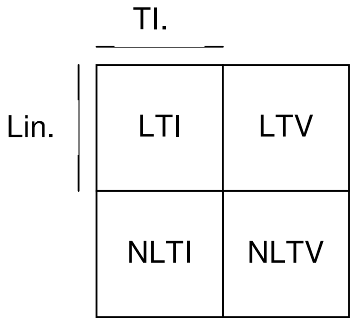
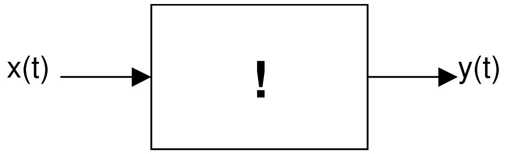
Híradástechnika 1998/99, Első gyakorlat

Lineáris, időinvariáns rendszerek, kauzalitás





például: LTI: $y(t)=2x(t-t_0)$

LTV: $y(t)=t^2 f(t)$

NLTI: $y(t)=|f(t)|$

NLTV: $y(t)=t|f(t)|$

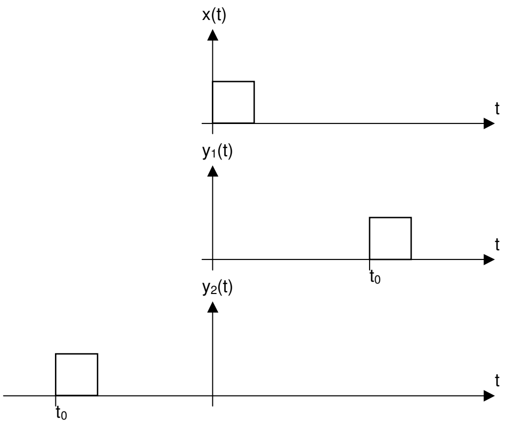
definíciók:

Lineáris: $L\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\}=a_1 L\{f_1(t)\}+a_2 L\{f_2(t)\}$

Időinvariáns: $L\{f(t-t_0)\}=g(t-t_0)$, ahol $g(t)=L\{f(t)\}$

Kauzális rendszer $y_1(t)=x(t-t_0)$

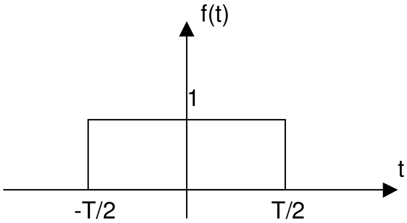
Akauzális rendszer $y_2(t)=x(t+t_0)$



definíció: A rendszer kauzális, ha $x(t)\equiv 0,\ t\le t_0 \rightarrow y(t)\equiv 0,\ t\le t_0$

1. példa

Határozza meg az f(t) jel amplitúdó sűrűség spektrumát!



Fourier transzformált: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

(Az f(t) függvény neve impulzus fv., jelölése $p_a(t)$)

$$F(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot e^{-j\omega t}dt=-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\int_{-T/2}^{T/2} 1=\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{j\omega}=\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}=T\mathrm{sinc}(\omega T/2)$$

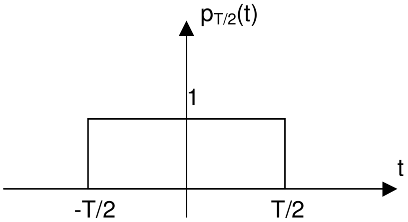
2. példa

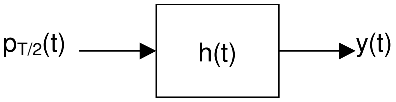
Adott az alábbi hálózatunk a súlyfüggvényével, és a bemeneti gerjesztéssel.

a) y(t)=?

b) Y(ω)=?

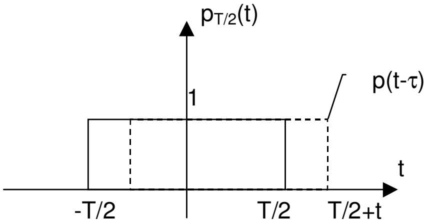
c) kauzális-e a rendszer?

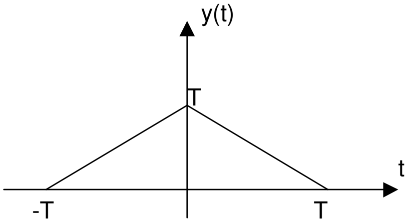




, $h(t) \overset{!}{=} p_{T/2}(t)$

a) $y(t) = p_{T/2}(t) * p_{T/2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)p(\tau)d\tau$





b) $Y(\omega)=F(\omega)F(\omega)=T^2\text{sinc}(\omega T/2)$

c) NEM kauzális, $h(t)=p_{T/2}(t-T/2)$ viszont igen.

1. példa

Határozzuk meg az A amplitúdójú, f_0 frekvenciájú színuszjel, illetve szimmetrikus négyszögjel csúcstényezőjét!

A csúcstényező a csúcsérték (ha egyáltalán létezik!) és az effektív érték (a négyzet átlagából vont négyzetgyök, a jellel azonos teljesítményű egyenszint értéke) hányadosa. A csúcsérték mindkét jelnél A, az effektív érték rendre $A^2/2$ illetve A^2 négyzetgyöke. A csúcstényező tehát a szinuszjelre $\sqrt{2}$, négyszögjelre 1.

2. példa

Határozzuk meg két, egyenként A amplitúdójú, f_1, illetve f_2 frekvenciájú szinuszos jel összegének a csúcstényezőjét!

A két szinuszjel összegének csúcsértéke *általában* 2A (csak kivételes frekvenciapárok és kezdőfázisok esetén állhat elő az a sajátos helyzet, amikor ez nem teljesül), teljesítménye azonban A^2. Így a csúcstényező *általában* 2.

3. példa

Gauss impulzust Gauss aluláteresztővel szűrünk. Vizsgáljuk meg a szűrés eredményét!

A Gauss aluláteresztő átviteli függvénye:

$$H(f) = e^{\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right)}.$$

A szűrő kimenő jelének Fourier transzformáltja:

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = x_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}B} e^{\left(-\frac{f^2}{2B^2}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right)}.$$

A két exponenciális függvény szorzata is exponenciális:

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = x_0 \frac{B_e}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}B_e} e^{\left(-\frac{f^2}{2B_e^2}\right)},$$

ahol a B_e eredő sávszélesség az

$$\frac{1}{B_e^2} = \frac{1}{B_e^2} + \frac{1}{B^2}$$

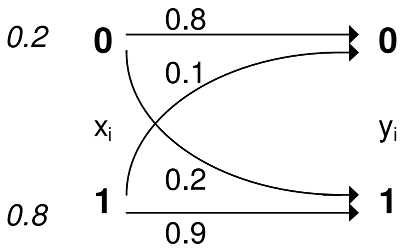
összegzési szabállyal számolandó. Tanulság tehát, hogy a kimenő jel is Gauss impulzus, csak a sávszélessége és a nagysága változik.

Megjegyzés: Gyakori probléma, mit mondhatunk arról az impulzusról, amelyet egymás után több, nem túl jól specifikált szűrő hatás ér. Kézenfekvő modell ilyen esetekben a Gauss impulzus, illetve a Gauss aluláteresztő. Az, hogy e modellek tűrhetően működnek a gyakorlatban, összefügg e függvény (itt nem tárgyalt) bizonyos szélsőérték-tulajdonságával.

Csatornák, jelek, entrópia

1. példa Adott egy csatorna, a következő mátrixszal: $P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$. Határozza meg a bithiba-valószínűséget, ha a szimbólumok leadásának valószínűségei a következők: $P_0=0.2$, $P_1=0.8$!

Megoldás:

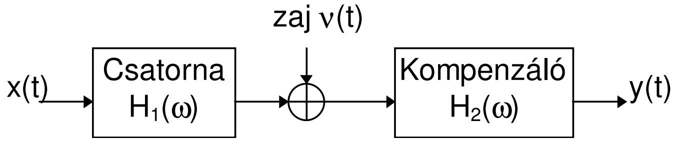


A csatorna emlékezetes, minthogy $p_{01} \neq p_{10}$. (Speciális típus: BSC)

$P_E=p_{01}P_1+p_{10}P_0=0.1*0.8+0.2*0.2=0.12$ (Ez igen magas.)

2. példa Milyen átviteli taggal kompenzálná analóg összeköttetés esetén a következő csatornatorzítást az $\Omega_1=1..\Omega_4=4$ normalizált frekvenciák sávjában, illetve mekkora a kimeneti zajteljesítmény növekedés a kompenzálatlan esethez képest? Milyen, a hagyományostól eltérő kompenzálási ötletet alkalmazna a zaj "jobb" kezelése érdekében?

