

FIZIKAI OPTIKA II. – A DIFFRAKCIÓ

Ahol a távcső világa végződik, ott kezdődik a mikroszkópé.
Vajon melyik nyújt nagyszerűbb panorámát?

VICTOR HUGO
(Saint Dennis)

39.1 Bevezetés

E fejezet tárgyalása során egyre világosabbá válik, hogy a diffrakció tulajdonképpen az interferencia egyik esete; fizikai különbség diffrakció és interferencia között nincsen. Mindkét esetben a fényhullámok interferenciája hozza létre a fényes és sötét tartományokat. Mindazonáltal különbséget teszünk a két jelenségkör között: *interferenciáról* rendszerint akkor beszélünk, ha az interferáló hullámok véges számú pontszerű forrásból (pl. néhány résből), míg *diffrakcióról*, ha egyetlen, térben folytonos fényforrásból (lényegében végtelen sok szomszédos pontforrásból) indulnak ki.

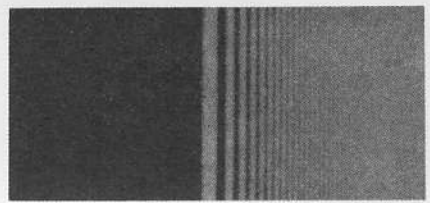
Ha a fény csak egyenes vonalban terjedne, a nem átlátszó testek árnyékának éles szélei lennének, a fényes terület hirtelen váltana át a sötét területre. Valójában azonban a fény kissé elhajlik a tárgy határán és az árnyékszónában gyakran fényes és sötét csíkok keletkeznek a fényhullámok interferenciája következtében. *Ha a fény egy tárgy mellett elhaladva eltér az egyenesvonalú pályától, akkor fényelhajlásról (diffrakcióról) beszélünk (39-1 ábra).*

Hétköznapi tapasztalataink között diffrakciós jelenségek nem szerepelnek, ugyanis ezek (geometriai értelemben) kicsinyek, és ezért észrevétlenek maradnak.¹ Másik oldalról közelítve a jelenséghez meggondolhatjuk, hogy a legtöbb fényforrás nem pontszerű, s így a fényforrás egyik részéről származó elhajlási kép átfedi a többi részről származót, s ezáltal a megkülönböztetésüket nehezíti. Továbbá, az elhajlási kép minden hullámhosszon más és más, s így amikor egyszerre sok hullámhossz van jelen – pl. a fehér fényben –, akkor a különböző diffrakciós képek átfedik egymást. A diffrakciós jelenségek megértése azért fontos, mert ezek szabják meg az optikai berendezések fel-

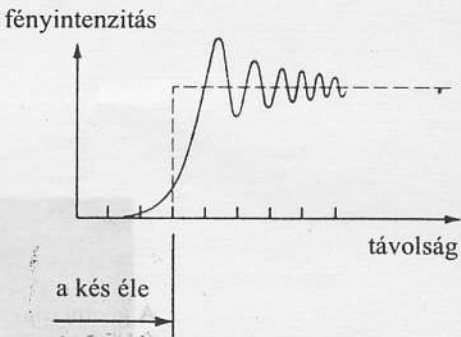
¹ Diffrakciós jelenséget észlelhetünk pl. ha kezünket az egyik szemünk elé tesszük úgy, hogy a fényforrást az éppen csak összeérintett ujjaink közti résen keresztül lássuk. (Két szomszédos ujjunkat esetleg kissé össze kell szorítani.) A kísérlethez vonalszerű fényforrás, pl. távol lévő neoncső is megfelelő lehet, ha egyvonalban fekszik az ujjunk között lévő réssel. Ha a rés elég szűk, megfigyelhető a sötét és fényes csíkok sorából álló kép. Az elhajlási csíkok kifejezetten jól észlelhetők, ha távoli higanygőzlámpa fényét nézzük, mert annak színe csak kevés különböző hullámhosszúságú fényből áll.



(c) Két lencse körbeiktatásával a Fraunhofer-diffrakció feltételeit, közeli fényforrással, illetve ernyővel is megvalósíthatjuk.



(a) A bal oldali sötét árnyéktartományból a jobb oldali fényes tartományba való átmenet nagyított képe.



(b) A fény intenzitása a kés élétől mért távolság függvényében a kés élén keletkező diffrakciós kép esetében. Ha nem lenne elhajlás, az intenzitás a geometriai árnyék határán (ez a szaggatott vonal) hirtelen változna sötétről világosra.

39-1 ábra
Éles késpengén létrejövő elhajlási kép. Vegyük észre, hogy a geometriai árnyék mellett lévő fényes sávok valóban fényesebbek, mint a jobb oldalon látható egyetlen megvilágítás.

bontóképességének felső határát. Ez bizonyos mérések pontosságát is korlátozza.

Az elhajlási jelenségeket már Newton és Huygens is ismerte, de magyarázatukat csak a XIX. században dolgozta ki Augustin J. Fresnel (1788–1827) a kiváló francia fizikus. Az ő munkássága és Thomas Young (1773–1929) brit fizikus kutatási eredményei képezik a fény hullámelméletének alapjait.

Általában a diffrakciós jelenségeket vagy tetszőleges alakú nyílással (*apertúrával*) vagy, a fényforrás és ernyő közé helyezett akadállyal lehet előállítani, ahogyan a 39-2 ábrán látható. Hogy kitaláljuk, mi történik, elfogadjuk Huygens elvét és azt gondoljuk, hogy a fényhullám *frontjának minden pontja új, pontszerű fényforrásként viselkedik*. Így az ernyő bármely pontjára (például az ernyő közvetlenül megvilágított részén lévő P_1 pontra, vagy az árnyékolt helyen lévő P_2 pontra) eső fény a résen áthaladó teljes fényhullám minden egyes pontjából kiinduló fénysugarak hatásának az összege. Az ábrán bemutatott eset két okból is bonyolult. (1) A hullámfront a nyílásban nem sík, hanem domború felület, ami azt jelenti, hogy a hullámfront különböző pontjaiban, a hullámfront normálisa és a P ponthoz húzott egyenes közti szög nem ugyanakkora. (2) A hullámfront különböző pontjaitól az adott P pont távolsága különböző.

Hasonló optikai viszonyokat másként, a 39-3a ábrán vázoltak szerint is előállíthatunk: egy közeli, pontszerű fényforrásból széttartó fény jut a réshez. Az ernyőt érő fény a rés pontjaiból kiinduló elemi hullámok szuperpozíciója. Ezt az általános esetet, **Fresnel-féle diffrakciónak** nevezzük és pontos leírása bonyolult. Ennek az esetnek csak néhány egyszerű példáját említjük meg a fejezet végén.

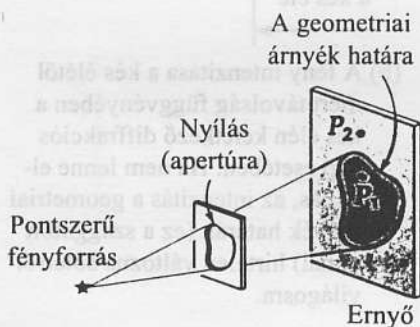
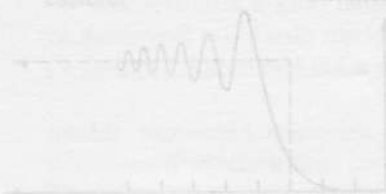
A 39-3b ábra sokkal könnyebben elemezhető esetet mutat. A nyíláshoz (fényrekeszhez) érkező sugarak *párhuzamosak* (a hullámfront *sík*) és az apertúrából távoznak is (amelyek az ernyő egy adott P pontjára esnek) *párhuzamosak* (vagy lényegében párhuzamosak), mert az ernyő nagyon távol van elhelyezve. Ezt az esetet Fraunhofer-féle diffrakciónak nevezik. A Fraunhofer-féle diffrakció feltételei akkor is megvalósíthatók, ha a fényforrás és az ernyő nem helyezhető nagy távolságba. Ekkor az egymáshoz közeli fényforrás és ernyő közé lencsét kell a 39-3c ábra szerint közbeiktatni.² A Fraunhofer-diffrakció könnyen leírható, mert nem szerepelnek benne a Fresnel-diffrakcióra jellemző változó nagyságú szögek.

A Fresnel- és a Fraunhofer-féle diffrakció néha nem különíthető el élesen. Például, ha a réshez közeli fényforrásból és ernyőből indulunk ki és fokozatosan egyre távolítjuk őket az apertúrától, a Fresnel-féle elhajlási kép fokozatosan Fraunhofer-elhajlássá alakul. Így a Fraunhofer-diffrakció valójában csak a sokkal általánosabb Fresnel-diffrakció *határesete*.

39.2 Elhajlás résen

Az egyrészes Fraunhofer-diffrakciót kétféleképpen tárgyaljuk. Az első ún. Fresnel-féle zónamódszer egyszerű, de rendkívül hasznos közelítő eljárás a rés mögött nagy távolságban elhelyezett ernyőn a kioltás és maximális erősítések helyének meghatározására. A második, pontosabb és részletesebb leírást adó eljárás a *fázisvektorok (fazorok) használatával* az elhajlási kép intenzitáseloszlásának kvantitatív meghatározására is alkalmas a diffrakciós képen.

² A 39-3 és későbbi ábrákon a fényrekesznél lévő hullámfrontból csak azokat a sugarakat rajzoljuk meg, amelyek eléri a P pontot. Természetesen ugyanekkor vannak olyan más szögben induló sugarak, amelyek az ernyő más pontjai felé tartanak.



39-2 ábra

Elhajlás: általános eset. Az ernyőhöz érő fény a nyíláson átlépő fényhullámfront egyes pontjaiból induló elemi hullámok egymásrarakódása.



(a) A **Fresnel-diffrakció**. Mind a fényforrás, mind az ernyő közel van az apertúrához. Sem a fényforrásból induló sugarakat, sem az ernyőre érkezőket nem lehet párhuzamosnak tekinteni.

(b) A **Fraunhofer-diffrakció**. Mind a fényforrás, mind az ernyő a nyílástól nagyon távol van, a nyílásra beeső és onnan az ernyő felé tartó sugarak párhuzamosak.

(c) Két lencse közbeiktatásával a **Fraunhofer-diffrakció** feltételeit közeli fényforrással, illetve ernyővel is megvalósíthatjuk.

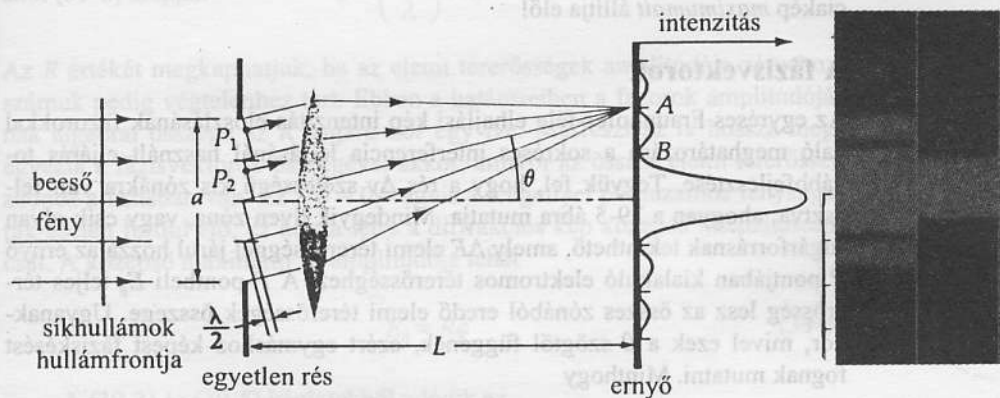
39-3 ábra

A Fresnel- és a Fraunhofer-féle diffrakció közti különbség. A Fraunhofer diffrakciónál mind az apertúrára érkező, mind az azt elhagyó fénysugarak párhuzamosak.

A Fresnel zónák

Tekintsük a 39-4 ábrán bemutatott Fraunhofer-diffrakciós berendezést. Hogy a problémát két dimenzióra korlátozzuk, az ábra síkjára merőlegesen álló *a* szélességű rés elhajlási képét elemezzük. A részt *zónákra* osztjuk úgy, hogy egy zóna széléről induló fénysugár úthossza pontosan fél hullámhosszal legyen nagyobb, mint a szomszédos zóna széléről indulóé. Ezeket a zónákat *Fresnel zónáknak* nevezzük. A 39-4 ábrán a rés elég széles ahhoz, hogy az adott irányban elhajló fényre pontosan négy ilyen zóna legyen benne.

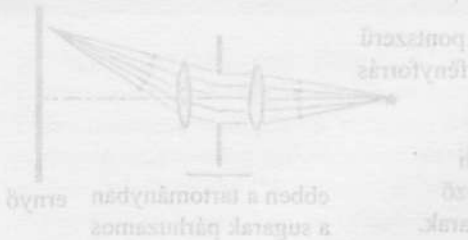
Mi történik a szomszédos zónákhoz tartozó sugarakkal? Az egymásnak megfelelő P_1 , ill. P_2 pontokból induló sugarak úthossza éppen fél hullámhosszal különbözik egymástól, amikor az ernyőre érnek. A zónákból induló elemi hullámok azonban mind ilyen sugárpárokba rendezhetők, s ez azt jelenti, hogy a két szomszédos zóna esetén az egyik zónából érkező fény a szomszédos másik zónából érkező fényt interferencia révén kioltja.



39-4 ábra

A Fraunhofer-diffrakció. Az ernyő egy pontjában a kioltás feltételét úgy állapítjuk meg, hogy a részt Fresnel-zónákra osztjuk fel. (Az áttekinthetőség kedvéért a rés szélességét

nagyon eltúloztuk az ernyő *L* távolságához képest.) A beeső fénysugarak párhuzamosak, és a nyílásnál sík hullámfrontot alkotnak.



MINIMUM FELTÉTEL AZ EGYRÉSES ELHAJLÁSI KÉPRE A ZÓNA MÓDSZER SZERINT

Az elhajlási képben a **minimumok** az ernyőn ott jelennek meg, ahonnan nézve a rés pontosan **páros** számú Fresnel-zónát tartalmaz.

A 39-4. ábra *A* pontjába tartó fénynyaláb négy, a *B* pontba tartó viszont két zóna szélességű.

Az egyrése diffrakciós kép intenzitásminimumainak helyét így az alábbi módon is kifejezhetjük:

KIOLTÁS FELTÉTELE (ALTERNATÍV MEGFOGALMAZÁS)

A diffrakciós képben **intenzitásminimum** (kioltás) ott jelentkeznek, ahol a rés egyik szélétől érkező fénysugár a **hullámhossz egész számú többszörösével** hosszabb utat tesz meg, mint a másik szélről érkező fénysugár.

Így a 39-4 ábrán az elhajlási minimumok ott vannak, ahol

EGYRÉSES FRAUNHOFER-ELHAJLÁS MINIMUM-HELYEI

$$m\lambda = a \sin \theta \quad (\text{minimumhely esetén } m = 1, 2, 3, \dots) \quad (39-1)$$

Vegyük észre, hogy a középső *maximum* az $m = 0$ esetnek felel meg, míg az összes többi egész értékre minimum adódik. A legtöbb esetben a θ szög elég kicsi ahhoz, hogy a kis szögekre vonatkozó $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$ közelítés érvényes legyen. Ha ez fennáll, akkor a középső maximum és az összes minimum egyenlő távolságra vannak egymástól. Így a centrális maximum teljes szélessége pontosan kétszer akkora, mint a szomszédos minimumok közötti távolság.

