha nincs izolált pont)

8. tétel

Def: egy gráf kromatikus száma $\chi(G)=k$, G gráf csúcsai k színnel színezhetőek úgy, hogy minden él végpontjai különböző színű. (G hurokélmentes!)
Def: $\omega(G)$ = G teljes részgráfjának (klikkjének) a pontszáma
Def: $\Delta(G)$ = maximális fokszám
$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
Brooks tétel: egyszerű, összefüggő, nem teljes, nem páratlan hosszú kör gráfban $\chi(G) \leq \Delta(G)$
Mycielski tétel: $(k \geq 2)$ van olyan G_k, hogy $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$

9. tétel

$\chi_e(G)$: élkromatikus szám (szomszédos élek különböző színűek)
L(G): élgráf (élek→ csúcsok, akkor vannak összekötve, ha eredetileg szomszédosak)
Tétel: $\chi_e(G) = k$, ha $\chi(L(G)) = k$
Tétel: $\omega(L(G)) \geq \Delta(G)$, ha $\Delta(G) \geq 3$, akkor $\omega(L(G)) = \Delta(G)$
Vizing tétel: egyszerű gráfban $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$
5-szín tétel: síkbarazolható gráfban $\chi(G) \leq 5$

10. tétel

Def: G perfekt gráf, ha $\omega(G) = \chi(G)$ és minden G' feszített részgráfjára $\omega(G')=\chi(G')$
Tétel: Minden páros gráf perfekt.
Tétel: Minden páros gráf komplementere perfekt.
Tétel: Minden páros gráf élgráfja perfekt.
Tétel: Minden páros gráf élgráfjának a komplementere perfekt.
Gyenge perket gráf tétel: perfekt gráf komplementere perfekt.

Def: G intervallumgráf, csúcsai I_1, I_2… valós intervallumok és akkor van összekötve, ha a két intervallum metszi egymást
Tétel: Minden intervallumgráf perfekt.
Erős perfekt gráf tétel: G perfek ←→ sem G, sem /G feszített részgráfja nem tartalmaz legalább 5 hosszú páratlan kört.

11. tétel

Mantel tétel: Ha n-pontú, egyszerű gráf háromszögmentes, akkor az élszám ≤ $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$T_{n,m}$ Turán gráf def: n = qm + r, akkor a gráfnak *r db (q + 1)* méretű és *(m — r) db q* méretű osztálya van
Turán tétel: Ha az n-pontú gráfban ω(G) ≤ m, akkor élszám ≤ $T_{n,m}$ élszáma

12. tétel

felbonthatatlan: p = ab → a=p vagy b=p
prím: p|ab → p|a vagy p|b. Végtelen prímszám van.
felbonthatatlan ←→ prím
számelmélet alaptétele: minden Z^+ szám egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára
kanonikus alak: $\prod p_i^{\alpha_i}$

osztók száma d(n) = $\prod(\alpha_i + 1)$, osztók összege $\sigma(n) = \prod \frac{p_i^{\alpha_i} - 1}{p_i - 1}$
Csebisev tétel: Minden Z^+ n-re létezik p prím: n < p < 2n
Dirichlet tétel: Ha (a, d) = 1 és d > 0, akkor a, a+d, a+2d… végtelen számtani sorban végtelen sok prímszám található.
Prímszámtétel: $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$ (π(x): x-nél nem nagyobb prímek száma)

13. tétel

Kongruencia def: a≡b (mod m), ha m|a-b
Teljes maradékrendszer: mod m maradékosztályok mindegyikéből 1-1 elem
Redukált maradékrendszer: mod m azon maradékosztályai, melyek relatív prímek m-hez. Ezeknek a maradékosztályoknak a számát φ(n)-nel jelöljük.
Tétel: mod m teljes/redukált maradékrendszert megszorozzuk egy m-hez relatív prím számmal → teljes/redukált maradékrendszert kapunk
φ(n) = $\prod p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_{i-1}} = n \cdot \prod 1 - \frac{1}{p_i}$
Euler-Fermat tétel: ha (a, m) = 1, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mod m)
Kis Fermat tétel: ha p prím, akkor $a^p \equiv a$ (mod p)

14. tétel

Lineáris kongruencia: ax≡b (mod m) megoldható, ha (a, m) osztója b-nek. Ilyenkor d darab maradékosztály a megoldás (mod m).
Wilson tétel: Ha p prím, akkor (p-1)! ≡ -1 (mod p)

15. tétel

művelet: halmazra nézve zárt (akár többváltozós is)

félcsoport: asszociatív
csoport: asszociatív + egységelem + inverz
Ábel-csoport: asszociatív + egységelem + inverz + kommutatív
ciklikus csoport: olyan csoport, amelyet egy eleme generál. (a^n)
diédercsoport: műveletek egymásutánja a művelet. Pl. szabályos sokszögnél szimmetria tengelyre tükrözés és $\frac{2\pi}{n}$ forgatás 1-1 művelet, helybenhagyás az egységelem.
szimmetrikus csoport: az {1,2…n} halmaz permutációi a műveletek egymásutánjára $\langle\{1,2,\ldots n\},\circ\rangle$
Cayley tétel: Minden véges csoport alkalmas permutációcsoporttal izomorf.

16. tétel

részcsoport: ugyanaz a művelet egy részhalmazra (részhalmazra is zárt!)
generált részcsoport: a legszűkebb részcsoport, ami az adott elemeket tartalmazza.
mellékosztály: H ≤ G részcsoport és g $\in$ G, akkor Hg komplexusszorzat a H részcsoport g szerinti jobboldali mellékosztálya, gH baloldali, g a mellékosztály reprezentánsa.
Lagrange tétel: H ≤ G részcsoport, ekkor H rendje osztja G rendjét
Def: a^n = egységelem, akkor n = $\sigma(a)$ (az elem rendje). Ha nincs ilyen szám, akkor az elem végtelen rendű.
Tétel: egy elem rendje megegyezik az általta generált részcsoport rendjével.

17. tétel

gyűrű: $\langle R,+,\cdot\rangle$ R Ábel-csoport +ra és félcsoport ⋅-ra. Ha ⋅ is kommutatív → kommutatív gyűrű. Ha ⋅-ra is van egységelem → egységelemes gyűrű.
Def: a ≠ 0 nullosztó, ha 0 ≠ b, melyre ab = 0. R nullosztómentes, ha nincs benne nullosztó. R gyűrű integritási tartomány, ha kommuntatív és nullosztómentes.
ferdetest: egységelemes gyűrű, a szorzásra nézve is van inverz (0-hoz nincs)
test: szorzásra nézve kommutatív ferdetest
Tétel: Minden véges integritási tartomány test.

18. tétel

polinomiális algoritmus jó, exponenciális rossz
összeadás: 2⋅max(log n, log m) → polinom
szorzás: 2 (log n)(log m) → polinom
hatványozás: m⋅log n → exponenciális
hatványozás mod m: polinom
euklideszi algoritmus: polinom