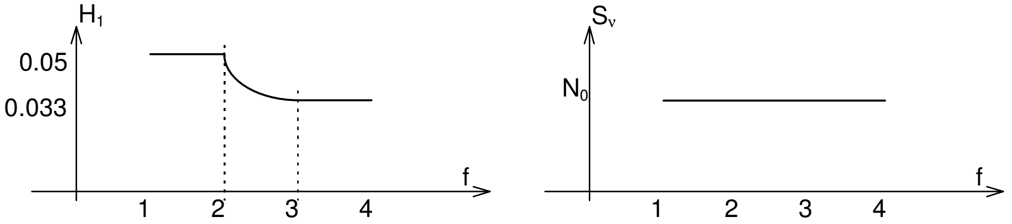
Az elrendezés az alábbiakban látható:



$$H_1(\omega)=\begin{cases}0.05, & \text{ha } 1<\omega<2\\ \dfrac{0.1}{f}, & \text{ha } 2<\omega<3\\ 0.0\dot{3}, & \text{ha } 3<\omega<4\end{cases}$$

$\nu(t)$ fehér Gauss zaj, $s\nu(f)=N_0$

Megoldás:



A torzítatlan átvitel feltétele, hogy $H_1(f)H_2(f)=1$ teljesüljön az (1..4) sávban,

amiből $H_2(f)=\dfrac{1}{H_1(f)}=\begin{cases}20, & \text{ha } 1<f<2\\ 10f, & \text{ha } 2<f<3\\ 30, & \text{ha } 3<f<4\end{cases}$.

A fehérzaj transzformációja a kompenzáló kimenetére a következőképpen számítható:

$$P_{Z,H_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_2(f)\right|^2 s_\nu(f)\,df=N_0\int_1^4\frac{1}{\left|H_1(f)\right|^2}df=N_0\left(\int_1^2 400df+\int_2^3 100f^2df+\int_3^4 900df\right)=1933N_0$$

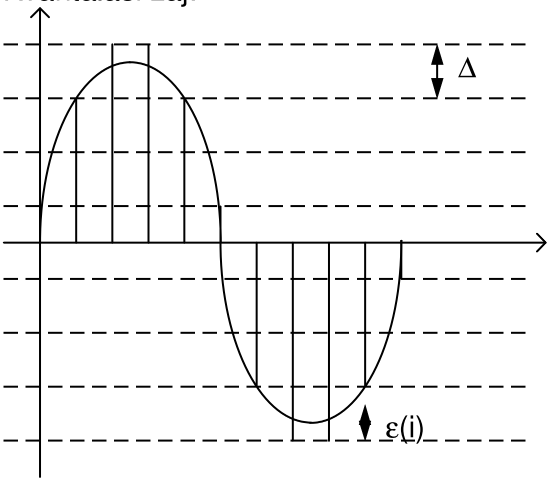
$P_Z=\int_1^4 N_0df=3N_0$ Ezért a zajnövekedés: $\dfrac{P_{\text{zaj, kompenz.}}}{P_{\text{zaj}}}=\dfrac{1933}{3}=644.3\rightarrow 28.1\text{dB}$

Mivel a klasszikus kompenzálási eljárás a zajteljesítményt nagyon feltranszformálja, érdemes más módon kompenzálni a rendszert.

Egy lehetséges stratégia, ha a bemenőjel négyzetes középben történő becslésére szorítkozunk: $H_2^{opt}(f):\min\limits_{H_2(f)}\mathrm{E}\left\{\left[y(t)-x(t)\right]^2\right\}$. A feladat megoldása a Wiener-szűrés elméletéhez vezet, az optimális megoldás (csak érdekességképpen): $H_2(f)=\dfrac{\left|H_1(f)\right|^2 s_x(f)}{\left|H_1(f)\right|^2 s_x(f)+N_0}\cdot\dfrac{1}{H_1(f)}$, ahol $s_x(f)$ a bemeneti jel spektrális sűrűsége. Az eredmény jelzi, hogy $N_0=0$ esetén a klasszikus inverz kompenzátort kaptuk vissza, amint azonban a zaj hatása dominálni kezd, az inverztől egyre jobban eltérő megoldásokat kapunk.

3. példa ADC dinamikája

Kvantálási zaj:



Kettes komplemens kód esetén:

$\hat{x} = \Delta \cdot i$

$i = -\frac{N}{2} \ldots 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1$

$\Delta = \frac{2c}{N}$, $2c = V_{pp}$

$\hat{x} = x + \varepsilon$, $\varepsilon = (-\Delta/2, \Delta/2)$

ε egyenletes eloszlású, és

$M\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = 0$, $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\Delta}$

Ekkor a visszaállított jel:

$\hat{x}(t) = x(t) + \varepsilon(t)$

$$P_\varepsilon = M\{\varepsilon^2(t)\} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 f_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24}\right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

szinuszos jel esetén a jel / zaj viszony:

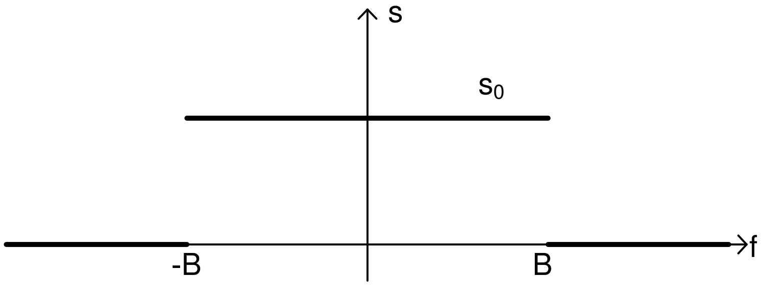
$$P_j = \frac{c^2}{2},\ P_\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12},\ \frac{P_j}{P_\varepsilon} = 6\frac{c^2}{\Delta^2} \Rightarrow \frac{S}{N} = 6\left(\frac{c}{\Delta}\right)^2$$

Feltéve, hogy az ADC range illesztett a szinuszos jelre:

$$\frac{c}{\Delta} = \frac{N}{2} = 2^{n-1},\ \frac{S}{N} = 6 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{-2} = \frac{3}{2}2^{2n},\ \frac{S}{N} = 1.76 + 6.02 \cdot n\ \text{[dB]}$$

4. példa: Sávhatárolt fehér zajnak nevezzük azt a stacionárius folyamatot, amelynek zérus a várható értéke, és konstans a spektrális sűrűségfüggvénye minden $|f| < B$ frekvencián. Határozza meg e folyamat autokorrelációs függvényét!

Megoldás: A folyamat spektrális sűrűségfüggvénye az 1. ábra szerinti.

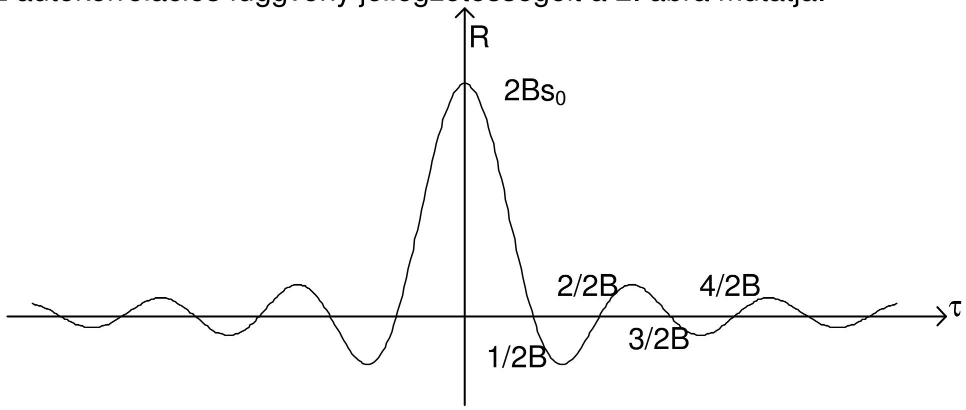


1. ábra

Az autokorrelációs függvény a spektrális sűrűségfüggvény inverz Fourier transzformáltja, tehát

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-B}^{B} s_0 e^{j2\pi f\tau} df = s_0 \left[\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau} \right]_{-B}^{B} = s_0 \frac{e^{j2\pi\tau B} - e^{-j2\pi\tau B}}{j2\pi\tau} = 2Bs_0 \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

Az autokorrelációs függvény jellegzetességeit a 2. ábra mutatja.

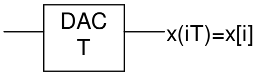


2. ábra

Érdemes megfigyelni, hogy nagy τ értékek esetén R $1/\tau$-val arányosan, viszonylag lassan tűnik el. Ez a lassú elhalás a folyamat sávkorlátosságával (és a spektrális sűrűségfüggvény folytonosságával) függ össze, és azt jelenti, hogy a jel (időben) távol lévő mintái között is van számottevő kapcsolat.

5. Példa: Határozza meg az $x_i=2^{-i}$, i=0,1,.. mintasorozat spektrumát!
Megoldás:

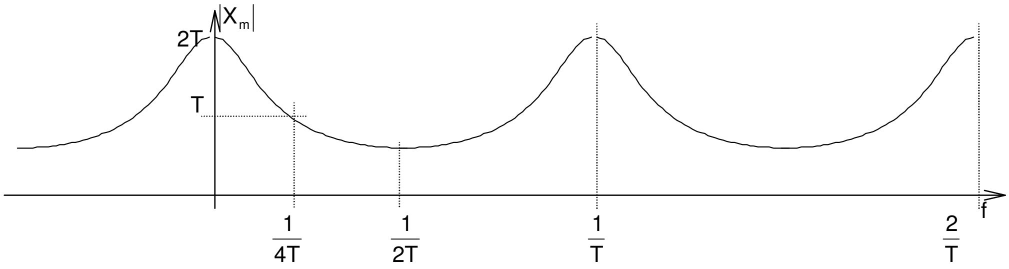
$x(t)=2^{-\frac{t}{T}}$



A mintasorozat spektruma alatt (3.3) szerint az $X_m(f)=T\sum_i x_i e^{-j2\pi fiT}$ függvényt értjük, ahol T a DAC működtetésének ütemideje.