Ne tévesszük össze ezt a képletet a 38. fejezet (38-8) képletével:

$$m\lambda = d \sin \theta \quad (\text{maximumok: } m = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén}).$$

A két képletnek ugyanaz az alakja, de a (39-1) képlet az egyrése elhajlási kép *minimumait*, míg a kétrésre vonatkozó (38-8) összefüggés az interferenciakép *maximumait* állítja elő!

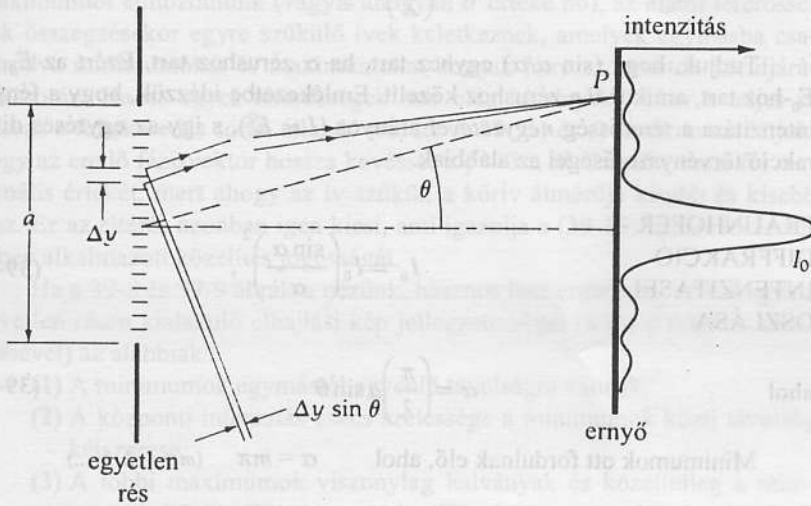
A fázisvektorok

Az egyrése Fraunhofer-féle elhajlási kép intenzitás-eloszlásának fázorokkal való meghatározása a sokrése interferencia leírásánál használt eljárás továbbfejlesztése. Tegyük fel, hogy a rés Δy szélességű kis zónákra van felosztva, ahogyan a 39-5 ábra mutatja. Mindegyik ilyen zóna, vagy csik olyan sugárforrásnak tekinthető, amely ΔE elemi térerősséggel járul hozzá az ernyő *P* pontjában kialakuló elektromos térerősséghez. A *P*-pontbeli E_θ teljes térerősség lesz az összes zónából eredő elemi térerősségek összege. Ugyanakkor, mivel ezek a θ szögtől függenek, ezért egymáshoz képest fáziskésést fognak mutatni. Minthogy

$$\frac{\text{Útkülönbség}}{\lambda} = \frac{\text{Fáziskülönbség}}{2\pi}$$

ezért

$$\frac{\Delta y \sin \theta}{\lambda} = \frac{\Delta \phi}{2\pi}$$



ahol λ a hullámhossz és $\Delta\phi$ a szomszédos zónákból eredő elemi térerősség közötti fáziskülönbség. Átrendezéssel:

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta y \sin \theta \quad (39-2)$$

A 39-6b ábra a 39-5 ábrán látható rés felső szélén elhelyezkedő három szomszédosan fekvő zóna elemi térerősségeinek a fáziskülönbségét mutatja. Ha a θ szög kicsi, akkor az elemi térerősségek nagysága azonosnak tekinthető. A rés felső szélén elhelyezkedő első és az alsó szélén lévő utolsó zóna elemi térerőssége közti θ fázisszöveget a 39-6a ábra mutatja. A fázisvektorok E_θ összege olyan egyenlőszárú háromszög alapja, melynek szára R . A trigonometriából ismeretes, hogy

$$E_\theta = 2R \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (39-3)$$

ahol (39-2) alapján

$$\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)a \sin \theta \quad (39-4)$$

Az R értékét megkaphatjuk, ha az elemi térerősségek amplitúdója zérushoz, számuk pedig végtelenhez tart. Ebben a határesetben a fázorok amplitúdójának algebrai összege az R sugarú kör egy íve. Másrészt az ív hossza megegyezik a fázisvektorok összegével akkor, amikor az összes elemi térerősség azonos a fázisban van. Ez a $\theta = 0$, vagyis a tengellyel párhuzamos fénysugarak esetén fordul elő, ez hozza létre a diffrakciós kép középső intenzitáscsúcsát. A középső maximum E_0 amplitúdója tehát

$$E_0 = R\phi \quad (39-5)$$

A (39-3) és (39-5) képletekből adódik az

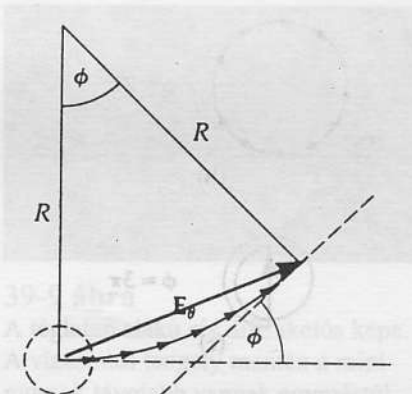
$$E_\theta = \frac{2E_0 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\phi} = E_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right), \quad (39-6)$$

összefüggés, ahol $\alpha \equiv \phi/2$. A (39-4) képletből

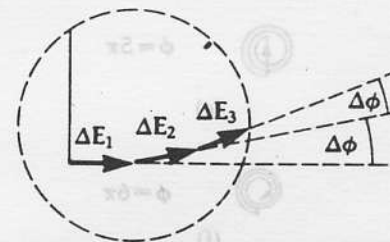


39-5 ábra

A Fraunhofer-diffrakció. A P pontban az elektromos térerősség az apertúra Δy szélességű zónákból származó elemi térerősségek összege.



(a) A ΔE_θ elemi térerősség-járulékok fázor-összeadása a teljes E_θ térerősség meghatározására.



(b) Az első három elemi térerősség felnagyított képe.

39-6 ábra

A teljes E_θ elektromos térerősség-amplitúdó meghatározása az ernyő P pontjában a fázisvektor-összeadás segítségével.

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) a \sin \theta \quad (39-7)$$

Tudjuk, hogy $(\sin \alpha/\alpha)$ egyhez tart, ha α zérushoz tart. Ezért az E_θ az E_0 -hoz tart, amikor θ a zérushoz közelít. Emlékeztetbe idézzük, hogy a fény I intenzitása a térerősség négyzetével arányos ($I \propto E^2$), s így az egyrészes diffrakció törvényszerűségei az alábbiak.

FRAUNHOFER -
DIFFRAKCIÓ
INTENZITÁSEL-
OSZLÁSA

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2, \quad (39-8)$$

ahol

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) a \sin \theta \quad (39-9)$$

Minimumok ott fordulnak elő, ahol $\alpha = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)

Ha ezt a (31-7) képlettel összevetjük, akkor vagyis $(\pi/\lambda)a \sin \theta = m\pi$, vagy

EGYRÉSES
FRAUNHOFER-
DIFFRAKCIÓ
MINIMUMAI

$$m\lambda = a \sin \theta \quad (39-10)$$

adódik, ahol a *minimumok* $m = 1, 2, 3, \dots$ esetén állnak elő. Megállapíthatjuk, hogy ez ugyanaz az eredmény, amihez a Fresnel-féle zóna-módszerrel jutunk.

A (39-8) képletből látható, hogy nem egyszerű a *maximumok* helyének és relatív amplitúdóinak egzakt meghatározása. Közelítő kifejezéseket azonban előállíthatunk a relatív amplitúdókra, ha feltesszük, hogy a maximumok éppen félúton vannak a minimumok között. Vagyis, ha tudjuk, hogy a minimumok akkor lépnek fel, amikor $\alpha = m\pi$, akkor maximum közelítőleg³ akkor következik be, amikor

$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots) \quad (39-11)$$

Ezt a (39-8) képletbe behelyettesítve adódik, hogy

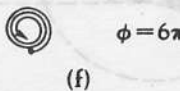
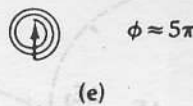
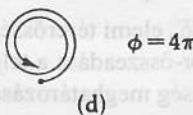
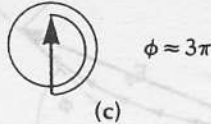
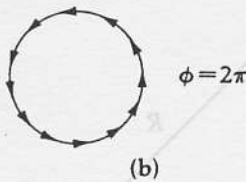
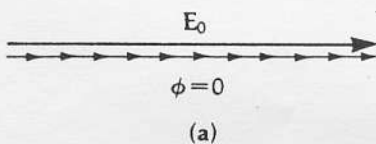
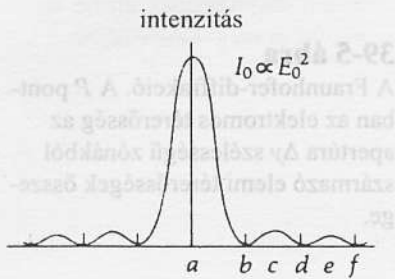
$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left[\frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} \right]^2 \quad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots)$$

vagy

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \quad (\text{közeliítő maximumok az } m = 1, 2, 3, \dots \text{ esetén})$$

Így, ha I_0 a középső csúcs intenzitása, akkor $m = 1$ esetén $I_\theta = 0,045I_0$, $m = 2$ -re, $I_\theta = 0,016I_0$, és $m = 3$ -ra, $I_\theta = 0,0083I_0$. Világosan látszik, hogy az elhajlási kép csaknem teljes fényintenzitását a középső csúcs hordozza.

Az elhajlási kép geometriai értelmezése az intenzitás-viszonyok megértésében sokat segíthet. A 39-7a ábrán a középső maximumban a (ΔE) fázis-



39-7 ábra

Az egyrészes diffrakciókép fázor-összegezési ábrája. Az áttekinthetőség kedvéért a (c)-től az (f)-ig az íveket nem körökkel, hanem spirálokkal ábrázoltuk.

³ Az I_θ maximum pontos helyét a $dI_\theta/d\alpha = 0$ alapján számíthatjuk ki, ami a $\tan \alpha = \alpha$ egyenlethez vezet. Az egyenletet kielégítő első négy α -érték: 4,4934, 7,7253, 10,9041, és 14,0662. Lásd a 39C-32 feladatot.

vektorok egy egyenesbe esnek és eredőjük az E_0 fázor. Ahogyan a centrális maximumtól elmozdulunk (vagyis ahogyan θ értéke nő), az elemi térerősségek összegzésekor egyre szűkülő ívek keletkeznek, amelyek egymásba csavarodva minimumokat és maximumokat hoznak létre az ismételt körüljárások során. Ha az egyes térerősségek már elég kicsinyek, akkor a teljes ív hossza a feltekeredés során állandó marad. A 39-7c) és e) ábrákon azt látjuk, hogy az eredő fázisvektor hossza kevéssel a $\phi = 3\pi$, ill. 5π előtt veszi fel maximális értékét, mert ahogy az ív szűkül, a körív átmérője kisebb és kisebb lesz. Ez az eltérés azonban igen kicsi, ami igazolja a (39-10) képlet levezetésében alkalmazott közelítés jogosságát.

Ha a 39-8 és 39-9 ábrákra nézünk, hasznos lesz emlékezni arra, hogy az egyetlen résen kialakuló elhajlási kép jellegzetességei (a kis θ értékek közelítésével) az alábbiak:

- (1) A minimumok egymástól egyenlő távolságra vannak.
- (2) A központi intenzitás-csúcs szélessége a minimumok közti távolság kétszerese.
- (3) A többi maximumok viszonylag halványak és közelítőleg a minimumok között félúton vannak. (Ténylegesen egy kissé a középső csúcs felé tolnak.)
- (4) Amikor a rés szélességét csökkentjük, az elhajlási kép nagyobb lesz.
- (5) Ha a hullámhosszat csökkentjük, az elhajlási kép kisebb lesz.

39-1 PÉLDA

A diffrakciós képen a középső maximum szélessége gyakran különösen fontos. Tegyük fel, hogy a rés 3×10^{-4} szélességű és hogy sárgászöld, $\lambda = 500$ nm hullámhosszúságú fénnel van megvilágítva. Határozzuk meg, milyen széles a centrális maximum a réstől 2 m távol lévő ernyőn.

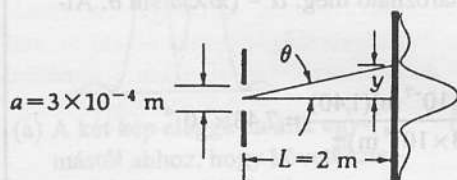
MEGOLDÁS

A centrális maximum teljes szélessége egyenlő a két oldalán lévő első minimumok közti távolsággal. A 39-10 ábrán látható θ szög értékét a (39-1) képlettel kaphatjuk meg:

$$a \sin \theta = m\lambda$$

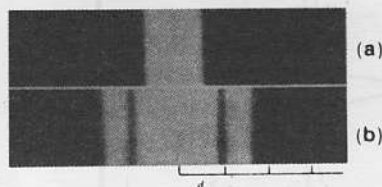
ahol, $m = 1$ tűzi ki az első minimumot. Az a és a λ értékeit behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sin \theta = \frac{(1)\lambda}{a} = \frac{5,00 \times 10^{-7} \text{ m}}{3 \times 10^{-4} \text{ m}} = \frac{4}{3} \times 10^{-3}$$



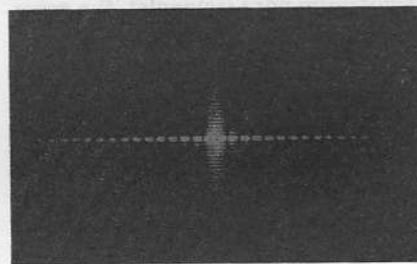
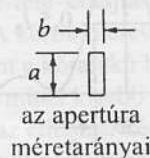
39-10 ábra

A 39-1 példához



39-8 ábra

Két fénykép ugyanarról az egyréses elhajlási képről. A résen áthaladó fény 90%-a a központi csúcsra koncentrálódik. A (b) esetben az expozíciós időt jelentősen megnöveltük, hogy a két oldalon megjelenő halvány maximumokat is kihozza a felvétel. (Emiatt a központi csúcs túlexponált.) Az alsó skála a minimum helyeket jelzi.



39-9 ábra

A téglalap alakú rés diffrakciós képe. A vízszintes tengely mentén a minimumok távolabb vannak egymástól, mint a függőlegesen, mert a rés vízszintes oldala kisebb a függőlegesnél.

39-13 ábra

Két, nem koherens pontszerű fényforrással létrehozott Fraunhofer-féle elhajlási kép egymásmellette.

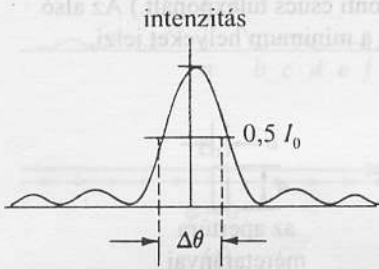


Az y távolság a centrális maximum félszélessége: $y = L \operatorname{tg} \theta$.
Mint hogy $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta$, a kis szögek esetében, ezért

$$y = (2 \text{ m}) \left(\frac{4}{3} \times 10^{-3} \right) = 3,33 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Így a centrális maximum $2y$ szélessége:

$$2y = 6,67 \text{ mm}$$



39-11 ábra
A 39-2 példához.

39-2 PÉLDA

(a) Határozzuk meg a centrális maximumon belül a maximális intenzitás értékének feléhez tartozó szélesség $\Delta\theta$ szögét arra a helyzetre, melyet a 39-1 példában írtunk le. (b) Határozzuk meg az ernyőn a középső csúcs szélességét a maximális intenzitás felénél (lásd 39-11 ábrát).

MEGOLDÁS

(a) Az intenzitáseloszlást a (39-8) képlet adja meg:

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

A $I_\theta/I_0 = 0,5$ esetre ebből $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 = 0,5$

adódik. Minthogy ezt az egyenletet *algebrailag* nem lehet megoldani, az optikai szakkönyvek $\sin \alpha/\alpha$ értékét α függvényében táblázatokban is megadják. Ugyanakkor azonban alkalmazhatjuk a fokozatos megközelítést, a szukcesszív approximáció módszerét az α meghatározására. Mivel a formulákban szereplő szögeket, mindig *radiánban* kell kifejezni, így egy jó első közelítés lehet $\alpha = \pi/2$ (hiszen az első minimum az $\alpha = \pi$ helyen van). Ekkor

$$\left[\frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)} \right]^2 = 0,405$$

Mivel ez a mennyiség nő, ha az α csökken, jobb közelítéssel is próbálkozhatunk: $\alpha \approx 1,40 \text{ rad} (\approx 80^\circ)$. Ezzel:

$$\left(\frac{\sin 80^\circ}{1,40} \right)^2 \approx 0,500$$

A θ szög a (39-7) képletből határozható meg: $\alpha = (\pi/\lambda)a \sin \theta$. Átrendezéssel

$$\sin \theta = \left(\frac{\lambda}{a\pi} \right) \alpha = \frac{(5 \times 10^{-7} \text{ m})(1,40)}{(3 \times 10^{-4} \text{ m})\pi} = 7,43 \times 10^{-4}$$

A teljes szélességnek megfelelő $\Delta\theta$ szög így

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1}(7,43 \times 10^{-4}) = 1,49 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

(b) Az ernyőn a középső csúcs szélessége a maximális intenzitás értékének felénél:

$$\begin{aligned} \text{Szélesség} &= \Delta\theta = (2 \text{ m}) (1,49 \times 10^{-3} \text{ rad}) = 2,98 \times 10^{-3} \text{ m} \\ &= 2,98 \text{ mm} \end{aligned}$$

39.3 Elhajlás kör alakú nyíláson

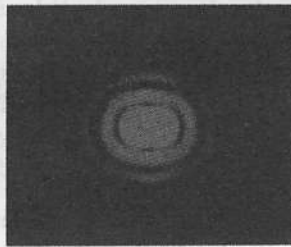
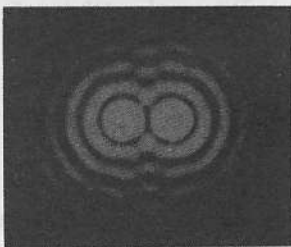
Az elhajlási jelenségek súlyos korlátokat szabnak a mikroszkópok, teleszkópok, de más, az elektromágneses színeképek egyéb tartományaiiban felhasznált berendezések felbontóképességére is. A legtöbb berendezésben kör alakú fényrekeszt, apertúrát alkalmaznak, ilyen pl. a lencsék vagy a rádióantennák kör alakú korongja. Az elhajlási kép elemzése ekkor jóval bonyolultabb, mint az egyszerű rés esetén, jóllehet az eredmény hasonlít az egyetlen rés elhajlási minimumaira vonatkozó összefüggéshez. ($a \sin \theta = m\lambda$). A D átmérőjű kör alakú apertúra esetén a minimumok helye:

A FRAUNHOFER-DIFFRAKCIÓ
MINIMUMAI KÖR ALAKÚ
NYÍLÁS ESETÉN

$$D \sin \theta = p_m \lambda \quad (39-12)$$

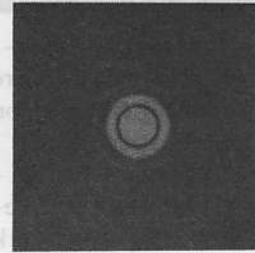
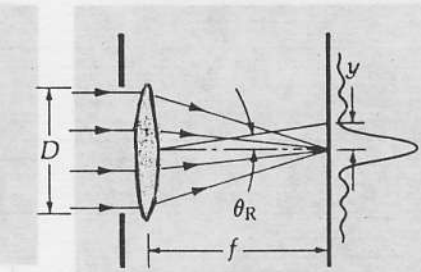
ahol $p_1 = 1,220$, $p_2 = 2,233$, $p_3 = 3,238$, $p_4 = 4,241$, $p_5 = 5,243$ stb. A 39-12 ábra az elhajlási képet mutatja. A középső világos foltot *Airy-korongnak* nevezik Sir George Airy emlékére, aki először írta le ezt az elhajlási képet 1835-ben. Az Airy-korong az apertúrán áthaladó fényintenzitás 84%-át tartalmazza, míg a centrális foltra és az első diffrakciós gyűrűre együtt az intenzitás 91%-a jut.

Rayleigh kritériuma két egyenlő intenzitású pontforrás megkülönböztethetőségére (felbonthatóságára) vonatkozik. Eszerint a fényforrások megkülönböztetéséhez az szükséges, hogy az egyik elhajlási képének középső csúcsa a másik elhajlási képében a maximális értékhez ne essen közelebb az első minimumnál. Tekintsük a 39-13 ábrát. Mínthogy a szögek kicsik, $\sin \theta_R \approx \theta_R$ ebből adódik Rayleigh kritériuma:



(a) A két kép eléggé elválnak egymástól ahhoz, hogy következtessünk belőle a két forrásra.

(b) A képek átfedik egymást. A Rayleigh kritérium szerint az eredő kép alapján aligha különböztethető meg egymástól a két forrás.



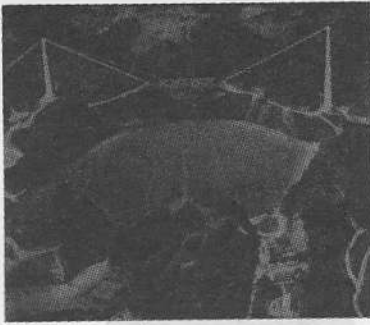
39-12 ábra

Fraunhofer-féle elhajlás, kör alakú nyíláson. A körök mérete mindig nagyobb, mint a kör alakú lyuk D átmérője. Ezért minél kisebb a lyuk, annál szélesebb az elhajlási kép. Az első diffrakciós minimum helye meghatározza a θ_R felbontási szög minimumát. (A fénykép kissé túlexponált, hogy a centrális fényes foltot körülvevő halványabb gyűrűk is láthatóvá váljanak.)

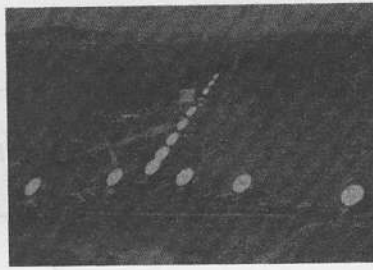
39-14 ábra
Rádióteleszkópok

39-13 ábra

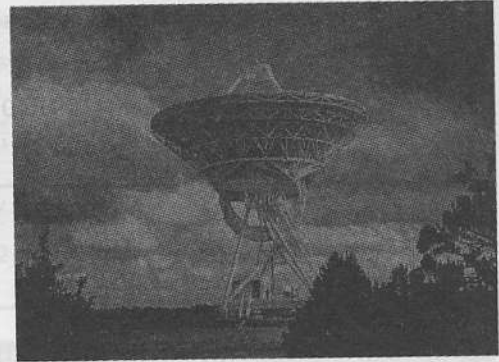
Két, nem koherens pontszerű fényforrással létrehozott Fraunhofer-féle elhajlási kép egymásrarakódása.



(a) A világ legnagyobb rádióteleszkópja a kb. 300 m átmérőjű, rögzített tányérú reflektor Arecibo-ban (Puerto Rico). Mozgatható felső antennája – a fókuszhoz közel – a függőlegestől $\pm 20^\circ$ irányon belül érkező jelek vételére alkalmas. Az építés idején az antenna 8 hektárnyi felülete nagyobb volt, mint az addig valaha is megépített más rádióteleszkópok felületeinek összege.



(b) Az „Igen Nagy Rendszer” (Very Large Array) (New Mexico) 27 db 26 m átmérőjű irányítható korongot tartalmaz, amelyek Y alakú, több mint 27 km hosszú vonalon helyezkednek el. A jeleket az apertúraszintézis elnevezésű interferometrikus technikával elemzik az Y elágazási pontjában elhelyezkedő nagy számítógépen. A rendszer szögfelbontása a vonal hosszától függ és összemérhető a nagy teleszkópok látható fényben végzett 1 ívmásodpercnyi pontosságú méréseivel.



(c) Az „Igen Hosszú Alapvonalú Rendszer” (Very Long Baseline Array, VLBA), aminek befejezését 1992-re tervezték, 10 db 25 m átmérőjű antennából áll. A rendszer kb 8000 km hosszúságban az Északi Félgömbön húzódik végig. A fénykép a Los Alamos-ban (New Mexico, USA) épült antennát mutatja. A berendezést a Socorro-ban (New Mexico) elhelyezett központ irányítja. Az egyes antennákról származó információt mágneszalagon rögzítik és a központ 10^{12} művelet/másodperc sebességű számítógépen dolgozzák fel. Ennek a rendszernek a felbontóképessége olyan lesz, mint egyetlen 8000 km átmérőjű rádióteleszkópé. Az ilyen szögfelbontás egyenértékű azzal, mintha New Yorkban ülénk, és egy San Fransiscóban felfüggesztett újságot olvasnánk.

39-14 ábra Rádióteleszkópok

RAYLEIGH KRITÉRIUMA:
A θ_R MINIMÁLIS FELBONTÁSI
SZÖG KÖRALAKÚ
APERTÚRÁNÁL

$$\theta_R = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (39-13)$$

ahol D a köralakú apertúra átmérője, és λ a hullámhossz. Ha az emberi szemre alkalmazzuk ezt a megállapítást, akkor ez kb. 20 ívmásodpercnyi felbontóképességet ad. A gyakorlatban az átlagos emberi szem felbontóképessége kicsit rosszabb amiatt, hogy a retinán az érzékelők véges méretűek. Másfelől, azok akik rendszeresen elemeznek fényképeket, megfelelő gyakorlattal a Rayleigh-határnál kisebb részleteket is észrevesznek. Két vagy több rádióteleszkóp (39-14 ábra) jeleit kombinálva olyan szögfelbontás érhető el, ami nagyjából megegyezik a rádióteleszkópok távolságával azonos átmérőjű egyetlen nagy rádióteleszkóp felbontásával (persze, sokkal kisebb érzékenységgel).

39-3 PÉLDA

A világ legnagyobb működő refraktora (lencsés távcsöve) a Yerkes teleszkóp (Chicago Egyetem), amelynek objektív lencsége 1,02 m átmérőjű, fókusz távolsága 18,9 m. Adjuk meg a centrális csúcs teljes szélességét (az Airy-korong átmérőjét) egy csillag képénél kialakuló elhajlási képen, feltéve, hogy az átlagos hullámhossz 500 nm.

MEGOLDÁS

A centrális csúcs teljes szélessége $2\theta_R$, ahol θ_R a (39-13) képlet szerint veendő:

$$\theta_R = \frac{(2)(1,22)\lambda}{D} = \frac{(2)(1,22)(500 \times 10^{-9} \text{ m})}{(1,02 \text{ m})}$$

$$= 1,20 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

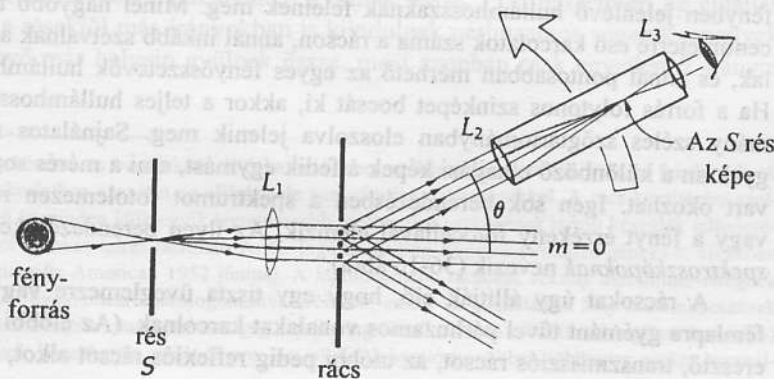
Egy f fókusz távolságú objektív lencse esetén ennek a kis szélességnek megfelelő y szélességet (39-12 ábra) az alábbi kifejezés adja meg:

$$y = (f)(2\theta_R) = (18,9 \text{ m})(1,20 \times 10^{-6} \text{ rad}) = 2,27 \times 10^{-5} \text{ m}$$

39.4 Elhajlás rácson

A *diffrakciós rács* sok egymáshoz igen közeli keskeny résből áll. Az első rács, amit Fraunhofer készített, egyszerűen egymás mellett igen közel elhelyezett vékony párhuzamos huzalok vagy fonalak sorozatából állt. Tipikus modern rácsot készíthetünk úgy, hogy üveg vagy fémlapon keskeny párhuzamos karcolatokat hozunk létre. Ezek a rácsok gyakran több, mint 5000 vagy 10 000 csíkot is tartalmazhatnak centiméterenként. Minthogy kívánatos, hogy oly sok csík legyen egy centiméter hosszon, amennyi csak lehetséges, az egyes csíkok szélessége igen kicsi. Emiatt nagyszögű elhajlási jelenségek jönnek létre. Így a diffrakciós rács működése két jelenségen alapul: a *többréses interferencián* és az *egyréses diffrakción*. A diffrakciós rácsokat a fényhullámhosszak igen pontos mérésére alkalmazzák.

Tekintsük ismét a 38-11 ábrát az előző fejezetből. Ahogyan a rések száma nő, a fő maximumok egyre keskenyebbek és az egyre kisebb intenzitású köztes mellékmaximumok egyre inkább elhanyagolhatók lesznek. A 39-

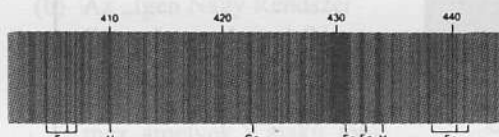


39-15 ábra

A fényhullámhosszának meghatározására szolgáló egyszerű rács-spektroszkóp.



(a) R. S. Richardson csillagász a rács-spektroszkóppal készített, kb. 12 m hosszú spektrogrammal.



(b) A Nap látható színképének részlete. A hullámhosszak (nanométerben) a spektrum felett, míg az egyes erős vonalnak megfelelő kémiai elemek vegyjele alul látható.



(c) A Nap abszorpciós színképe fölé és alá a vas laboratóriumban felvett (fényes fehér) spektrumát helyeztük el összehasonlításhoz, hogy megmutassuk hogy a Nap anyaga vasat is tartalmaz.