Most: $X_m(f)=T\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i}e^{-j2\pi fiT}=T\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^{-1}e^{-j2\pi fT}\right)^i$.

Ez egy végtelen mértani sor összege, melynek képlete $S=\frac{a_0}{1-q}$, ahol a_0=1, q=$0.5e^{-j2\pi fT}$, tehát $X_m(f)=T\frac{1}{1-0.5e^{-j2\pi fT}}$. A mintavétel miatt (Shannon!) azonban $X_M(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_m\left(f-\frac{n}{T}\right)$ lesz (1. ábra; $f_s=\frac{1}{T}$).



6. példa Adott az N forrásszimbólumot szolgáltató $P_N=\{p_1, p_2, \ldots p_N\}$ eloszlású forrás.

a) Mekkora a forrás entrópiája, ha $p_i=p_j$ minden i,j=1…N-re?

b) Milyen P_N eloszlás esetén lenne a forrás entrópiája minimális?

Megoldás:

$$H(P)=\sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{ld}(1/p_i)$$

a) $H(P_N)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\mathrm{ld}(N)=\mathrm{ld}(N)$

b) Ha $P_N=\{0, 0, \ldots 1 \ldots 0, 0\}$, ekkor $H(P_N)=1\cdot\mathrm{ld}1=0$, az alábbi határérték felhasználásával: $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\mathrm{ld}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ld}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{\mathrm{ld}\, y}{y}=0$. (Comment: az a forrás, mely mindig ugyanazt hajtogatja, nem bír információtartalommal!)

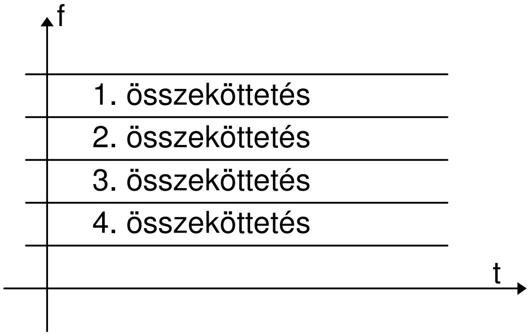
Híradástechnika Tantárgy

Moduláció gyakorlat / HT

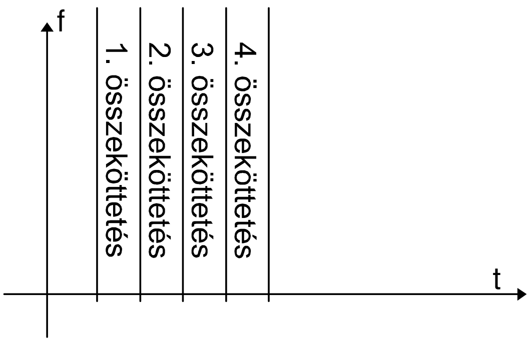
A gyakorlat a könyv 11. és 12. fejezetéhez kapcsolódó kérdéseket és kidolgozott feladatokat tartalmaz.

1. feladat: Miért van szükség frekvencia szerinti nyalábolásra? Adjon meg más nyalábolási eljárásokat, amelyek a csatorna jobb kihasználtságát eredményezhetik!

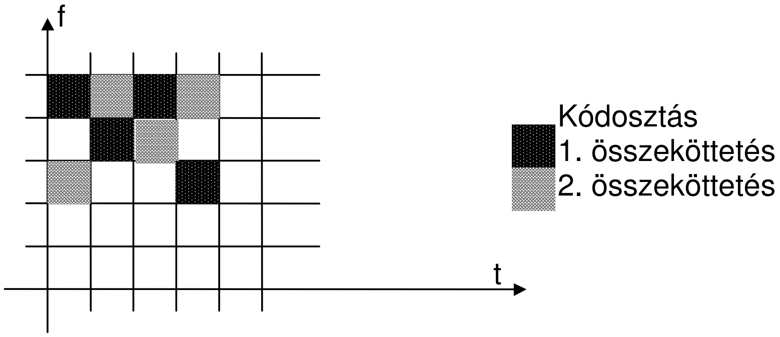
Megoldás: A frekvencia, illetve időosztásos rendszereket a kódosztással összevetve kiderül, hogy melyik garantálja a csatorna jobb kihasználtságát.



Frekvencia szerinti nyalábolás



Idő szerinti nyalábolás



Kódosztás

2. feladat: Mekkora az FM jel sávszélessége m_f=15 esetén, egyetlen szinuszos moduláló jellel (f_v=10 MHz, f_m=20 kHz)?

Egy szinuszos moduláló jel esetén az FM jel spektruma leírható az alábbi Fourier-sorral:

$$U_{FM}(t) = U_v \left[J_0(m_f)\cos\omega_v t + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_f)\left\{\cos(\omega_v + 2n\omega_m)t + \cos(\omega_v - 2n\omega_m)t\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m_f)\left\{\cos(\omega_v + (2n-1)\omega_m)t + \cos(\omega_v - (2n-1)\omega_m)t\right\} \right]$$

Megegyezés szerint az FM jel elvileg végtelen spektrumából csak azt a szeletet vesszük figyelembe, amelynek koefficiensei a vivőnek legalább egy százalékát elérik (ezek számát α jelöli).
Így a sávszélesség: $f_B = 2\alpha f_m$

Ez a könyv (11.32) egyenlete szerint α=15, m_f=15 esetén, amiből a kívánt sávszélesség 600 kHz.

$\alpha \cong 1,$	ha $m_f < 0{,}1$
$\alpha \cong m_f,$	ha $m_f > 10$
$\alpha \cong 1 + m_f + \sqrt{m_f}$,	egyébként

Comment: Egyéb szükséges képletek és definíciók a 133. oldalon.

Narrow Band FM	(NBFM):	$f_B=2f_m$,	$m_f<0.1$
Wide Band FM	(WBFM):	$f_B=2f_D$,	$m_f>10$

Carson formula: $B_{RF}=2(\Delta F+f_{mod})=2(m_f f_{mod}+f_{mod})=2(15*20+20)=640$ kHz

3. feladat: Ha egy $s_v(t)=U_v\cos\omega_v t$ vivőt egy $s_m(t)=U_m\cos\omega_m t$ függvénnyel fázismodulálunk, mekkora lesz a maximális fázislöket, és m_p értéke?
$U_v=1$ V, $\omega_v=2\pi*10^6$ rad/sec, $c=0.1$ rad/V, $U_m=1$ V, $\omega_m=2\pi*10^3$ rad/sec.

Megoldás: Mivel a fázismodulált jel időfüggvénye:

$$s_{PM}(t)=U_v\cos(\omega_v t+cU_m\cos\omega_m t)$$

alakú, ezért m_p értékét a következőek alapján számolhatjuk ki:

$$m_p=c*U_m=0.1*1=0.1 \text{ rad}$$

A modulált jel pillanatnyi fázisingadozása $cU_m\cos\omega_m t$, amelynek maximális értéke szintén $c*U_m$. Ezért a maximális fázislöket szintén 0.1 rad értékű.

Commentek:
Ha $s(t)=A\cos[\omega_c t+\varphi+\beta(t)]$,
a jel fázisa: $\omega_c t+\varphi+\underline{\beta(t)}$ ha az utolsó tag a moduláló jellel arányos, akkor beszélünk fázismodulációról;
a jel pillanatnyi frekvenciája: $\frac{1}{2\pi}\left(\omega_c+\frac{d\beta}{dt}\right)$ ha az utolsó tag a moduláló jellel arányos, akkor beszélünk frekvenciamodulációról.
PM: $\beta(t)=\Delta\Phi*s_m(t)$, ahol $\Delta\phi$ a fázislöket
FM: $\beta(t)=\Delta\Omega\int_{hat.lan}^{t} s_m(t)dt$, itt $\Delta F=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$ a frekvencialöket.