39-16 ábra

Fraunhofer volt az első, aki a Nap fényét diffrakciós ráccsal tanulmányozta. E vizsgálat során sötét vonalak ezreit figyelte meg (az ún. Fraunhofer-vonalakat). Megállapította, hogy e vonalak közül egyesek ugyanoda esnek, ahol egyes kémiai elemek színképének laboratóriumi

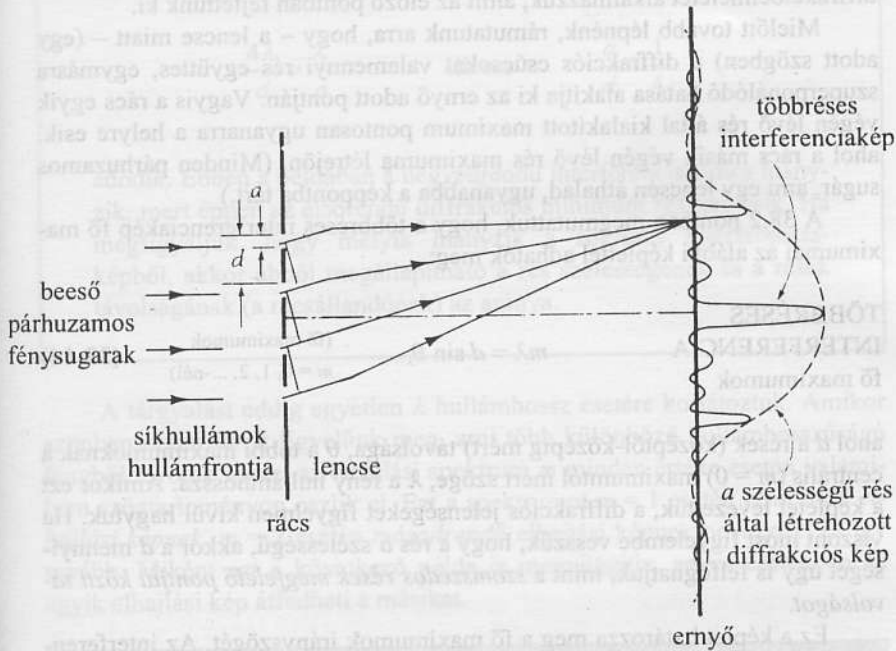
vizsgálatok alapján ismert vonalai lennének. Nem tudta azonban megmagyarázni hogy miért keletkeznek a sötét vonalak. Több, mint fél évszázaddal később Kirchhoff adta meg a helyes magyarázatot, mely szerint a Nap fényes felszíne fölötti viszonylag hideg, különböző gázatomokat tartal-

mazó légkör a Nap folytonos színképéből az adott atomra jellemző hullámhosszokat elnyeli (abszorbeálja). A hélium elemet (Heliosz görögül Nap) a Nap fényének Fraunhofer-vonalai alapján fedezték fel, amit aztán még sok más elem azonosítása követett.

15 ábra monokromatikus fényforrásból érkező, az S résen áthaladó majd rácsra eső fényt mutat (a rés párhuzamos a rács réseivel). Az L_1 gyűjtő lencse a diffrakciós rácsra érkező fényt párhuzamosítja (hogy biztosítsa a Fraunhofer-féle feltételeket). A fény elhajlási képei különböző θ_m irányokból érkeznek a megfigyelőhöz ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), aki mozgatható távcsővel gyűjti össze a fényt. Ez a távcső tengely körül forgatható úgy, hogy a szög pontosan be lehessen állítani. Az L_2 lencse a párhuzamos sugarakat egy vonallá gyűjti össze (valójában az S rés képét hozza létre), és ezt az L_3 lencse tovább nagyítja, hogy szemmel vizsgálható legyen. Ha a berendezést kalibrálták és a d rácsávolság ismert, akkor a θ szög mérése lehetővé teszi a λ hullámhossz meghatározását.

Ha a fényforrás több különböző, diszkrét hullámhosszon bocsát ki fényt, akkor minden elhajlási rendben egyetlen vonal helyett a vonalak egész sokasága jelenik meg különböző irányokra szétoszolva. Az egyes vonalak a fényben jelenlévő hullámhosszaknak felelnek meg. Minél nagyobb az egy centiméterre eső karcolatok száma a rácson, annál inkább szétválnak a vonalak, és annál pontosabban mérhető az egyes fényösszetevők hullámhossza. Ha a forrás folytonos színképet bocsát ki, akkor a teljes hullámhossztartomány széles szögtartományban eloszolva jelenik meg. Sajnálatos módon gyakran a különböző elhajlási képek átfedik egymást, ami a mérés során zavart okozhat. Igen sok berendezésben a spektrumot fotolemezen rögzítik vagy a fényt érzékeny fotocellával elemzik. Az ilyen berendezéseket *rács-spektroszkópoknak* nevezik (36-16 ábra).

A rácsokat úgy állítják elő, hogy egy tiszta üveglemezre vagy sima fémlapra gyémánt tüvel párhuzamos vonalakat karcolnak. (Az előbbi ún. áteresztő, transzmissziós rácst, az utóbbi pedig reflexiós rácst alkot, amely-



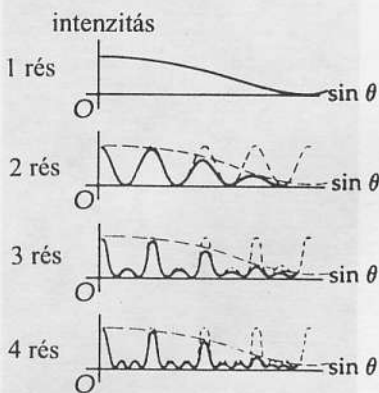
39-17 ábra

Négyréses rács. Ahogyan a rések egyre szűkebbek lesznek és a rések száma is eléri a tipikus diffrakciós rácsra jellemző értéket, az interferencia fő maximumai egyre élesebbekké és egyre nagyobb intenzitásúakká válnak, míg a diffrakciós burkoló egyre szélesebb lesz.

nél az interferenciajelenségeket visszavert fényben szemlélik.)⁴ Minthogy jó rácsot nagyon nehéz készíteni, a legtöbb használatban lévő rács ún. replika-technikával készül. Ennek során átlátszó kolloidum-oldatot öntenek egy rácsra, hagyják megkeményedni, majd óvatosan leválasztják a sablonról. Így transzmissziós rácsot kapnak. A kolloidum lemezt ezután üveglemezre rögzítik vagy merev keretbe foglalják. Ezen az átlátszó műanyag replikán egy sor barázda van, ott, ahol a karcolások voltak, a barázdák között pedig tiszta, zavartalan, világos csíkok láthatók. Kissé túlegyszerűsített képet használva, a transzmissziós rácsot úgy foghatjuk fel, hogy a fény a világos csíkokon megy át, amik ezáltal a rések szerepét játsszák, míg a kissé szabálytalan barázdák a fényt minden irányban szórják, s ezáltal tulajdonképpen matt üvegek tekinthetők.

A rácsok elméletének tárgyalását olyan transzmissziós rács elemzésével kezdjük, amelynek csak négy rése van, ahogyan a 39-17 ábrán látszik. A rácsra párhuzamos fény esik úgy, hogy a rácson síkhullámfront halad át, és a rések koherens fényforrásként viselkednek. A kétréses interferencia tárgyalásával szemben (a 38. fejezetben), ahol figyelmen kívül hagytuk az egyes réseken fellépő diffrakciós jelenségeket, most az elhajlást is számításba vesszük. Vegyük észre, hogy a rések szélessége összemérhető a rések közötti távolsággal. A réseket θ szögben elhagyó párhuzamos fénysugarak az ábra síkjára merőleges vonal mentén gyűlnek össze. (Természetesen az elhajlás miatt a résektől más irányokban is kiindulnak párhuzamos sugarak, amelyek az ernyő más helyein gyűlnek össze, most azonban csak egyetlen θ irányra

⁴ A párhuzamos vonalakkból álló karcolás-sorozat készítése nem tűnik nagy feladatnak. A gyakorlatban azonban az eljárás tele van váratlan nehézségekkel. A rács készítésére szolgáló és minden idők egyik legpontosabb mechanikai eszközének tartott készülék felfedezéséről érdekes leírás található A. G. Ingalls: Ruling Engines (Vonalzó-gépek) c. cikkében (Scientific American 1952 június). A legmodernebb rácsokat vékony alumínium-réteggel olyan üveglemezre párologtatásával készítik, amely az alkalmazott fény hullámhosszának töredék részét kitevő pontosságig „optikailag sima”. Olcsón előállítható replica- (másolat-) rácsok készíthetők acetát-filmre. Az iskolai laboratóriumokban többnyire ezeket használjuk.



39-18 ábra

Az elhajlási és interferencia-képek 1, 2, 3 és 4 rés esetére. Az eredő intenzitást a folytonos vonal mutatja.

illusztráljuk ezt.) A lencse lehetővé teszi, hogy a Fraunhofer-féle egyréses diffrakcióelméletet alkalmazzuk, amit az előző pontban fejtettünk ki.

Mielőtt tovább lépnénk, rámutatunk arra, hogy – a lencse miatt – (egy adott szögben) a diffrakciós csúcsokat valamennyi rés együttes, egymásra szuperponálódó hatása alakítja ki az ernyő adott pontján. Vagyis a rács egyik végén lévő rés által kialakított maximum pontosan ugyanarra a helyre esik, ahol a rács másik végén lévő rés maximuma létrejön. (Minden párhuzamos sugár, ami egy lencsén áthalad, ugyanabba a képpontba tart.)

A 38.2 pontban megmutattuk, hogy a többréses interferenciakép fő maximumai az alábbi képlettel adhatók meg:

$$\begin{array}{l} \text{TÖBBRÉSES} \\ \text{INTERFERENCIA} \\ \text{fő maximumok} \end{array} \quad m\lambda = d \sin \theta, \quad \begin{array}{l} \text{(fő maximumok} \\ m = 0, 1, 2, \dots\text{-nél)} \end{array} \quad (39-14)$$

ahol d a rések (középtől-középig mért) távolsága, θ a többi maximumoknak a centrális ($m = 0$) maximumtól mért szöge, λ a fény hullámhossza. Amikor ezt a képletet levezettük, a diffrakciós jelenségeket figyelmen kívül hagytuk. Ha viszont most figyelembe vesszük, hogy a rés a szélességű, akkor a d mennyiséget úgy is felfoghatjuk, mint a *szomszédos rések megfelelő pontjai közti távolságot*.

Ez a képlet határozza meg a fő maximumok irányszögét. Az interferenciakép intenzitáseloszlását azonban befolyásolják a (39-8) képlettel leírt egyréses elhajlásból eredő hatások:

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

ahol $\alpha = (\pi/\lambda)a \sin \theta$ és a a rés szélessége. A 39-18 ábra mutatja az egyréses és a többréses hatások szuperpozícióját. Az a szélességű résen bekövetkező (szaggatott vonallal ábrázolt) elhajlás kitézi a teljes interferenciakép intenzitásának felső határát. E képen belül a d rácsállandójú rács „többréses hatásai” tovább korlátozzák az intenzitást.

39-4 PÉLDA

A 39-18 ábrán felvázolt többréses interferenciakép esetére határozzuk meg a d rácsállandó, és az a résszélesség arányát.

MEGOLDÁS

Figyeljük meg, hogy az első elhajlási minimum helye megegyezik a negyedik interferencia-maximum helyével. A többréses interferencia fő maximumainak helyét megadó $m\lambda = d \sin \theta$ alakú (39-14) egyenletet átrendezve és az $m = 4$ esetre alkalmazva adódik, hogy:

$$\sin \theta = \frac{4\lambda}{d} \quad (39-15)$$

A (39-10) összefüggés viszont megadja az egyréses diffrakciós minimumok helyét: $a \sin \theta = m\lambda$. Innen $m = 1$ helyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (39-16)$$

A (39-15) és a (39-16) egyenletéből

$$\frac{4\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a} \quad \text{illetve} \quad \frac{a}{d} = \frac{1}{4}$$

adódik. Ebben a példában a negyedrendű interferencia-csúcs hiányzik, mert éppen az elsőrendű diffrakciós minimum helyére esik. Ha megfigyeljük, hogy melyik hiányzik a sokrész interferencia-képből, akkor abból megállapítható a rés szélességének és a rések távolságának (a rácsállandónak) az aránya.

A tárgyalást eddig egyetlen λ hullámhossz esetére korlátoztuk. Amikor azonban olyan fényt figyelünk meg, ami több különböző hullámhosszúságú fényből tevődik össze, az elhajlási spektrum m minden értéke esetén valamilyen szög tartományon oszlik el. Ezt a spektrumot $m = 1$ esetén *elsőrendű elhajlási képnek*, $m = 2$ esetén *másodrendű elhajlási képnek* nevezzük, és így tovább. Miként azt a következő példa is megvilágítja, egyes esetekben az egyik elhajlási kép átfedheti a másikat.

39-5 PÉLDA

Diffrakciós rács a fehér fényt úgy szórja szét, hogy a $\lambda = 650$ nm hullámhosszúságú vörös fény a másodrendű elhajlási képben $\theta = 20^\circ$ -nál jelenik meg. (a) Határozzuk meg a rács *vonalsűrűségét*, vagyis azt, hogy egy centiméter hossza hány rés esik. (b) Határozzuk meg, hogy lesz-e látható fény a harmadrendű elhajlási képben $\theta = 20^\circ$ -nál, vagy sem.

MEGOLDÁS

(a) A (38-14) képletből megkapjuk a többréses interferencia-maximumok helyét: $m\lambda = d \sin \theta$. Ezt átrendezve adódik:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \theta} = \frac{(2)(650 \text{ nm})}{(\sin 20^\circ)} = 3800 \text{ nm}$$

Az egy centiméterre eső rések száma:

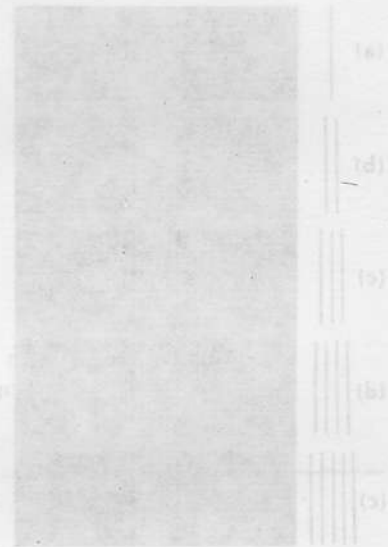
$$N = \frac{1}{d} = \frac{1 \text{ rés}}{3800 \times 10^{-9} \text{ m}} \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right) = 2630 \text{ rés / cm}$$

(konverziós arány)

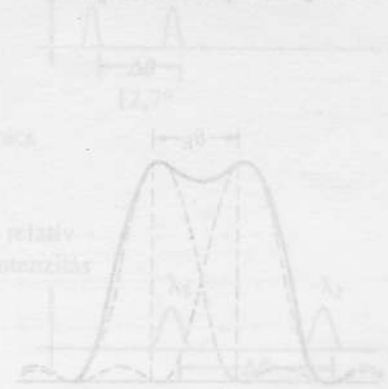
(b) Ismét a (38-14) összefüggés a megfelelő: $m\lambda = d \sin \theta$. Ha ezt λ -ra megoldjuk és az adott értékeket behelyettesítjük, akkor

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{m} = \frac{(3800 \text{ nm})(\sin 20^\circ)}{3} = 433 \text{ nm}$$

A 433 nm alig látható ibolya színnek felel meg. Így ezen a helyen a másodrendű és a harmadrendű spektrum látható részei fedik át egymást.



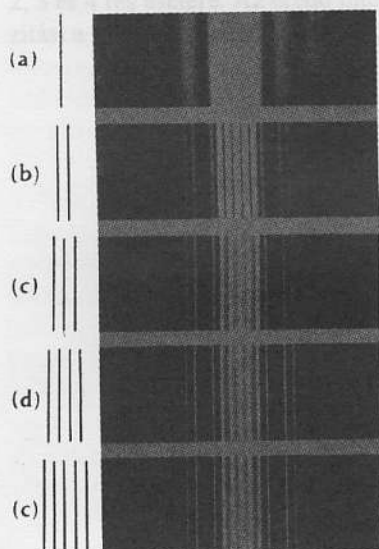
39-19 ábra
Egyetlen rácson lévő fehér fény első- és másodikrendű elhajlási képe. A (b)-(c) fővonal a bal oldali több réstől álló rendszeren képződött elsőrendű elhajlási képek mutatója.



39-20 ábra
Két elhajlási maximum feloldhatóságának vizsgálata. A bal oldali elsőrendű elhajlási kép maximuma a jobb oldali elsőrendű elhajlási kép minimuma helyére esik, így a két maximum nem oldható fel egymástól.

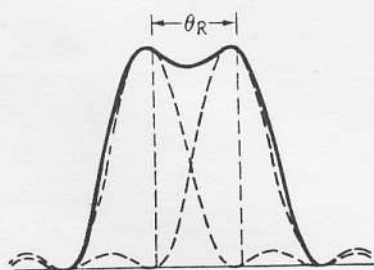
39-1 táblázat Prizma és diffrakciós rács szórásának összehasonlítása

λ (nm)	60°-os Flint-üveg prizma		4500 rés/cm-es rács		
			m = 1	m = 3	
670,8	50,51°		17,57°	64,90°	
656,3	50,61°		17,18°	62,38°	
589,3	51,17°	$\Delta\theta = 4,32^\circ$	15,38°	$\Delta\theta = 7,08^\circ$ 52,71°	$\Delta\theta = 31,78^\circ$
546,1	51,64°		14,26°	47,50°	
486,1	52,58°		12,64°	41,01°	
404,7	54,83°		10,49°	33,12°	



39-19 ábra

a) Egyetlen résen létrejövő Fraunhofer diffrakció. A b)-e) ábrák a bal oldali több résből álló rendszereken keletkező elhajlási képeket mutatják.



39-20 ábra

Két elhajlási maximum feloldhatóságára vonatkozó Rayleigh féle kritérium. Az egyik elhajlási kép maximumhelye a másik első minimum helyére esik.

A diszperzió

A diffrakciós rácsokat gyakran alkalmazzák prizmák helyett a színek elemzésben, mert a rácsok a spektrumot szélesebb szögtartományra szórják szét, és ezáltal λ sokkal pontosabb meghatározását teszik lehetővé. A **D diszperzió** a rácsoknak vagy prizmáknak azt a tulajdonságát méri, hogy a $d\lambda$ hullámhossztartományt milyen széles $d\theta$ szögtartományra szórja szét:

$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} \quad (39-17)$$

Minél nagyobb a diszperzió, annál nagyobb a hullámhossz szempontjából egymáshoz közel fekvő két színekvonal szögkülönbsége. Ahogyan a 39-1 táblázat mutatja, a rács diszperziója nagyobb, mint a prizmaé, és annál nagyobb, minél nagyobb m értéke.

Minthogy a θ és λ közti kapcsolat a diffrakciós rácsnál $d \sin\theta = m\lambda$, fennáll a

$$\sin\theta = \left(\frac{m}{d}\right)\lambda$$

összefüggés. Ebből λ szerinti differenciálással kapjuk, hogy

$$\cos\theta \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d}$$

majd átrendezve:
$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos\theta} \quad (39-18)$$

amiből

A RÁCS DISZPERZIÓJA
$$D = \frac{m}{d \cos\theta} \quad (39-19)$$

A D mértékegysége radián per méter (vagy a közönséges gyakorlatban fok per nanométer).

A felbontóképesség

A diszperzió mellett a diffrakciós rácsok tervezésének fontos szempontja az is, hogy a rács mennyire közeli hullámhosszúságú színeket tud szétválasztani, milyen a **felbontóképessége**. Az **R felbontóképesség** diffrakciós rács vagy prizma esetén definíció szerint:

$$\text{FELBONTÓKÉPESSÉG} \quad R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (30-20)$$

ahol λ a két színekvonal átlagos hullámhossza, $\Delta\lambda$ pedig a hullámhosszkülönbség. Hivatkozva a 39-19 és 39-20 ábrákra, emlékeztetünk arra, hogy a fő maximumok egyre élesebbek lesznek, ha nő a rések N száma. Megmutatható, hogy egy fő maximum (nem a centrális maximum) élessége és a rések N száma között a következő kapcsolat:

$$\theta_R = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta} \quad (39-21)$$

A centrális csúc „élességét” a csúc közepe és az első minimum közötti θ_R szögtávolság jellemzi; d a rések távolsága, θ a csúc diffrakciós szöge. A θ_R jelölést Lord Rayleigh használta az egymást átfedő diffrakciós képek legkisebb felbontható szögtávolságára. **Rayleigh kritériuma** szerint, két egymáshoz közel lévő, azonos intenzitású elhajlási képet akkor lehet „elfogadhatóan” felbontani (vagyis eldönteni, hogy nem egy, hanem két pontforrástól származnak) ha

RAYLEIGH KRITÉRIUMA KÉT EGYENLŐ INTENZITÁSÚ ELHAJLÁSI KÉP LEGKISEBB FELBONTÁSÁRA Az egyik diffrakciós kép középső maximuma a másik első minimumára esik.

A kritériumot a 39-20 ábra világítja meg. A diffrakciós rácsnál θ_R rendkívül kicsi, a $\Delta\lambda$ hullámhosszkülönbségnek megfelelően a (39-18) képletből adódik, hogy:

$$\theta_R = \frac{m}{d \cos\theta} \Delta\lambda \quad (39-22)$$

Ha a (39-21) és (39-22) képleteket összevetjük, nyerhető az

$$\frac{m}{d \cos\theta} \Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta}$$

összefüggés, vagyis

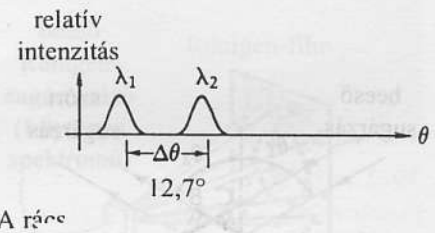
$$\text{A RÁCS FELBONTÓKÉPESSÉGE} \quad R = Nm \quad (39-23)$$

ahol N az összes rések száma, m pedig az elhajlási kép (diffrakciós) rendszáma.

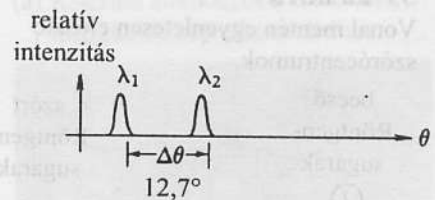
39-2 táblázat A $\lambda = 550$ nm körüli hullámhosszúságú fény elsőrendű ($m = 1$) diszperziós színeképe.

Rács	N_l (nm)	d	θ	R	D (10^{-2} fok/nm)
A	10000	2500	$12,7^\circ$	10000	2,35
B	20000	2500	$12,7^\circ$	20000	2,35
C	10000	1500	$21,5^\circ$	10000	4,11

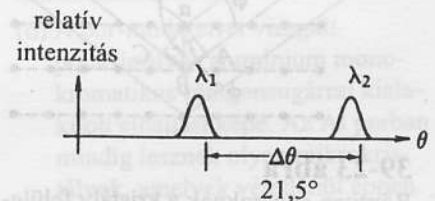
A diszperzió és a felbontóképesség közti különbséget jól megvilágítja a 39-2 táblázat, amely összehasonlítja három különböző rács adatait. Miként a 39-21 ábra mutatja, az A és a B rács D diszperziója megegyezik (vagyis ezek két adott hullámhosszat ugyanakkora szögben választanak el), míg az A és a



A rács



B rács



C rács

39-21 ábra

A 39-2 táblázatban szereplő rácsok által az 550 nm hullámhossz környezetében lévő λ_1 és λ_2 hullámhosszúságra szolgáltatott relatív intenzitások.

C rácsnak az R felbontóképessége egyenlő, (az a képességük, hogy két, egymáshoz nagyon közeli hullámhosszú vonalat meg tudnak különböztetni, ha a diffrakciós csúcsok *szélessége* különbözik). Figyeljük meg, hogy a B rác a legnagyobb felbontóképességű, míg a C rácnak a legnagyobb a diszperziója.

39-6 PÉLDA

A Na-gőzlámpa sárga fényt bocsát ki, amely két hullámhosszra felel meg: 589,00 és 589,59 nm-nek. Hány részből kell állnia annak a rácsnak, amely $m = 1$ esetén éppen felbontja ezt a Na-dubletet?

MEGOLDÁS

A kívánt felbontóképességet a (39-20) képlet adja meg,

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

ahol $\lambda = \frac{589,00 \text{ nm} + 589,59 \text{ nm}}{2} = 589,30 \text{ nm}$

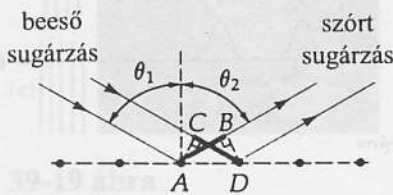
és $\Delta\lambda = 589,59 \text{ nm} - 589,00 \text{ nm} = 0,59 \text{ nm}$

Ekkor $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589,3 \text{ nm}}{0,59 \text{ nm}} = 1000$

A diffrakciós rács felbontóképessége a (39-23) képlet szerint: $R = Nm$, így $m = 1$ esetén a vonalak száma éppen egyenlő magával az R felbontóképességgel

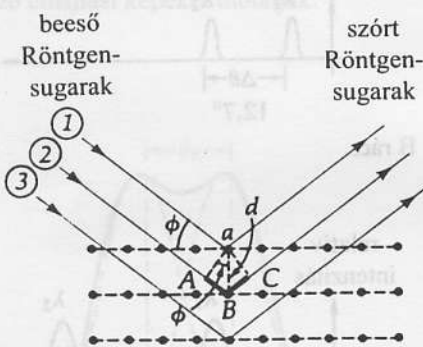
$$N = 1000 \text{ vonal}$$

Mint ahogy a tipikus diffrakciós rácoknak közel 5000 vonaluk van centiméterenként, a Na-dubletet már anélkül is felbonthatjuk, hogy túl finom (kicsiny rácállandójú) vagy túlságosan nagy méretű rácsot kellene felhasználni.



39-22 ábra

Vonal mentén egyenletesen elszórt szórócentrumok.



39-23 ábra

Röntgen-sugaraknak a kristály felületéhez közel eső atomsíkról való visszaverődése Bragg szerint. A röntgen-szórás vizsgálataiban szokás szerint inkább a síkhoz, mint annak normálisához viszonyítva mérik a beeső sugarak szögét.

39.5 A röntgen-diffrakció

1912-ben Max von Laue (1879–1960) német fizikus ismerte fel elsőként, hogy a röntgensugárzás számára, amelynek hullámhossza összemérhető az atomok távolságával a kristályban (0,1 nm), a kristályszerkezetbe rendeződött atomok „háromdimenziós diffrakciós rácsként” viselkednek. A beeső sugárzást elnyelik az elektronok, majd, a Huygens-elvnek megfelelően, minden elektron új, elemi hullámokat sugároz ki. Ezt a folyamatot *szórásnak* nevezük. Így aztán, pontosan úgy, ahogyan a diffrakciós rács rései koherens sugárforrásokként viselkednek, a szórócentrumok háromdimenziós elrendeződése is koherens hullámforrások sokaságaként fog viselkedni. Tekintettel arra, hogy az elektronok az atomok közelében koncentrálnak, ezért lényegében az atomok lesznek a szórócentrumok. Bizonyos irányokban a szórt hullámok azonos fázisban lesznek, s ezekben az irányokban nagy intenzitású szórt sugárzás jön létre. Más irányokban a hullámok nem lesznek azonos fázisban, ami gyengítéshez, vagy kioltáshoz vezet, így ezekben az irányokban nem érzékelhető szórás.

Tekintsük a 39-22 ábrának megfelelő vonalban sorakozó szórócentrumokat. A θ_1 szögből érkező sugarakkal, ahogyan az ábra mutatja, a szórt hullámok akkor azonos fázisúak, ha az AB és a CD távolságok egyenlők. Szimmetriaokokból ez akkor áll fenn, ha a θ_2 szórási szög egyenlő a θ_1 beesési szöggel. Sir William Bragg⁵ vette észre az analógiát az optikai visszaverődéssel („a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel”), s ő javasolta a szórás folyamatnak az atomsíkokon végbemenő „Bragg-féle visszaverődésre” alapozott magyarázatát. Bár ez a visszaverődéses magyarázat a szórás folyamatnak nem teljesen helyes képe, mégis egyszerű és hasznos módja annak, hogy a jelenségről beszéljünk. Ezt az egyszerű képet elfogadva tekintsünk most a 39-23 ábrára, amelyen a bejövő sugárzás köbös rácsba rendezett atomokra esik. A rácsban az atomsíkok d távolságban vannak egymástól. Tekintsük az ① és a ② sugarakat. Az aA és az aC vonalak rendre merőlegesek a ② sugármenet beeső és a visszavert részére, így az ABC távolság éppen az az úttöbblet, amivel a ② sugár hosszabb az ①-nél. Ezért az atomsíkhöz képest ϕ szögben beeső (és nem a sík normálisától mért szögben, mint az optikai visszaverődésnél) sugár a többletút hossza:

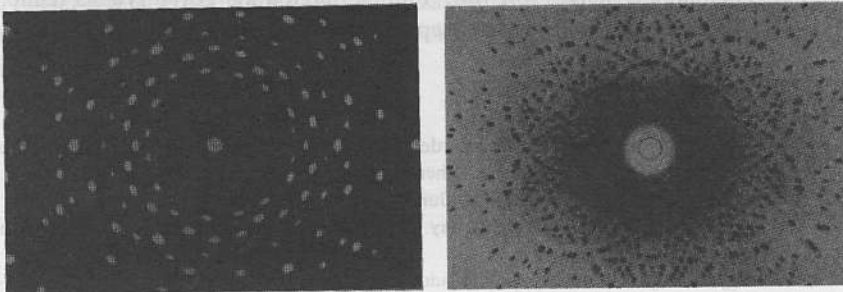
$$\text{az útkülönbség} = 2(d \sin \phi).$$

Ha ez az útkülönbség a λ hullámhossz egész számú többszöröse: $m\lambda$, akkor a szórt sugarak azonos fázisban lesznek. (Hasonló megállapítások alkalmazhatók más sugarakra is, pl. a ③ sugár, ami mélyebb tartományból szóródik.) Az erősítés feltételét *Bragg-féle szórás feltételnek* nevezzük:

BRAGG-FÉLE SZÓRÁSI FELTÉTEL

$$m\lambda = 2d \sin \phi, \quad (39-24)$$

ahol $m = 1, 2, 3, \dots$ (a szórás rendszáma)
 ϕ = a beeső sugár iránya az atomsíkhöz (s nem, mint az optikában, a normálisukhoz) képest,
 d = az atomsíkok távolsága

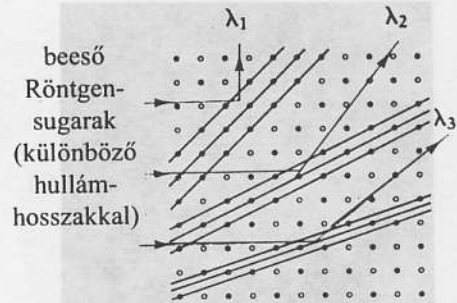


(b) A Laue-elhajlás kvarckristályon. (c) Bonyolult kristályban meglepően látványos, szép Laue-elhajlási kép alakul ki.