4. feladat: Egy PAM rendszerben adott a következő adószűrő, hogyan állítaná be a vevőszűrőt?

$$H_A(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & 0\le|\omega|\le\pi\dfrac{1-\beta}{\tau}\\ \sqrt{\dfrac{\tau}{2}\left[1-\sin\left(\pi\dfrac{\tau}{\beta}\left(\left|\dfrac{\omega}{2\pi}\right|-\dfrac{1}{2\tau}\right)\right)\right]} & \pi\dfrac{1-\beta}{\tau}\le|\omega|\le\pi\dfrac{1+\beta}{\tau}\end{cases}$$

Megoldás: A vevőszűrő beállításával kapcsolatban két dolgot kell teljesíteni:

- a vevőszűrő az adóspektrumra illesztett legyen (zajmentes esetben $H_V(\omega)=H_A^*(\omega)$)
- a Nyquist feltétel kielégüljön, ami szimmetrikus karakterisztikát igényel a következő egyenlőség teljesítéséhez:

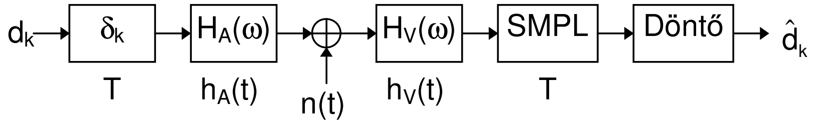
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_v\left(\omega-\frac{n2\pi}{\tau}\right)=C\exp(-j\omega\tau_1)\qquad \omega\in\left(-\frac{\pi}{\tau},\frac{\pi}{\tau}\right)$$

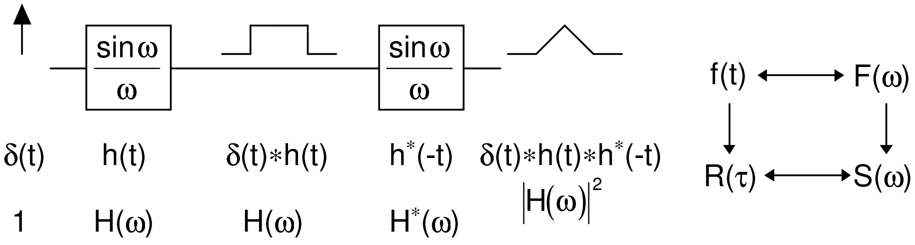
A fentiek alapján a vevőszűrőt a következőképpen kell választani:

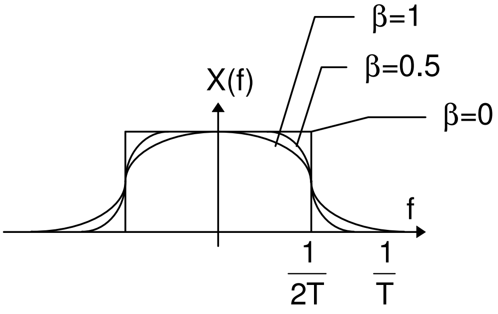
$$H_V(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & 0\le|\omega|\le\pi\dfrac{1-\beta}{\tau}\\ \sqrt{\dfrac{\tau}{2}\left[1-\sin\left(\pi\dfrac{\tau}{\beta}\left(\left|\dfrac{\omega}{2\pi}\right|-\dfrac{1}{2\tau}\right)\right)\right]} & \pi\dfrac{1-\beta}{\tau}\le|\omega|\le\pi\dfrac{1+\beta}{\tau}\end{cases}$$

amely garantálja mindkét feltétel teljesülését, hiszen a $H_A(\omega)H_V(\omega)$ eredő átviteli függvény a jól ismert "emelt koszinuszos" karakterisztikát valósítja meg, kielégítvén a szimbólum közti áthallásmentesség követelményét is.

Comment:

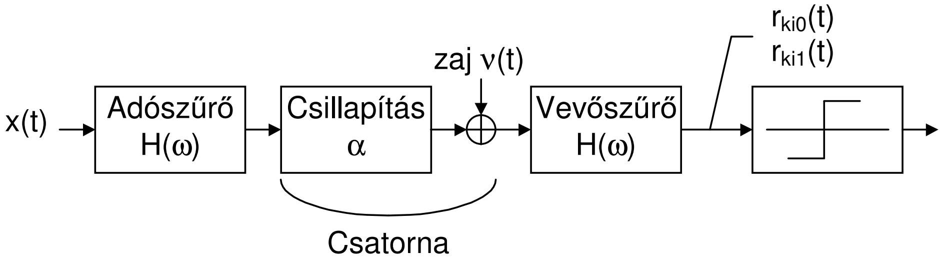






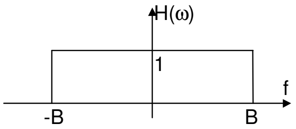
β: rolloff parameter

5. feladat: Számolja ki a hibavalószínűséget a következő PAM rendszerben!



$$x(t) = K\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\delta(t-kT) \qquad P(\xi_k=1)=P(\xi_k=-1)=0.5 \qquad s_\nu(f)=\frac{N_0}{2}$$

a szűrők átviteli függvénye:



Megoldás: A két szűrő együttes átviteli karakterisztikája is H(ω), mivel egységnyi átvitelű, ideális szűrők (eredő súlyfüggvény h(t)).
A döntő bemenetén a jelalakok a következőek:

$$r_{ki1}(t) = K\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = K\alpha\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\omega t)d\omega = K\alpha\int_{-B}^{B}\exp(j\omega t)d\omega = \frac{K\alpha}{T}\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$

$r_{ki0}(t)=-r_{ki1}(t)$

$r_{ki1}(0)=\frac{K\alpha}{T}$, $r_{ki1}(kT)=0$, $\forall k$, $k\neq 0$

A döntés időpillanatában a zaj ($\nu(0)$) gaussi valószínűségi változó,

$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ sűrűségfüggvénnyel, ahol

$$\sigma^2 = R_\nu(0) = \int_{-B}^{B} s_\nu(\omega)d\omega = \frac{N_0}{2}2B = \frac{N_0}{2T} \text{ és } \sigma=\sqrt{\frac{N_0}{2T}}$$

A hibavalószínűség: $P_E=p_{01}P_1+p_{10}P_0$
Alkalmazva a küszöb döntési szabályt (Bayes döntés):

$$p_{01} = P\left(\frac{K\alpha}{T}+\nu(0)<0\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}K\alpha}{\sqrt{TN_0}}\right)$$

$$p_{01} = P\left(-\frac{K\alpha}{T}+\nu(0)>0\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}K\alpha}{\sqrt{TN_0}}\right)$$

Ennek alapján a bithibaarány: $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{TN_0}}K\alpha\right)=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), E_b = K^2\alpha^2\frac{1}{T}$

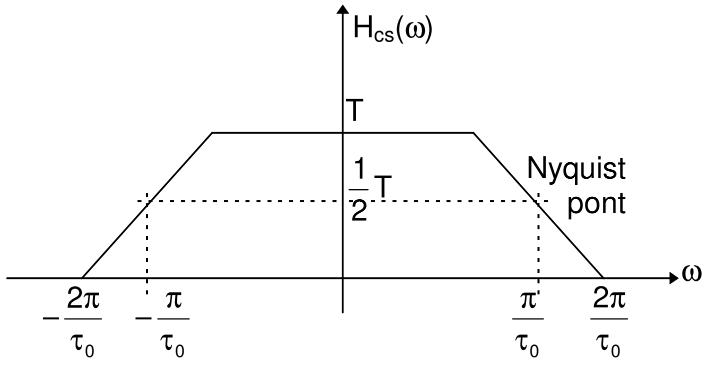
(hasznos jelnek egy bitidőre eső energiája)

6. feladat: Próbálja meg definiálni az előző feladat alapján, hogy a csatorna milyen paramétere van közvetlen hatással a hibavalószínűségre!

Megoldás: Mivel $\Phi(x)$ monoton növekvő függvény, ezért világos, hogy $P_E = \Phi\left(-\frac{\alpha}{N_0}\right)$ az $\frac{\alpha}{N_0}$ hányados (jel-zaj viszony) monoton csökkenő függvénye. Ilyen értelemben a csatorna csillapítása ($\alpha<1$) az a paraméter, amely a hibavalószínűséget befolyásolja. Minél nagyobb a csatorna csillapítása egy PAM rendszerben, annál nagyobb P_E adódik, elrontván a kommunikáció minőségét.

Bithibaarány: $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{TN_0}}K\alpha\right)$.

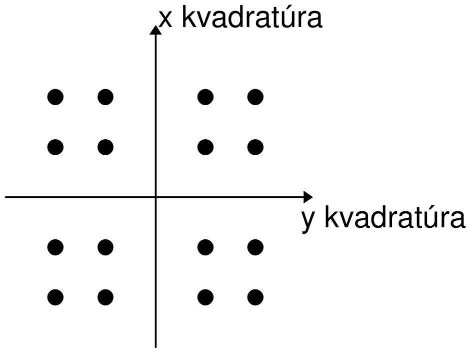
7. feladat: Eredményez-e szimbólumközi áthallást az alábbi csatorna?
(τ_0: jelzési idő, $\frac{1}{\tau_0}$:)



Megoldás: Mivel a szimbólumközi áthallás mentessége érdekében a Nyquist feltételt ki kell elégíteni: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{cs}\left(\omega - \frac{n2\pi}{\tau_0}\right) = C\exp(-j\omega\tau_1) \quad \omega \in \left(-\frac{\pi}{\tau_0}, \frac{\pi}{\tau_0}\right)$.
Ehhez elegendő megvizsgálni a következő összeget (n=0, 1):
$H_{cs}(\omega) + H_{cs}\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau_0}\right)$, ami a csatornakarakterisztika szimmetriája miatt konstans értéket ad, így a Nyquist feltétel kielégül: $H_{cs}(\omega) + H_{cs}\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau_0}\right) = T$.

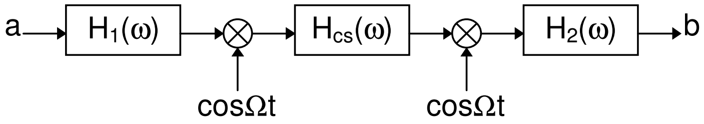
8. feladat: Rajzolja le egy 16 állapotú QAM rendszer vektorábráját, foglalja össze a rendszer előnyeit, illetve "érzékeny pontjait".

Megoldás:



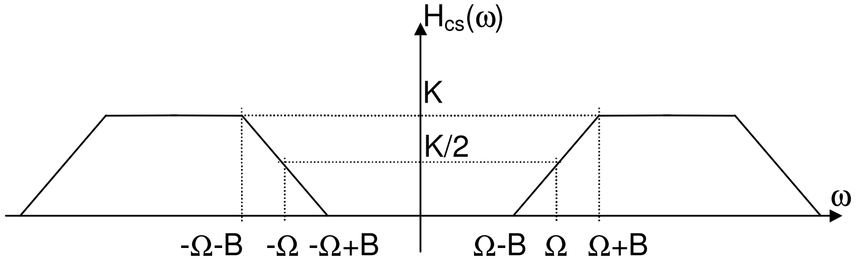
A QAM rendszerek előnye a jobb sávkihasználásban rejlik, a PAM rendszerekkel szemben, ami a két ortogonális vivővel érhető el. A rendszer gyengéje azonban, hogy a vételi oldalon fázishelyes vivőkinyerést igényel, ellenben a kvadratúra komponensek között áthallás lép fel, amely rontja a bithiba-valószínűséget.

9. feladat: Adja meg a következő AM DSB/SC rendszer eredő átviteli függvényét!



$$H_1(\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \qquad H_2(\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}} \qquad \omega \in (-B, B)$$

Megoldás:



$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)\frac{H_{cs}(\Omega+\omega)e^{-j\Phi} + H^*_{cs}(\Omega-\omega)e^{j\Phi}}{2} =$$

$$= H_1(\omega)H_2(\omega)\frac{H_{cs}(\Omega+\omega) + H^*_{cs}(\Omega-\omega)}{2} = K\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \omega \in (-B, B)$$

Amint a fentiekből látható, a csatorna transzformált átviteli függvénye nem okoz torzítást, ami a csonkaoldalsávos amplitúdó moduláció alapelve.

Híradástechnika Tantárgy

Forgalomelmélet gyakorlat / TTT

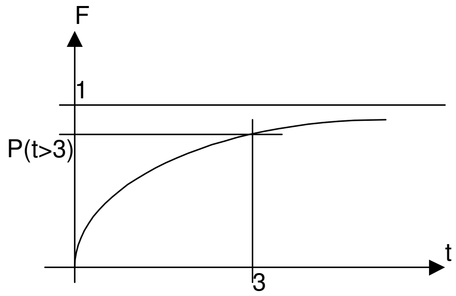
A könyv 15. (Forgalomelmélet/Frajka) és 17. (Mozgó hírközlés/Szekeres) fejezetei kidolgozott példákat tartalmaznak. A gyakorlaton ezek megoldását tárgyaljuk.

1. *példa*: A hívások hány %-a után kell legalább két tarifa egységet fizetni, ha minden megkezdett három perc 1 tarifa egység, a beszélgetések átlagos tartásideje 2 perc, és a tartási idő eloszlása exponenciális?

Megoldás: A (15.5) összefüggést alkalmazva:

$F_{tart} = 1 - e^{\frac{-t}{\overline{h}}}$, t=3, $\overline{h} = 2$

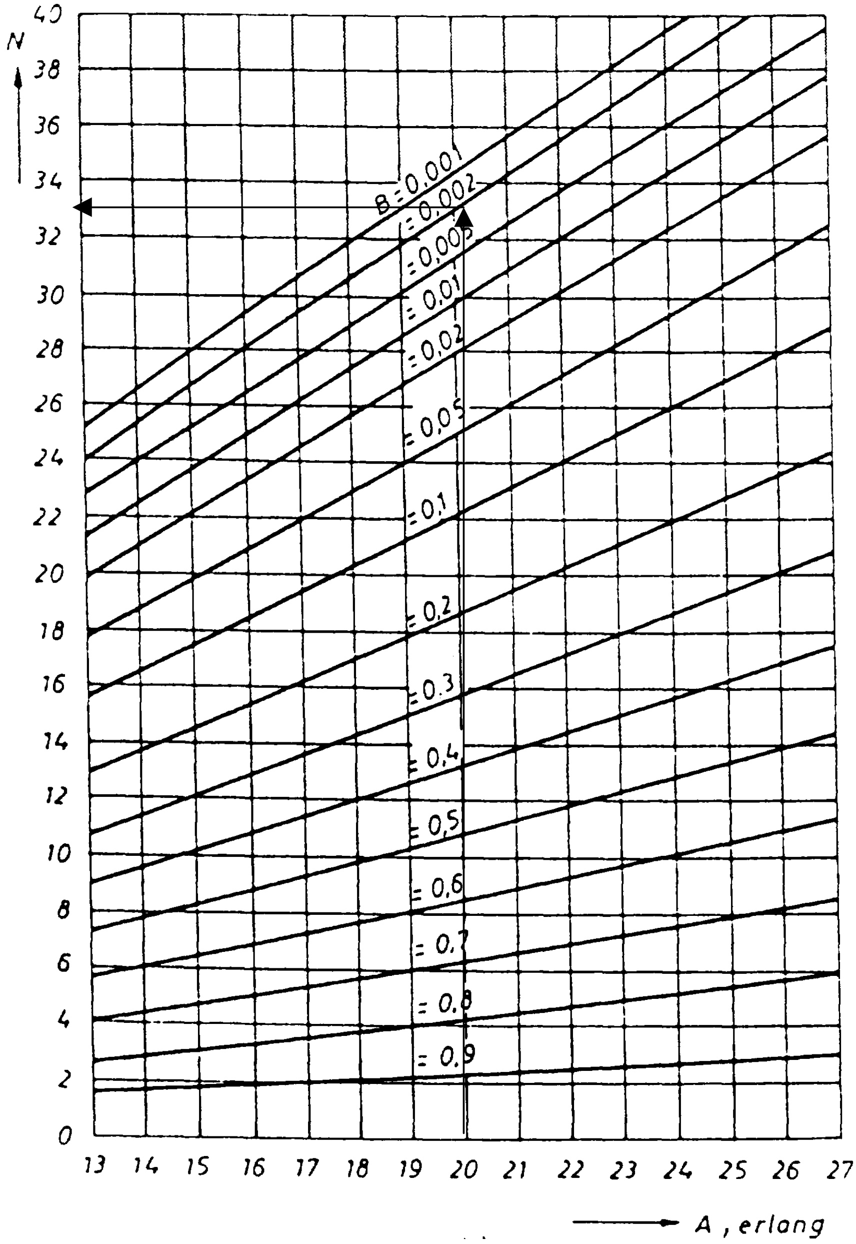
$$P(t > 3) = 1 - F_{tart} = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} = 22\,\%$$



2. *példa:* Legalább mekkora kell legyen a nyaláb nagysága, ha 20 Erlang felajánlott forgalmat 0.002 torlódási szint mellett kell kiszolgálni?

Megoldás:
A 15.3.b) ábráról leolvasva: N≥33

Comment: Hívástorlódás definíciója $B_N = \frac{\sum_{i \geq N}^{S} \lambda_i P_i}{\sum_{i \geq 0}^{S} \lambda_i P_i}$. Ebből $\lambda_i=\lambda$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $B_N(A)=E_N(A)$, ahol $E_N(A)$ az időtorlódás.
Keresünk olyan N-t, hogy $E_N(A) \leq 0.002$ a diagram alapján.



3. példa: Egy 5 áramkörből álló teljes-elérhetőségű veszteséges rendszer áramkörei által átvitt forgalom miként alakul sorrendi és véletlen lefoglalás esetén, ha a felkínált forgalom 2 Erlang?

Megoldás:
Sorrendi lefoglaláskor az egyes áramkörök forgalmát (15.19) adja meg, és a torlódás számítására az alábbi rekurzív összefüggés használandó:

$E_i(A) = \dfrac{AE_{i-1}(A)}{i + AE_{i-1}(A)}$, ennek alapján:

i	$A[E_{i-1}(A)-E_i(A)]$	a_i
1	2(1-0.66667)	0.66666
2	2(0.6667-0.40)	0.53334
3	2(0.4-0.21053)	0.37895
4	2(0.21053-0.09524)	0.23058
5	2(0.09524-0.0367)	0.11708
	átvitt forgalom veszteség=2·0.0367	1.92662 0.0734 2.00002

Véletlenszerű lefoglalásnál az áramkörök egyenkénti forgalma (5.18) szerint:

$$a = \frac{1.92662}{5} = 0.38532 \text{ (átlagos kihasználtság)}$$

Commentek:
Késleltetéssel 2 áramkör is elég, elvi veszteségmentességnél ∞ kell.
Felkínált forgalom: időegység alatt beérkező hívások száma x átlagos tartási idő=A=$\lambda\overline{h}$
Lebonyolított forgalom: felkínált x (1-torlódási valószínűség)=A(1-E)=Y
Veszteség: felkínált forgalom x torlódási valószínűség=AE
$E_N(A)$ annak a valószínűsége, hogy N nyaláb és A felajánlott forgalom mellett N vagy több csatorna foglalt.

$$E_i = \frac{\frac{A^i}{i!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^i}{i!}}$$

1. *példa:* Hogyan alakul egy teljes-elérhetőségű nyaláb áramköreinek átlagos átvitt forgalma 0.005 torlódási értéknél, ha a nyaláb mérete nő?