39-25 ábra

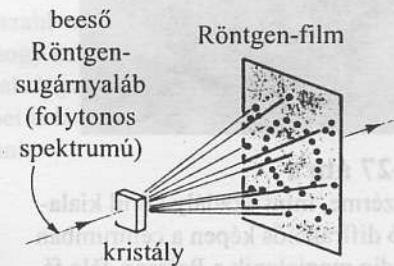
Röntgen-diffrakciós kép. A fényes foltok helyzete a kristályban lévő atomok elrendezésétől függ. Ismeretlen kristály esetén, az elhajlási képből „visszakövetkeztetve” meghatározható a rácsszerkezet.

⁵ W. H. Bragg és W. L. Bragg angol kutatók (apa és fiú) 1915-ben kaptak Nobel-díjat a kristályszerkezetek röntgensugárral való tanulmányozásáért. Ez éppen egy évvel azután történt, hogy Max von Laue Nobel-díjat megkapta a röntgensugarak diffrakciójának felfedezéséért.

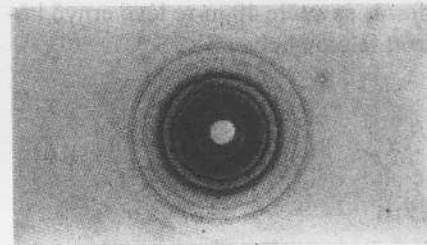


39-24 ábra

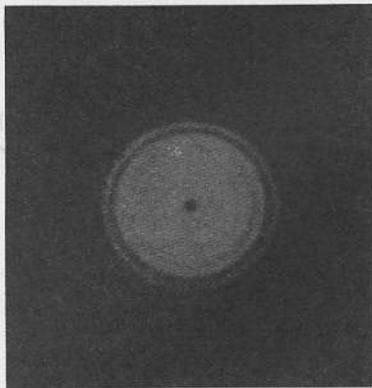
A kristályban az atomok különböző szögekben álló párhuzamos síkok mentén helyezkednek el. Az egyes síkseregekben a rácssíkok egyenlő távolságban követik egymást. Ez az állandó azonban síkseregenként más és más. Az egyes síkseregekről pontosan olyan hosszúságú sugárzás verődik vissza, amely éppen megfelel a Bragg-feltételnek. Az ábrán három különböző síkot mutatunk be.



(a) Kísérleti elrendezés a Laue-féle diffrakciós kép elkészítéséhez.

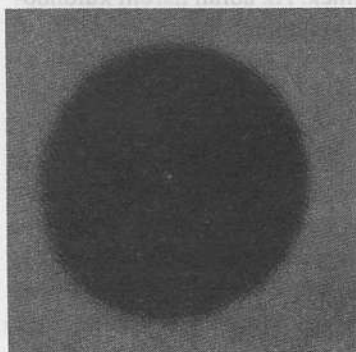


(d) A por-módszerrel vizsgált polikristályos alumínium monokromatikus röntgensugárral kialakított elhajlási képe. Az Al porban mindig lesznek olyan mikrokristályok, amelyek véletlenül éppen olyan szögben helyezkednek el, hogy kristálysíkjaikról a Röntgen-sugarak éppen visszaverődjenek; ezek a visszavert sugarak koncentrikus körök mentén érik a fényképezőlemezt.



39-26 ábra

Fresnel-féle elhajlás kör alakú nyíláson, monokromatikus fényben. Ha az ernyőt a nyílástól különböző távolságokban helyezzük el, a középső folt váltakozva hol fényes, hol sötét lesz, és a diffrakciós gyűrűk száma is változik.



39-27 ábra

Pénzérme, mint akadály körül kialakuló diffrakciós képen a centrumban mindig megjelenik a Poisson-féle fényes folt. A felvétel úgy készült, hogy a pénzérmét a monokromatikus fényforrás és a tőle 40 m-re lévő ernyő között félúton helyezték el.

A szórt sugárzás igen éles csúcsokat mutat ezeknél a szögeknél. Az igen sok részből álló síkrácshoz hasonlóan a háromdimenziós „rács” rendkívül sok szórócentrumból áll, ami a főmaximumokat rendkívül élessé és intenzívvé teszi, míg a mellékmaximumokat gyakorlatilag elnyomja. Ha folytonos színképű sugárzás esik a kristályra, amelyben minden hullámhossz szerepel (ezt „fehér” sugárzásnak nevezik), akkor a kristály különböző atomsíksegein bekövetkező Bragg-féle visszaverődést egyszerre vizsgálhatjuk (39-24 ábra). A egyes párhuzamos síkseregek síkjai közötti távolság más és más lehet az atomok geometriai helyzetétől függően. Minthogy a beeső sugárzás minden hullámhosszat tartalmaz, mindig lesznek köztük olyanok, amelyekre $m\lambda$ kielégíti a Bragg-féle feltételt. A szórt foltok fényképét (39-25 ábra) *Laue-féle diffrakciós képnek* nevezzük. A világos foltok helye az anyagminta atomi elrendeződésétől függ. Az ismeretlen atomszerkezetű kristályokról készült Laue-féle felvétel alapján következtethetünk a kristály szerkezetére. Például 1962-ben James Watson, Francis Crick és Maurice Wilkins⁶ biológiai Nobel-díjat kaptak a DNS kettős spirális szerkezetének felfedezéséért. A szerkezetet röntgendiffrakciós módszerekkel határozták meg.

39.6 A Fresnel-féle diffrakció – Kör alakú nyílások és akadályok

Amikor átlátszatlan lemezen készített kicsiny kör alakú lyukon párhuzamos fény halad át és közeli ernyőre esik⁷, meglepő kép látható. Az elhajlási kép nemcsak hogy nagyobb lesz, mint a lyuk, és nemcsak hogy megjelennek a diffrakciós gyűrűk, hanem még az is előfordulhat, hogy a lyuk mögött pontosan középen sötét folt keletkezik (39-26 ábra). Ez teljességgel váratlan, hiszen azt hinnénk, hogy a nyílás közepén átfutó irányban megfelelő pont az ernyőn fényes lesz, nem pedig sötét!

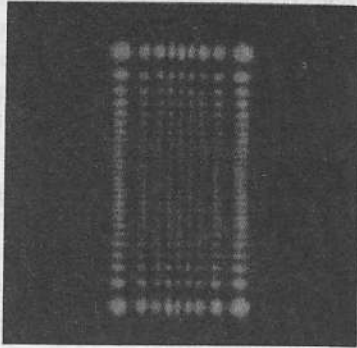
A másik meglepő eredmény a diffrakciós képeken akkor jelenik meg, amikor kicsiny kör alakú akadályt, pld. csapágygolyót világítunk meg, amely körül a tér szabad. Gondos vizsgálat ugyanis azt mutatja, hogy az elhajlási kép közepén *mindig fényes folt van*,⁸ mintha maga a kis golyó lyukas lenne! A 39-27 ábra pénzdarab árnyéka közepén megjelenő fényes foltot mutat.

⁶ Ennek a tudományos felfedezésnek az érdekesítő történetét lásd D. Watson: *The Double Helix (A kettős spirál)* Angol kiadás: Atheneum Press, New York, (1968), Magyar kiadás: Watson, James Dewey: *A kettős spirál*, Gondolat 1970, 1972.

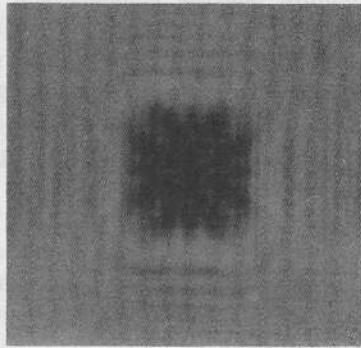
Lásd még: Horace Judson: *The eighth day of creation (A teremtés nyolcadik napja)* Simon & Schuster 1979.

⁷ Minthogy az ernyő közel van, az ernyő adott pontjára eső fénysugarak különböző irányokból érkeznek, az így keletkező elhajlást Fresnel-féle diffrakciónak nevezzük – ellentétben a Fraunhofer-féle diffrakcióval, amikor az ernyőre csak párhuzamos fénynyalábok esnek.

⁸ A foltról érdekes anekdota szól. Az elhajlás hullámelméletének leírását Fresnel egy tanulmánykészítési pályázat felhívására küldte be a Francia Akadémiához 1818-ban. Poisson, a bíráló bizottság egyik tagja, aki a fény korpuszkuláris elméletének megrögzött híve volt, igyekezett Fresnel elméletét neveltségessé tenni. Hogy végső alakra hozza ellenvetéseit és ezzel remélhetőleg halálos csapást mérjen a fény hullámelméletére, Poisson elmondta Aragonnak, egy másik bírálóbizottsági tagnak, hogy a hullámelmélet szerint kör alakú akadály esetén az árnyék közepén mindig világos foltnak kell lennie (ehhez a következtetéshez egyébként Fresnel nem jutott el), s ez kicsoda badar jóslat! Erre Arago azonnal elvégezte a kísérletet és újra felfedezte a világos foltot, amit tulajdonképpen már 85 évvel azelőtt felfedezett Miraldi, csak hogy azt már rég elfelejtették. A fényes folt léte nagy lendületet adott Fresnel hullámelméletének. Poisson azonban haláláig csökönyösen ragaszkodott a fény Newton-féle részecske-modelljéhez. A sors iróniája, hogy az árnyékterben keletkező fényes foltot éppen Poissonról nevezték el, s a valódi felfedező Miraldi, Fresnel és Arago háttérbe szorulnak. Csak megjegyezzük, hogy Fresnel a kitűzött díjat nem nyerte el dolgozatával.



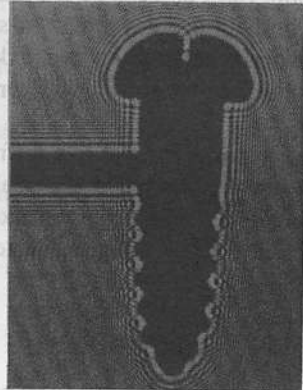
(a) Téglalap alakú rés.



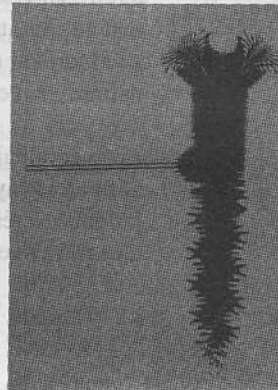
(b) Átlátszatlan négyzet.



(d) Három átlátszatlan köralakú korong. Figyeljük meg a korongok középpontjaiban a fényes foltot!



(e) Egy huzalra erősített kis csavar árnyéka.



(f) Az (e) kép hosszabb expozíciós idővel, hogy az árnyéktérben a halványabb diffrakciós képet is láthatóvá lehessen tenni.



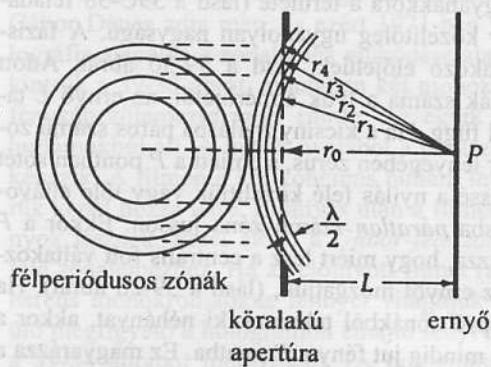
(c) Átlátszatlan korongon létrejövő elhajlási kép. A fényforrás Woodrow Wilson megvilágított átlátszó portréja. Az átlátszatlan korong lencseként viselkedik, mert a képen a fényforrás minden pontjához tartozik egy Poisson-féle fényes folt.



(g) Az (f) kép kinyújtva, a csavar fejének diffrakciós mintázata.

39-28 ábra

Fresnel-féle elhajlási képek. Egy átlátszatlan tárgy árnyékának éppen a szélénél megjelenő világos sávok fényesebbek az árnyéktól távolabbi zavartalan háttér megvilágításnál.



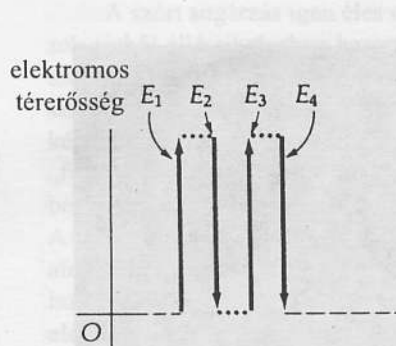
39-29 ábra

A Fresnel-féle zónák geometriai szerkesztése. A nyílásban a P középpontú körök sugarai rendre $r_0, r_0 + \lambda/2, r_0 + 2\lambda/2, r_0 + 3\lambda/2$, stb. A gömbökből a nyílás síkja metszi ki a körkörös Fresnel zónákat.



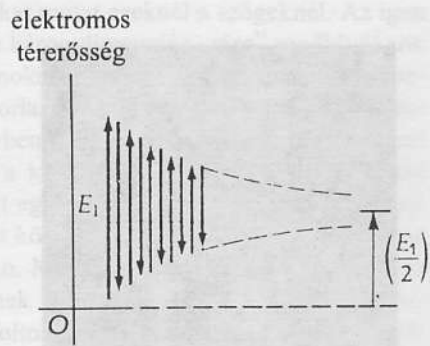
39-33 ábra

Az ábrán látható a Fresnel-féle diffrakció geometriai szerkesztése. A bal oldalon a síkhullámok a nyílás felé haladnak. A jobb oldalon a diffrakciós hullámok a nyílás körül terjednek. A középső részben a Fresnel-féle zónák geometriai szerkesztése látható, ahol a nyílás síkja metszi ki a körkörös zónákat.



39-30 ábra

A négy zóna átlagos elektromos térerősségvektorai. Ezek összege zérus ad. Az áttekinthetőség kedvéért a vektorokat egymáshoz képest oldalirányban eltoltuk.



39-31 ábra

Amikor igen nagy számú zóna elektromos térerősségvektorai adódnak össze, akkor az eredő amplitúdó fele akkora értékhez tart, mint ha az első zóna csak egyedül szerepelne.

Ezek az elhajlási képek a Fresnel-féle diffrakció eredményeként jönnek létre, amikor a fény a lyukon áthalad, vagy az akadályt éppen elkerülő hullámfront különböző részeiből *különböző* szögben érkezik az ernyő adott pontjára (39-28 ábra). Az ilyen jelenségek eredetét a következő pontban fogjuk tárgyalni.