Megoldás:
Az átlagos áramköri kihasználtság (15.18) kifejezésében 0.005 az egyhez képest elhanyagolható, így az $\frac{A}{N}$ közelítést alkalmazhatjuk. A 15.3 ábra diagramjai alapján:

N	A [Erlang]	a [Erlang]
5	1.13	0.222
10	4	0.4
20	11.1	0.552
30	19	0.633
40	27.6	0.69

Az áramkörök teljesítménye a nyaláb növelésével növekszik. A forgalom koncentrálásával és alkalmas irányítási módszerrel lehet a nyaláb méretét növelni.

Comment: $a = \frac{A}{N}\left[1 - E_N(A)\right] \approx \frac{A}{N}$

1. *példa:* Miként alakul egy tíz áramkörből álló teljes-elérhetőségű nyaláb átlagos áramköri teljesítménye a felajánlott forgalom függvényében?

Megoldás:
A 15.3 ábra diagramjai és (15.18) felhasználásával:

A [Erlang]	$E_{10}(A)$	a [Erlang]
3.1	0.001	0.31
4.5	0.01	0.45
7.5	0.1	0.68
12.0	0.3	0.84
18.3	0.5	0.92

Bebizonyítható, hogy minden véges N esetén $a \to 1$, ha $A \to \infty$.

Comment:
Pl. utolsó sor: A=18.3 Erlang felajánlva, 0.5A=9.2 Erlang elvész, egy áramkörre 9.2/10=0.92 Erlang jut.

1. *példa:* N=30 kiszolgálót tartalmazó teljes-elérhetőségű Erlang várakozásos rendszernek felkínált forgalom 700 hívás/óra, és az átlagos tartásidő 108 s.

a) Mekkora a felajánlott forgalom?
b) Mi lesz a várakozás valószínűsége?
c) Mekkora a várakozni kényszerülő hívások átlagos várakozási ideje?
d) Mi annak a valószínűsége, hogy ha egy hívás várakozni kényszerül, akkor 24 s-nál tovább fog várakozni?

Megoldás:

a) (15.3) szerint: $A = \lambda \overline{h} = \frac{700}{3600} 108 = 21\,\text{Erlang}$

b) (15.32) összefüggés és a 15.3 ábra diagramjával számolva:

$$D_{30}(21) = \frac{N E_N(A)}{N - A\left[1 - E_N(A)\right]} = \frac{30 \cdot 0.015}{30 - 21(1 - 0.015)} = 0.048$$

c) (15.36) szerint: $\tau_v = \frac{\overline{h}}{N - A} = \frac{108\text{ s}}{30 - 21} = 12\text{ s}$ *(Várakozási idő átlaga minden hívásra – előadáson a képlet nem szerepelt)*

d) (15.34) szerint: $P_v(t > 24\text{ s}) = e^{-\frac{N-A}{\overline{h}} t} = e^{-\frac{30-21}{108} 24} = 0.1353$ *(Várakozási idők eloszlásfüggvénye – előadáson a képlet nem szerepelt)*

1. *példa:* Egy bázisállomás N=1 csatornával M=300 mozgóállomást szolgál ki. Egy mozgóállomás forgalmas órái hívásgyakorisága λ_1=0.4 hívás/óra/állomás, az átlagos tartási idő $\overline{h} = 15\,s$.

a) Számítsuk ki a felajánlott forgalmat!
b) Számítsuk ki a hívásveszteséget!
c) Számítsuk ki a kihasználtságot!

Megoldás:
Az eredő hívásintenzitás: $\lambda = M\lambda_1 = 120$ hívás/óra

a) A felajánlott forgalom: $A = \lambda\overline{h} = 120\frac{15}{3600} = 0.5$ Erlang

b) A hívásveszteség (15.13)-ból: $B = \frac{A}{1+A} = \frac{0.5}{1+0.5} = 0.333$

c) Kihasználtság: $B = \frac{\text{foglalt}}{\text{megfigy. idő}} = 0.333$

Vagyis ebben az esetben a hívások egyharmada elvész, és a csatorna kihasználtsága csak 33 százalékos. E példa egy jól szervezett taxi irányító szolgálatra jellemző. Mint majd látni fogjuk, az ilyen viszonylag rövid tartásidejű forgalmat gazdaságosabb várakozásos rendszerben kiszolgálni.

1. *példa:* Egy nyilvános rádiótelefon szolgálatban az átlagos tartási idő 90 s. A forgalmas óra hívásgyakoriság 1 hívás/óra/előfizető.

a) Mennyi az egy előfizető által felajánlott forgalom?

b) Hány előfizetőt tud kiszolgálni egy N=8 csatornás nyalábolt rendszer B=5 % hívásveszteséggel?

Megoldás:

a) Az egy előfizető által felajánlott forgalom: $A_1 = \lambda_1 \overline{h} = 0.025$ Erlang

b) A 8 csatornás rendszer kapacitása B=5 %-nál a 15.3 ábrából A≅4.5 Erlang (táblázatból pontosan A=4.54 Erlang). Tehát a kiszolgálható előfizetők száma: $M = \frac{A}{A_1} = 180$. Tehát a rendszer 5 % hívásveszteséggel csatornánként mintegy 22-23 ($\frac{180}{8} = 22.5$) mozgó előfizetőt tud kiszolgálni.

A példából látható, hogy az egy csatornára jutó felajánlott forgalom mintegy 0.55 Erlang, vagyis mintegy tízszerese annak, amit ugyanilyen hívásveszteség esetén egyetlen csatornára megengedhetnénk. A nyalábolás tehát jelentős nyereséggel jár a csatorna kihasználásában.

1. Feladat

Szubjektív hangminőség tesztek alapján a következő Jel/Interferencia értékeket kell betartani a keskenysávú FM analóg rendszereknél.

A rendszer: S/I ≥ 17 dB, Csatorna sávszélesség B_c=30 kHz.
B rendszer: S/I ≥ 18 dB, Csatorna sávszélesség B_c=25 kHz.
C rendszer: S/I ≥ 23 dB, Csatorna sávszélesség B_c=12.5 kHz.
A GSM rendszernél, mely digitális GMSK modulációt használ, ezek az értékek:
GSM: S/I ≥ 9 dB, Csatorna sávszélesség B=200 kHz. (Egy vivőn 8 TDMA hozzáférés történik)
A rendelkezésünkre álló frekvenciasáv B=25 MHz.

Feladat:

Határozza meg az egyes rendszerek szükséges clusterméretét.
Vesse össze az egyes rendszereket a minimális clustermérettel megvalósított lefedettség mellett kapacitás szempontjából.

Megoldás:
Körsugárzó bázisállomás antennákat használva az előadás anyag alapján a legközelebbi 6 azonos csatornás interferenciát keltő cella hatására létrejövő S/I

$$\frac{S}{I} = \frac{R^{-n}}{\sum_{i=1}^{6} (D_i)^{-n}} = \frac{(D/R)^n}{6} = \frac{(\sqrt{3N})^n}{6} = \frac{Q^4}{6}$$

$N=i^2+ij+j^2$

Ezen kifejezéseket felhasználva:
A rendszer:

$$\frac{S}{I} = 50.1 \le \frac{(D/R)^4}{6} = \frac{(\sqrt{3N})^4}{6} = \frac{Q^4}{6}$$

$$N \ge \frac{\left(\sqrt[4]{S/I \cdot 6}\right)^2}{3} = \frac{\left(\sqrt{S/I \cdot 6}\right)}{3} = \frac{\sqrt{50.1 \cdot 6}}{3} = 5.78$$

N=7 cellából álló rendszert választunk, az egy cellában alkalmazható vivőfrekvenciák száma (ha a vezérlő csatornák alkalmazásától eltekintünk)

$C=W/N=(B/B_c)/N=(25/0.03)/7=119$ csatornát használhatunk minden cellában egyidejűleg.

Végezzük el a számításokat a másik két analóg rendszerre:
B rendszer:

$N \ge 6.48$
Válasszunk N=7 rendszert.
Ekkor a kapacitás C=(25/0.025)/7=142

C rendszer:

$N \geq 11.5$

Válasszunk N=12 rendszert. Mutassuk meg, hogy ez az N=9 után a következő lehetséges clusterméret.

Ekkor a kapacitás C=(25/0.0125)/12=166.

Az előző S/I feltételvizsgálatokat az előadás következő táblázata alapján is elvégezhettük volna.

	N	Q	S/I	C=W/N
i=1, j=1	3	3	11.3	W/3
i=2, j=0	4	3.46	13.78	W/4
i=2, j=1	7	4.58	18.65	W/7
i=3, j=0	9	5.2	20.86	W/9
i=2, j=2	12	6	23.34	W/12
i=3, j=1	13	6.24	24.03	W/13

Az analóg rendszerek közül tehát a C rendszer nyújtja a legjobb kapacitást. (Feltéve persze, ha 12.5 kHz sávszélességen hasonló minőséget nyújt, mint a másik két rendszer.)