39.7 A Fresnel-féle zónalemez

Tekintsünk egy párhuzamos fénynyalábot, ami a kör alakú lyukon áthaladva esik egy ernyőre. A diffrakciós kép centrumában lévő P pontba a lyukon áthaladó hullámfront minden részéből érkezik fény (Huygens-féle elv). Osszuk fel a hullámfrontot kör alakú *zónákra* a 39-29 ábrán bemutatott módszerrel. A központi kör alakú *Fresnel-zónából* a P pontba érkező elemi hullámok fáziskülönbsége 0 és π radián közé esik. A következő Fresnel-zónából π és 2π közé, a következő zónáé 2π és 3π közé esik, és így tovább. Bármely két szomszédos zónából a P pontba érkező fények között fél hullámhossznyi útkülönbségnek megfelelő fáziskülönbség van, ezért a P pontban az interferencia révén egymást gyengítik. Ha $+E_1$ az első zóna fényének elektromos térerősségvektora, akkor a második zónáé $-E_2$, a harmadiké $+E_3$, és így tovább. Minden zónának közel ugyanakkora a területe (lásd a 39C-38 feladatot), ezért mindegyik E_n vektor közelítőleg ugyanolyan nagyságú. A fáziskülönbség miatt azonban váltakozó előjelűek, lásd a 39-30 ábrát. Adott geometriai elrendezésben a zónák száma a lyuk átmérőjétől, az ernyő L távolságától és a λ hullámhossztól függ. Ha a kicsiny nyílásba páros számú zóna esik, akkor az eredő E vektor lényegében zérus, s emiatt a P pontban sötét folt keletkezik. Ha az ernyőt kissé a nyílás felé közelítjük vagy tőle eltávolítjuk, elérhetjük, hogy a nyílásba *páratlan* számú zóna jusson. Ekkor a P pont kivilágosodik. Ez magyarázza, hogy miért lesz a centrális folt váltakozva fényes vagy sötét, amikor az ernyőt mozgatjuk, (lásd a 39-26 ábrát). Ha azonban egy akadállyal a középső zónákból takarunk ki néhányat, akkor a többi, még megmaradó zónából mindig jut fény a P pontba. Ez magyarázza a Poisson-féle fényes foltot, amit egy pénzdarab árnyékában fedezhetünk fel, (lásd a 39-27 ábrát).

⁹ Minthogy a nagyobb rendszámú zónából jövő fény útja hosszabb, az inverz négyzetes törvény miatt, továbbá egy szögtényező miatt, intenzitása kisebb. Az eredőt a 39-31 ábrán láthatjuk.

Tegyük fel, hogy most minden második zónát (akár minden páros, akár minden páratlan sorszámút) valahogyan átlátszatlaná teszünk. Minthogy most minden átlátszó zónából érkező fény fázisban lesz, az elektromos térerősségvektorok mind összeadódnak, mert ugyanolyan irányúak. Emiatt a P pontba sokkal több fény érkezik. Ha egy átlátszó filmen minden második zónát átlátszatlaná teszünk, az ún. **Fresnel-féle zónalemezhez** jutunk, (lásd a 39-32 ábrát). Nemde igazán érdekes, hogy egy nyílás területének felét letakarva rendkívüli módon tudjuk növelni a kép közepére jutó fény erősségét!? Mint a 8. lábjegyzetben megmutattuk, a teljes fény, ami a hullámfrontból akadálytalanul érkezik, körülbelül a fele annak, ami az első zónából származik: $E_1/2$. Ha olyan zónalemezt készítünk, amely az első 20 páratlan zónát engedí át, akkor a P pontban az elektromos térerősség eredője $E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{39}$. E tagok mindegyike közelítőleg egyenlő. A zónalemez nélkül a P pontban a térerősség közelítőleg $E_1/2$, a zónalemezzel azonban $20E_1$! Ezért a zónalemez használata megnöveli az intenzitást (s mert az intenzitás E^2 -tel arányos) kb. egy 1600-as szorzóval! *A zónalemez tehát lencseként működik, hiszen a beeső párhuzamos fénynyalábot egy L távolságban lévő képpontban gyűjti össze.*¹⁰

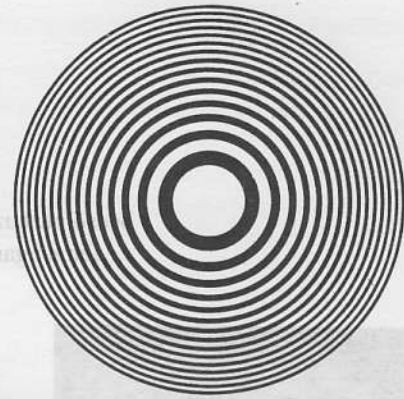
A Fresnel-féle zónalemez nem lenne más, mint egy szórakoztató játékszer, ha nem szólna mellette az a tény, hogy egyszerű magyarázatot kínál a hologram által készített furcsa háromdimenziós kép keletkezésére vonatkozóan.

39.8 A holográfia

Mindenki ismeri a holografikus képeket, ezeket az érdekes, szellemszerű, háromdimenziós kísérteties képeket, amelyek lencse használata nélkül egyszerűen, koherens fény sík filmen való átbocsátásával készülnek. A régimódi térhatású képből két, csaknem azonos képet kell nézni, egyiket az egyik, másikat a másik szemünkkel, s ez azt a hatást váltja ki bennünk, hogy háromdimenziós képet vizsgálunk egy rögzített perspektívából. Ezzel szemben, amikor a holografikus képet szabad szemmel nézzük, s a hologramon, mint ablakon át nézünk, a képnek valóban háromdimenziós jellege van, és előlnézetből is könnyedén tekinthetünk a tárgy mögé, pusztán azáltal, hogy megváltoztatjuk helyünket. Azok a 360°-os hologramok, amiket hengeres formában készítettek, lehetővé teszik, hogy a néző tökéletesen körül tudja járni a képet, s így minden oldalról megnézhesse.

A *holográfia* (a szó görög eredetű, teljes írást jelent) alapelvét 1948-ban Gábor Dénes adta meg, és ezért 1971-ben fizikai Nobel-díjat kapott. A holográfia alapelve a zónalemez működése alapján egyszerűen megérthető. Tekintsük a 39-33 ábrát, amelyben két monokromatikus, koherens hullám esik fényképezőlemezre vagy filmre. Az egyik nyaláb, a *referenciányaláb*, síkhullámokból áll. A másik nyalábot a pontszerű tárgyon szóródó fénysugarak képezik. A filmen e két koherens hullám interferenciája fényes és sötét gyűrűk képét hozza létre. Előhívás után a filmen átlátszó és átlátszatlan tartományok lesznek, ezzel előáll a *Gábor-féle zónalemez*, ami hasonlít a Fresnel-féle zónalemezhez. Ha az előhívott filmet (amit *hologramnak* nevezünk) koherens monokromatikus fényvel világítjuk meg, akkor a megfelelő helyen ülő megfigyelő a hologramon elhajló fényt nézve virtuális képet lát, amint ez a 39-34 ábrából megérthető. (A hologramnak a megfigyelő felőli oldalán valódi kép is megjelenik.)

¹⁰ A tengely mentén további – mind valódi, mind virtuális – képek is vannak. Az L távolságban kialakuló kép azonban, amit itt taglalunk, a legfényesebb valódi kép.



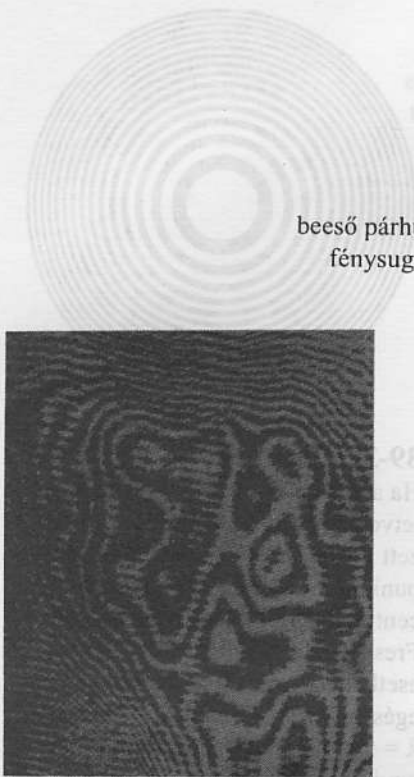
39-32 ábra

Ha a zónákat felváltva átlátszóvá, illetve átlátszatlaná tesszük, úgynevezett Fresnel-féle zónalemezeket kapunk. E lemez negatívja (ahol a centrális zóna átlátszatlan) szintén Fresnel-féle zónalemez. A legtöbb esetben az egyes zónák területe $\pi\lambda L$ egészen kicsi. Például $L = 1$ m esetén $\lambda = 500$ nm hullámhossznál mind-egyik zóna kb. $1,6$ mm².

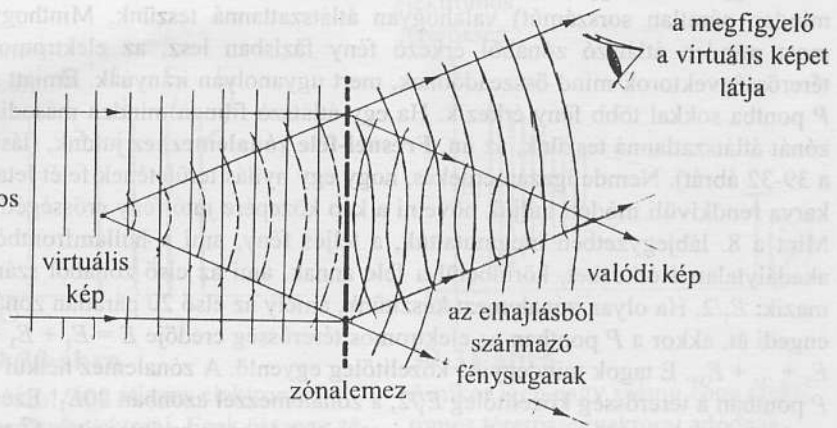


39-33 ábra

A monokromatikus síkhullámok és a pontszerű tárgyról koherensen szórt hullámok a fényképezőfilmen interferenciaképet hoznak létre. Amikor ezt a filmet előhívjuk, a keletkező hologram a Fresnel-féle zónalemezhez hasonló koncentrikus világos és sötét körök sorozata.



beeső párhuzamos fénysugarak



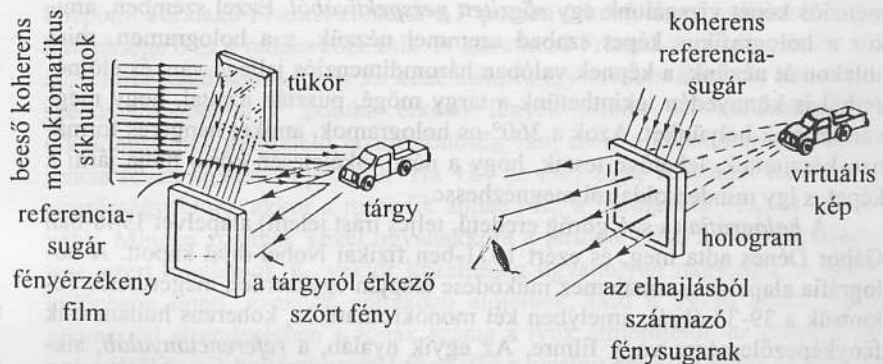
39-34 ábra

Amikor a zónalemezre párhuzamos fény esik, a lemez két oldalán egy valódi és egy virtuális kép keletkezik. (A diffrakció más rendjei miatt a tengelyen további valódi és virtuális képek is keletkeznek, de ezeket az ábrán nem tüntettük fel.)

39-35 ábra

Hologram erősen felnagyított részlete, ami az interferencia-kép bonyolult szerkezetét mutatja.

Tekintsünk most a pontszerű tárgy helyett kicsiny kiterjedésű tárgyat. Ekkor a tárgy minden pontja kialakítja a maga zónalemez-képét. Az így előálló hologram sötét és világos csíkok egészen bonyolult rendszere (lásd a 39-35 ábrát), ami a tárgy minden pontjára vonatkozó teljes információt tartalmazza. Amikor a hologramot koherens monokromatikus fényvel világítjuk meg, akkor a hologramon elhajlott fényben a tárgy összes tulajdonságait hordozó virtuális kép látható. A gyakorlatban, annak érdekében, hogy az elhajló és a referenciányaláb egyenlő intenzitású legyen, és így az interferenciaképen



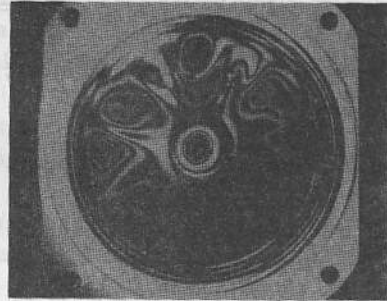
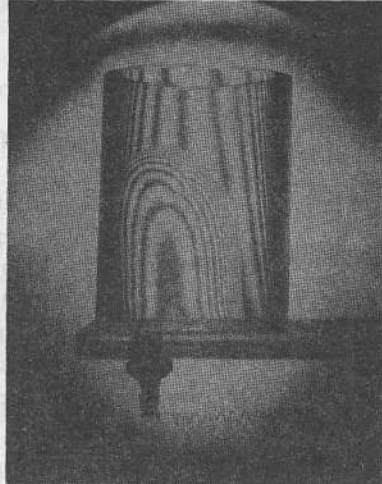
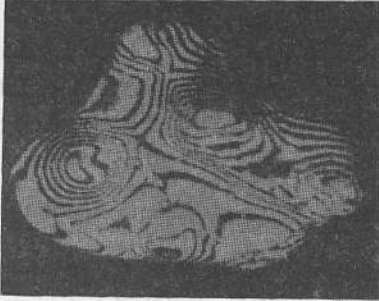
- (a) A hologram készítésének egy lehetséges elrendezése. A referenciányalábból érkező fény és a tárgyról szóródó fény szuperponálódik és a filmen interferencia-képet alakít ki. A film előhívásával rögzített képet hologramnak nevezik.
- (b) A hologramot úgy nézhetjük meg, hogy koherens referenciá-fényvel világítjuk meg, amely a hologram lemezt ugyanolyan szögben éri, mint a hologram készítésekor használt referenciányaláb. A elhajlott fényben a tárgy virtuális képe ott keletkezik, ahol eredetileg a tárgy volt. A kép valódi háromdimenziós kép, amelyen az eltakart részleteket is megláthatjuk, ha más szögből nézünk a lemezre.

39-36 ábra

A hologram készítésére és megtekintésére szolgáló elrendezések.

a maximális kontraszthatást lehessen elérni, gyakran a 39-36 ábrán bemutatott elrendezést alkalmazzák.¹¹

Mínthogy az eljárás során sehol sem használnak lencsákat, a sok gondot okozó Rayleigh-féle felbontóképesség-korlátok elkerülhetők. A rekonstruált kép élesebb, felbontása jobb mint amit lencsék segítségével a hagyományos fotografiai eljárásokkal elérhetünk. A hologram bármely töredék része az egész tárgyról tartalmaz információt (ha megfelelő pontból nézzük) és belőle az egész kép rekonstruálható.



(a) Fosszilis (8 mm hosszú) borz-fog holografikus kontúrtérképe. A fotolemezen két kissé különböző hullámhosszuságú fényvel felvett hologram van rögzítve. Amikor az így előálló hologramot csak az egyik hullámhosszot tartalmazó fényvel világítjuk meg, akkor, a két kép közti interferencia miatt magassági kontúrokat ábrázoló csíkrendszer jön létre.

(b) Szikra hatására felrobbanó acetilén-gáz. A robbanás részletei átlátszó hengerben kétszeri expozícióval láthatóvá tehető, ha a hengert hátulról matt üvegen keresztül impulzusüzemű rubinlézerelel világítjuk meg. Az első expozíciót a gyújtás előtt, a másodikat 10 ms-mal a gyújtás után készítették. A rekonstrukció során háromdimenziós képek jönnek létre a két holografikus kép interferenciájából.

(c) Másodpercenként 3000 rezgést végző hangszóró „időátlagolt holografikus interferogramjának” fényképe. A hologramot több ezer rezgési cikluson keresztül tartó expozícióval készítették. Csak a csomóvonalak és a rendszer stacionárius részeinek a rekonstrukciói fényesek.