A GSM rendszernél először végezzük el a hasonló vizsgálatot.
A táblázatból is megállapítható, hogy az előírt S/I=9 dB értéket az N=3 cluster teljesíti.
Ekkor a kapacitás
C=(25/0.2)/3=41.6=41
Tudjuk azonban, hogy egy vivőn 8 TDMA hozzáférés történik, tehát a kapacitás
$C'=41\cdot 8=328$
Ezen vizsgálat alapján a GSM rendszer sokkal jobb, mint az előző három analóg rendszer.

Viszont.
Itt terjedelem miatt nem részletezendő okok miatt (vezérlő csatornák száma, cellák flexibilisebb kezelése) szektorizálást alkalmaznak.
Végezzük el az előző számításokat 120 ill. 60^o-os szektorokra, N=3 clusterre.

	N	Q	S/I	W/N
i=1, j=1	3	3	14.3 (120^o)	W/3/3
i=1, j=1	3	3	16.07 (60^o)	W/3/6

120^o-os szektorizálás
Az S/I viszony ekkor a táblázatból 14.3 dB, a kapacitás pedig C=328/3=109
60^o-os szektorizálás
Az S/I viszony ekkor a táblázatból 16.07 dB, a kapacitás pedig C=328/6=54
Ezen vizsgálat alapján megállapíthatjuk, hogy a rendszer kapacitása (természetesen nagyon kiváló interferencia védettség mellett) rosszabb lett, mint az előző rendszereké.

Híradástechnika Tantárgy
1998 / 1999 – 3. gyakorlat

<u>Zaj + kétutas terjedés témakörök</u>

1. feladat: Határozzuk meg a levezető kábelből és egy előerősítőből álló rendszer zajtényezőjét mindkét sorrendű összekapcsolás esetén. Adatok: kábel hossza 15 m, fajlagos csillapítása 1 dB/m, hőmérséklete 290 K, erősítő zajtényezője 3 dB, erősítése 20 dB.

Megoldás: A 15 m hosszúságú kábel

$$L=15\ \mathrm{m}\cdot 1\ \mathrm{dB/m}=15\ \mathrm{dB}$$

eredő csillapítást okoz. Az erősítő dB-ben megadott jellemzőit (zajtényező és erősítés) át kell számítani viszonyszámmá:

$$F_a=3\ \mathrm{dB}=10^{0.3}=1.995$$

$$G_a=20\ \mathrm{dB}=10^{2}=100.$$

Hasonlóan számíthatjuk a kábel jellemzőit is, csak azt kell figyelembe vennünk, hogy a kábel zajtényezője megegyezik annak csillapításával (feltéve, hogy a kábel hőmérséklete azonos a 290 K referencia hőmérséklettel), továbbá dB-ben kifejezett erősítése megegyezik a dB-ben megadott csillapításának ellentettjével (viszonyszámban egymás reciprokai).

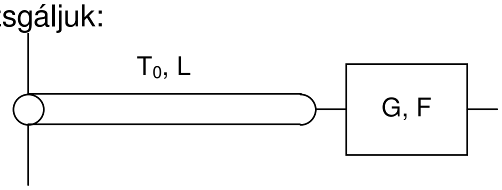
$$F_c=L=15\ \mathrm{dB}=31.62$$

$$G_c=\frac{1}{L}=\frac{1}{31.62}$$

A feladat megoldásához mindkét sorrendnél ugyanazt a képletet kell használnunk, a láncba kapcsolt erősítő eredő zajhőmérsékletének összefüggését (könyv 10.24 egyenlet).

$$F=F_1+\frac{F_2-1}{G_1}$$

Mindkét index értelemszerűen jelentheti az erősítő és a kábel paramétereit is, attól függően, hogy milyen sorrendben követik egymást. Először a kábel + erősítő együttest vizsgáljuk:



$$F_{c\to a}=F_c+\frac{F_a-1}{G_c}$$

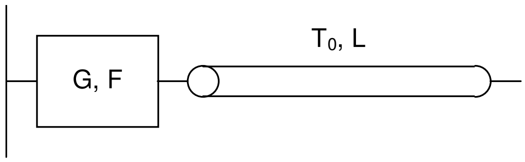
Behelyettesítve a kábel paramétereit (zajtényező=L, erősítés=1/L)

$$F_{c\to a}=LF_a$$

összefüggés adódik. Mivel a viszonyszámmal kifejezett szorzat a dB értékek összegét jelenti, a kábel-erősítő sorrend esetén az eredő zajtényező:

$$15+3=18\ \mathrm{dB}$$

A most levezetett szabály általánosan is érvényes, megfogalmazhatjuk mint egy tanulságot: Ha egy csillapító kapcsolódik egy átviteli elem elé, akkor az eredő zajtényező a csillapítással növekszik (feltéve, hogy a csillapító hőmérséklete 290 K-el közelíthető). A másik sorrendnél:

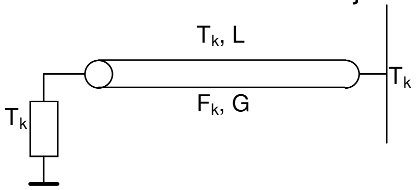


$$F_{a\rightarrow c} = F_a + \frac{F_c - 1}{G_a} = 1.995 + \frac{31.62 - 1}{100} = 2.301 = 3.6\ \mathrm{dB}$$

Láthatjuk, hogy igen nagy eltérés van a két zajtényező között. Levonhatjuk azt a következtetést, hogy az antenna levezető kábel okozta csillapítás NEM kompenzálható után történő erősítéssel. A jel mindkét sorrend esetén azonos, de a zaj lényegesen eltérhet. Ha a jel egyszer már belemerült a zajba, akkor hiába erősítjük, a jel / zaj viszony menthetetlenül elromlott.

((*Comment:* A zajtényező definíciója: $F = \frac{P_{zki}}{GP_{zbe}}$

adott a kábel a következő jellemzőkkel:



$P_{ki}=kT_kB$ $\quad$ $P_{ki} = kBT_k\frac{1}{L} + kBT_{red}\frac{1}{L}$ $\quad$ $T_k = \frac{1}{L}\left(T_k + T_{red}\right)$ $\quad$ $T_k(L-1)=T_{red}$

$F_k = 1 + \frac{T_{red}}{T_0}$ $\quad$ $T_{red}=(F-1)T_0$ $\quad$ $F_k = 1 + \left(L-1\right)\frac{T_k}{T_0}$

Ha $T_k=T_0$, akkor $F_k=L$)).

2*. feladat:* Mennyivel növekszik az 5° nyílásszögű antenna zajhőmérséklete, ha a vételi nyalábban az antennától 384 000 km-re egy 3476 km átmérőjű, 300 K hőmérsékletű tárgy helyezkedik el? (Kb. a Hold adatai)

Megoldás: Ha az antenna vételi tartományát olyan térszögtartományokra bonthatjuk, amelyekben állandónak vehető a nyereség és az antenna által látott tárgyak hőmérséklete, akkor az antenna zajhőmérséklete

$$T_a = \frac{1}{4\pi}\sum_i G_i T_i \Omega_i = \frac{1}{4\pi}\oiint_{4\pi} G(\vartheta,\varphi)T(\vartheta,\varphi)d\Omega$$

Jelen esetben egyetlen tartományt kell figyelembe venni, így nem szükséges indexelni, a hőmérséklet növekedés:

$$\Delta T_a = \frac{G}{4\pi} T\Omega$$

Az antenna nyereségét az energiamegmaradás törvénye alapján határozhatjuk meg (eltekintünk az antenna veszteségétől). Ha az antenna a betáplált teljesítményt nem izotróp módon sugározza el, hanem egy térszögtartományra koncentrálja, akkor ebben a tartományban az izotróp antennához képesti nyeresége:

$$G = \frac{4\pi}{\Omega_a}$$

amelynek figyelembe vételével

$$\Delta T_a = T\frac{\Omega}{\Omega_a}, \quad \Omega_a > \Omega$$

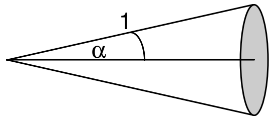
Az adott esetben csak kis szögek fordulnak elő, így a térszögek számításánál jó közelítést adnak a síkgeometria összefüggései is (elhanyagolhatjuk a gömbre vetítés és a síkra vetítés közti eltérést). A tárgy átmérője szögben kifejezve közelítően:

$$\alpha_H = \frac{3476}{384000} = 9.052 \text{ mrad}$$

Az antenna nyílásszöge:

$$\alpha_a = 5° = 87.27 \text{ mrad}$$

A térszögek hányadosa közelítően megegyezik a szögátmérők négyzetének hányadosával:



$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pi = \Omega$$

$$\Delta T_a = T\frac{\alpha_H^2}{\alpha_a^2} = 300\left(\frac{9.052}{87.27}\right)^2 = 3.228 \text{ K}$$

Megjegyzés: A Hold sugárzásának csak egy részét tartalmazza az előző számítás, ugyanis a Hold a saját sugárzásán kívül részben reflektálja a Nap ráeső sugárzását is.

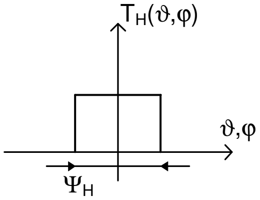
((*Commentek:*

$$T_A = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{4\pi} G(\vartheta,\varphi)T(\vartheta,\varphi)d\Omega$$

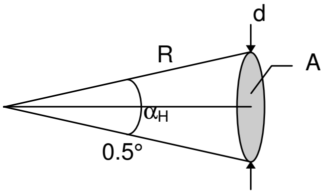
$T(\vartheta,\varphi)=T_0(\vartheta,\varphi)+T_H(\vartheta,\varphi)$

$$T_A = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{4\pi} G(\vartheta,\varphi)T_0(\vartheta,\varphi)d\Omega + \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{4\pi} G(\vartheta,\varphi)T_H(\vartheta,\varphi)d\Omega$$

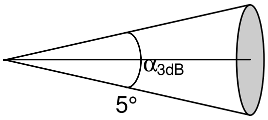
$T_A=T_0+\Delta T$



$\Psi_H<\Psi_{3dB}$, tehát $\Delta T = \frac{1}{4\pi} G T_H \Psi_H$



$$\alpha_H = \frac{d}{R} \qquad \Psi_H = \left(\frac{\alpha_H}{2}\right)^2 \pi$$



$$G = \frac{4\pi}{\Psi_{3dB}} \qquad \Psi_{3dB} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pi \qquad G = \frac{16}{\alpha_{3dB}^2}$$

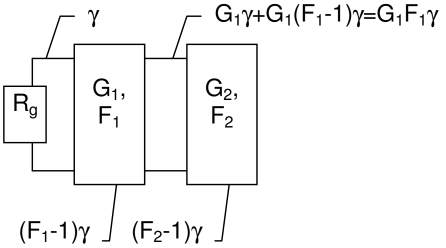
$$\Delta T = \frac{1}{4\pi} G T_H \frac{\alpha_H^2}{4}\pi = T_H\left(\frac{\alpha_H}{\alpha_{3dB}}\right)^2$$))

Általános commentek:

Zajsávszélesség: $B = \dfrac{1}{G_0}\int_0^\infty G(f)\,df$

$P_{ki}=GP_{j,be}+GBkT+P_z$, $\quad P_z=GBkT_{red}$

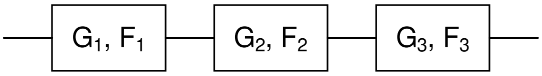
$$F = \frac{S/N_{be}}{S/N_{ki}} = \frac{jel_{be}}{jel_{ki}}\frac{zaj_{ki}}{zaj_{be}} = \frac{1}{G}\frac{G\cdot zaj_{be}+zaj_{sajat}}{zaj_{be}} = 1+\frac{zaj_{sajat}}{G\cdot zaj_{be}}$$



$$F_e = \frac{G_2G_1F_1\gamma + G_2(F_2-1)\gamma}{G_1G_2\gamma} = F_1 + \frac{F_2-1}{G_1}$$

$$F = \left.\frac{P_{z,ki}}{GP_{z,be}}\right|_{T_0}, \quad T_0=290\text{ K}$$

$$F = 1+\frac{T_{red}}{T_0} \qquad T_{red}=(F-1)T_0$$



$$T_{red} = T_{1red} + \frac{T_{2red}}{G_1} + \frac{T_{3red}}{G_1G_2} + \cdots \qquad F = F_1 + \frac{F_2-1}{G_1} + \frac{F_3-1}{G_1G_2} + \cdots$$

Csillapító esetén: $\quad G = \dfrac{1}{L}$

$T_{red}=T(L-1)$

$F_L = 1+\dfrac{T}{T_0}(L-1)$, $\quad F_L=L$, ha $T=T_0$

$T_1 \rightarrow \boxed{T_2,\ L} \rightarrow T$

$$T = \frac{1}{L}T_1 + \left(1-\frac{1}{L}\right)T_2$$

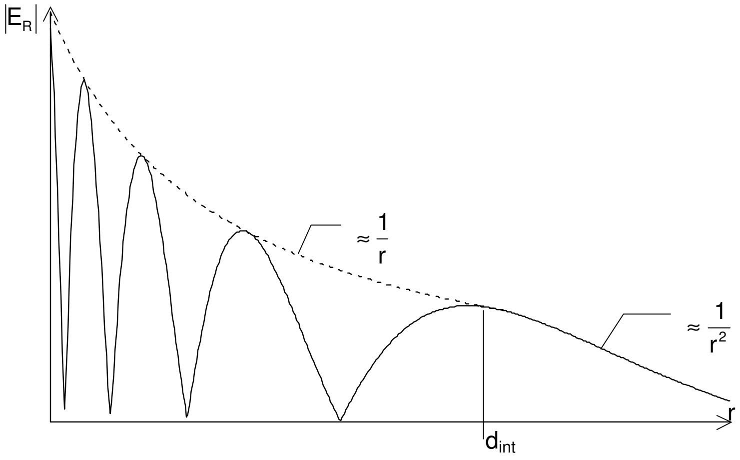
$T_1 \rightarrow \boxed{T_2,\ L_2} \rightarrow \boxed{T_3,\ L_3} \rightarrow T$

$$T = \frac{1}{L_2}\frac{1}{L_3}T_1 + \left(1-\frac{1}{L_2}\right)\frac{1}{L_3}T_2 + \left(1-\frac{1}{L_3}\right)T_3$$

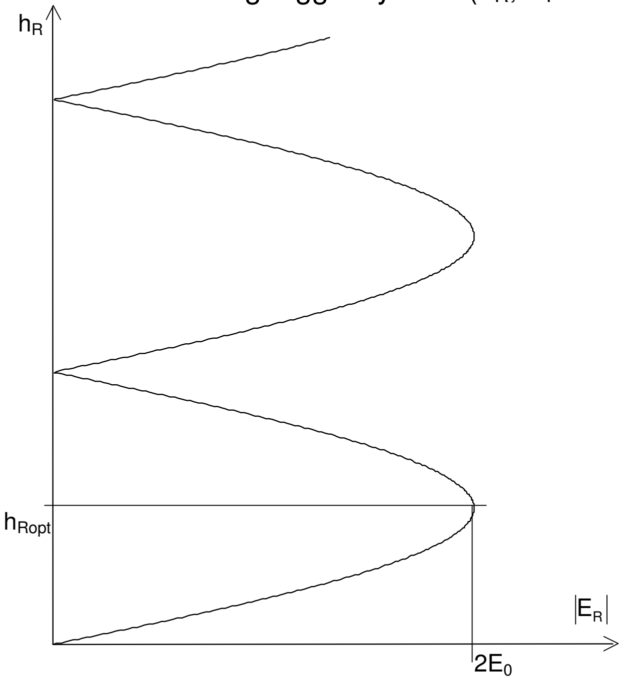
3. *feladat*: Vizsgáljuk meg kétutas hullámterjedés esetén a vételi térerősség szakasztávolságtól illetve vevőantenna magasságtól való függését!
Megoldás: A könyv (9.20) összefüggése alapján sík föld feletti kétutas rádió-összeköttetés esetén a vételi térerősség a következő lesz:

$|E_R| = 2|E_0|\left|\sin\beta\frac{h_T h_R}{r}\right|$, ahol E_0 a szabadtéri térerősség és $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Az előző összefüggést felhasználva ábrázoljuk a vételi térerősséget a szakasztávolság illetve a vevőantenna magasságának függvényében.



Vett térerő a távolság függvényében (h_R, h_T const)



Vett térerő a vevőantenna magasság függvényében (r, h_T const)

Az interferencia zóna határát a következőképpen kapjuk: $d_{int} = \frac{4h_T h_R}{\lambda}$.

Az optimális vevőantenna magasság hasonlóan: $h_{Ropt} = \frac{r\lambda}{4h_T}$.

4*. feladat*: Számítsa ki az optimális vevőantenna magasságot sík föld feletti, kétutas hullámterjedést feltételezve úgy, hogy a vevő bemenetére jutó feszültség maximális legyen. A vevőantennát és a vevőt összekötő kábel hossza megegyezik a vevőantenna magasságával, csillapítása pedig 0.2 dB/m. Az adóantenna magassága 20 m, a szakasztávolság 5 km, az üzemi frekvencia 450 MHz.

Megoldás: A vevő bemenetére jutó teljesítmény az előző feladatokból:

$$-a = -a_0 + 20\log\left(\sin\left(2\beta\frac{h_T h_R}{r}\right)\right) - 0.2h_R \text{ (szabadtér+kétutas+kábel).}$$

Az optimális vevőantenna magasságot ennek a vizsgálatából kapjuk:

$$20\frac{0.4343}{\sin\left(2\beta\frac{h_T h_R}{r}\right)}\cos\left(2\beta\frac{h_T h_R}{r}\right)2\beta\frac{h_T}{r} - 0.2 = 0.$$

Az optimális vevőantenna magasság: $h_R = \arctan\left(\frac{20\cdot 0.4343\cdot 2\beta h_T}{0.2r}\right)\frac{r}{2\beta h_T}$. Ez az optimális magasság 16.9 m-re adódik, szemben a kábelcsillapítás elhanyagolásakor kapott 41.6 m-rel.