39-37 ábra

A holográfia néhány alkalmazása

A holográfia alkalmazási lehetőségei lenyűgözőek (lásd a 39-37 ábrát). A hologramkészítés egyik korlátja az, hogy a filmhez érkező beeső referenciánál és az ugyanazon hullámvonulathoz tartozó szórt fény optikai út hossza – a filmhez érkeve –, nem különbözhet többel, mint a felhasznált fény koherenciahossza. A közönséges lézerek fényének koherenciahossza néhány méter nagyságrendű, bár speciális technikával a lézerefény koherenciahosszának ezt a felső határát egészen 10^5 m-ig lehet növelni.

¹¹ A körbejárható hologram készítésének módszerére vonatkozóan lásd W. R. Schubert és C. R. Throckmorton cikkét: „Making a 360° hologram” (Hogyan készül a 360°-os hologram) *The Physics Teacher* 13, 310. (1975)

Összefoglalás

A Fraunhofer-féle elhajlás egyetlen résen

a = a rés szélessége,

θ = a középvonaltól mért szög,

λ = hullámhossz,

m = a diffrakció rendszáma

A diffrakciós minimum akkor lép fel, ha

$$m\lambda = a \sin \theta \quad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots)$$

Az I_θ intenzitás eloszlása (W/m^2 egységekben)

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{ahol } \alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta$$

Az elhajlási *maximumok* közelítőleg *félúton* találhatók a minimumok között.

A diffrakciós rács

d = rácsállandó (a rések közötti középtől középig mért távolság)

θ = a középvonaltól mért szög,

λ = hullámhossz,

m = a diffrakció rendszáma.

Elhajlási *maximum* ott lép fel, ahol

$$m\lambda = d \sin \theta \quad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots)$$

A diffrakciós rács D *diszperziójának* definíciója:

$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

A diffrakciós rács R *felbontóképességének* definíciója:

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

ahol N a rács összes vonalainak száma.

A *kör alakú nyíláson fellépő Fraunhofer-diffrakcióban* θ_R a diffrakciós kép közepe és az első minimum iránya közötti szög (az apertúra közepétől mérve):

$$\sin \theta_R = \frac{1,22\lambda}{D}$$

ahol D az apertúra átmérője és λ a hullámhossz.

Rayleigh kritériuma a θ_R *minimális felbontási szögre*: két szomszédos pontot akkor lehet megkülönböztetni, ha az egyik elhajlási kép *centrális csúcsa* a másik *első minimumára* esik. Így egy D átmérőjű (vagy bármely más kör alakú apertúrával rendelkező) optikai berendezés esetén

$$\theta_R = \frac{(1,22)\lambda}{D}$$

Röntgen-diffrakció

d = az atomsíkok távolsága,

ϕ = a beeső sugár és az atomsíkok által bezárt szög (a sugár és a sík normálisa közötti szög, mint az optikai visszaverődésnél),

λ = a hullámhossz

m = a diffrakció rendszáma.

A *Bragg-féle szórási feltétel*: a diffrakció maximuma ott van, ahol

$$m\lambda = 2d \sin \phi \quad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots)$$

A *Fresnel-féle diffrakcióról* akkor beszélünk, ha vagy a fényforrás, vagy az ernyő (vagy mindkettő) véges távolságban van az elhajlást okozó nyílástól vagy akadálytól. Ez a jelenség a Fresnel-féle zónamódszerrel elemezhető, amelyben a hullámfrontot olyan zónákra osztjuk, hogy bármely két szomszédos zónából származó fénysugarak között félhullámhossznyi útkülönbség legyen.

A *Fresnel-féle zónalemez* olyan speciálisan kiképzett lemez, melyen minden második Fresnel-zóna átlátszatlan. A zónalemeznek lencseszerű fókuszáló tulajdonságai vannak (a zónalemeznek több fókusz távolsága is van).

A *holográfia* kétlépéses eljárás. Az első lépésben koherens fényvel megvilágított tárgy bonyolult elhajlási képét vesszük fel speciális fotolemezen. Az előhívott filmet, a hologramot koherens fényvel világítjuk meg. A hologramon elhajló fény háromdimenziós képet állít elő, amelyen valódi perspektíva-különbségek figyelhetők meg, ha a szemlélő változtatja a helyét. Mint-hogy a hologramkészítés és képalkotás során lencsét nem használunk, a felbontóképességet a szokásos Rayleigh-féle határ nem korlátozza (bár egyéb korlátozó tényezők fennállnak).

Kérdések

- 1.) kicsiny lyukat monokromatikus fény világít meg, s ezáltal diffrakciós kép alakul ki egy ernyőn. A lyuk széle a képen nem elég éles. Ha a lyuk és az ernyő közé megfelelő helyre lencsét teszünk, a diffrakciós jelenségek eltűnnek és a lyuk széle élesen látszik. Magyarázzuk ezt meg.
- 2.) Hogyan változik a rés Fraunhofer-féle diffrakciós képe, ha a rés és az ernyő közötti teret levegő helyett víz tölti ki?
- 3.) Az interferencia és az elhajlási jelenségek az elektromágneses hullámok elektromos térerősségeinek összegétől függenek. Miért nem szükséges

- mégsem olyan fényforrást használni, amelyben az elektromos erőter minden változása azonos irányban polarizált?
- 4.) Ahelyett, hogy hosszú, keskeny réssel alakítottánánk ki elhajlási képet, tegyük fel, hogy inkább olyan rést használunk, ami kétszer olyan hosszú, mint amilyen széles. Kvalitatíve milyen lesz a diffrakciós kép?
 - 5.) Két diffrakciós rács ugyanolyan minőségű, és centiméterenként ugyanannyi karcolatot tartalmaz, de az egyik rácson ezek nagyobbak, mint a másikon. Mi lehet az előnye a nagyobb rács használatának?
 - 6.) Egy rés fényét lencsével párhuzamosítjuk, majd a réssel párhuzamos karcolatú diffrakciós rácsra bocsátjuk. Mi történik a távoli ernyőn megjelenő elhajlási képpel, ha a rácsot a karcolataival párhuzamos tengely körül kissé elforgatjuk?
 - 7.) Tegyük fel, hogy a több hullámhossz keverékéből álló fény színekének elemzésére rácsot vagy prizmat használunk. Mikor fontosabb a nagy felbontóképesség, mint a nagy diszperzió, illetve mikor fontosabb a nagy diszperzió?
 - 8.) Írjuk le azt az elhajlási képet, amit két keresztben elhelyezett diffrakciós rács hoz létre.
 - 9.) Mik az előnyei – ha vannak egyáltalán – a diffrakciós rácsnak a prizmával szemben, amikor egy fényforrás színekét kell meghatározni? Mik a hátrányok – ha vannak ilyenek?

Feladatok

39.2. Elhajlás résen

39-A1 Résen elhajló 550 nm hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

39-A2 Egy rést az 550 nm hullámhosszúságú fény világít meg és a réstől 3 m-re lévő ernyőn elhajlási kép alakul ki. Határozzuk meg a centrális maximum teljes szélességét, ha a rés (a) 0,2 mm és (b) 0,4 mm szélességű.

39B-3 Egy 0,20 mm széles rést 600 nm hullámhosszúságú monokromatikus fény világít meg és a réstől 1,5 m-re lévő ernyőn elhajlási képet hoz létre. Határozzuk meg az első és az ötödik diffrakciós minimum közti távolságot!

39B-4 Young féle kétréses kísérletben a zöld (520 nm) fény az 1,8 m távol lévő ernyőn egymástól 1,5 mm-re lévő csíkokat hoz létre. (a) Mekkora a két szomszédos rés középvonalaának a távolsága? (b) Ha a csíkokat a centrális ($m = 0$) fényes csíktól számláljuk, akkor minden hatodik csík hiányzik. Számítsuk ki a rések szélességét!

- 10.) Éjszaka a távoli közúti jeleket könnyebb elolvasni, ha zölddel vannak fehér táblára festve, mintha pirossal lennének festve. Miért?
- 11.) Diffrakciós rács folytonos színeképet hoz létre, ha fehér fényel világítjuk meg. Ha egy kristályt „fehér”, azaz nem monokromatikus röntgenfényel világítunk meg, akkor diszkrét pontokból álló Laue-féle elhajlási kép jön létre. Miért?
- 12.) Miben hasonló és miben különbözik a Fraunhofer-féle és a Fresnel-féle diffrakció?
- 13.) A tárgyak árnyékának határa napfényben gyakran nem éles. Vajon ezt az okozza, hogy a napfény összetett (sokféle hullámhosszat tartalmaz), s emiatt diffrakciós csíkjai elmosódnak? Ha a jelenség oka nem diffrakciós jelenség, akkor mi lehet a magyarázata?
- 14.) Ha az ujjaink között kialakított kis hézagokon keresztül távoli fényforrásra nézünk, akkor világos és sötét csíkokat látunk. Vajon ez diffrakciós jelenség? Ha igen, akkor Fresnel- vagy Fraunhofer-típusú?
- 15.) Miért szükséges a Poisson-féle fényes folt megfigyeléséhez az, hogy az akadály igen jó közelítéssel kör alakú legyen?
- 16.) A hanghullámok diffrakciójának leírásához hogyan kellene a fényelhajlásra kidolgozott eljárást módosítani? Emlékeztetbe idézzük, hogy a hanghullámok longitudinális nyomáshullámok.
- 17.) Miben hasonló a Fresnel-féle zónalemez egy gyűjtőlencséhez? Miben különbözik tőle?

39B-5 Egy rést λ_1 és λ_2 hullámhosszúságú fény keverékével világítunk meg. A kialakult elhajlási képek úgy fedik át egymást, hogy a λ_1 hullámhosszúságú fény által keltett kép első elhajlási minimuma éppen a λ_2 hullámhosszúságú fény által keltett kép második minimumára esik. (a) Számítsuk ki a hullámhosszak arányát! (b) Az egymásra rakódó elhajlási képeken még hol esnek egybe minimumok?

39B-6 Tegyük fel, hogy a 39-8 ábrán közölt fényképek a 0,150 mm széles réssel, a tőle 1,25 m távol lévő ernyőn létrehozott diffrakciós kép mérethű reprodukciói. A fényképen végrehajtott mérésekből határozzuk meg az elhajló fény hullámhosszát!

39B-7 Kétréses elhajlási képet hoztunk létre olyan résekkel, amelyek egyharmad olyan szélesek, mint amilyen távol van egymástól a közepük. Számítsuk ki az elsőrendű maximum intenzitását az elhajlási képben a centrális maximuméhoz képest.

39B-8 Függőleges 0,25 mm széles rést 600 nm hullámhosszúságú fényel világítunk meg, és a réstől 2,5 m távol lévő ernyőn elhajlási képet hozunk létre. (a) Adjuk meg a centrális maximum I_0 intenzitásához mérve a középű maximumtól balra 2 cm-re lévő helyen az

intenzitást (b) Milyen messze van ez a hely a legközelebbi minimumoktól?

39B-9 Két egyaránt 0,150 mm széles rést 9 mm távolság választ el. Számítsuk ki, hogy hány interferenciacsíkot figyelhetünk meg (a) a centrális diffrakciós maximumon belül, (b) az egyik elsőrendű diffrakciós maximumon belül.

39A-10 Számítsuk ki egy tükrös távcső tükrének az átmérőjét, ha a Rayleigh-féle kritérium értelmében két pontszerű fényforrás szögfelbontása 0,25 ívmásodperc. Tegyük fel, hogy a hullámhossz 550 nm.

39A-11 Egy bizonyos távolságra eltávolodott autó két hátsó lámpája éjszaka alig különböztethető meg egymástól, mint két különálló fényforrás. Becsüljük meg az autótól való távolságunkat, feltéve, hogy a lámpák közötti távolság 1,5 m és átlagosan 640 nm hullámhosszúságú fénysugarat bocsátanak ki, a megfigyelő szemének a pupillája pedig 6 mm átmérőjű. (Megjegyzés: különböző sűrűségű levegőrétegekben a fénytörés hatására a kép homályossá válik, így a távolság valójában kisebb a számítottnál.)

39A-12 Egy mikrohullámú parabolaantenna átmérője 1,5 m és úgy van megtervezve, hogy a $\lambda = 3$ cm hullámhosszúságú röntgensugarak tartományába eső mikrohullámú jeleket képes legyen venni. Számítsuk ki két mikrohullámú sugárforrás minimális szögfelbontását (fokokban), amelyet ez az antenna észlelni képes.

39A-13 Egy amerikai szabványos televíziós kép kb. 485 változó fényerősségű vízszintes sorból van összeállítva. Tegyük fel, hogy a sorfelbontást csak a Rayleigh-féle kritérium korlátozza, a szemünk pupillája pedig 5 mm átmérőjű. Számítsuk ki a minimális mérési távolságnak és a kép függőleges méretének az arányát abból a feltételből, hogy a sorokat éppen ne lehessen felbontani. Tegyük fel, hogy a képcsőről érkező fény átlagos hullámhossza 550 nm.

39A-14 A Rayleigh-féle kritérium alkalmazásával adjuk meg azt a minimális felbontási szöget (fokokban), amely az alábbi két csillagászati berendezést jellemzi. (a) a Palomar-hegyi 5 m átmérőjű teleszkópot 550 nm hullámhosszon, (b) a 900 m átmérőjű Arecibo-i rádióteleszkópot Puerto Ricóban 80 nm-es hullámhosszon.

39B-15 He-Cd-lézer két hullámhosszúságú fényt bocsát ki, egyik 325 nm (az ultraibolya tartományban), a másik 442 nm (kék) hullámhosszúságú. A nyaláb 3 mm átmérőjű kör alakú nyíláson jön ki, ennek eredményeként egy igen távoli ernyőn két egymásra szuperponálódott elhajlási kép keletkezik. Milyen távol kell lennie az ernyőnek ahhoz, hogy a két hullámhossz első diffrakciós minimumának távolsága 2 cm legyen?

39B-16 George Seurat, posztimpreszionista festő, az ún. „pointillizmus” technikát fejlesztette ki, vagyis a festményeit egymáshoz közel helyezett tiszta színű, kb. 2 mm átmérőjű pontokból állította elő. A színkeverés illúziója a szemlélő szemében keletkezik. Becsüljük meg azt a minimális távolságot, ahol a szemlélőnek

állnia kell, hogy számára a színes pontok a színek folytonos átmenetű változásává alakuljanak. Tegyük fel, hogy az alkalmazott megvilágítás mellett a szemlélő pupillanyílása kb. 2 mm átmérőjű.

39B-17 Egy 10 cm átmérőjű objektív lencsével készült teleszkóp fókusz távolsága 80 cm. Az 550 nm hullámhosszúságú sugárzást kibocsátó távoli fényforrás elhajlási képet alakít ki a teleszkóp fókusz síkjában. Számítsuk ki annak a gyűrűnek az átmérőjét, amit (a) az első diffrakciós minimum, (b) a második diffrakciós minimum hoz létre.

39B-18 Hadihajó kör alakú radar-antennájának az átmérője 2,1 m és 15 GHz frekvencián sugároz. Két kis csónak van kb. 2 km-re a hajótól. Milyen közel lehetnek a csónakok egymáshoz, hogy még mindig két objektumként lehessen őket detektálni?

39.4 Diffrakciós rács

39A-19 Sebességellenőrző radar-rendszer 3 cm hullámhosszúságú mikrohullámokat sugároz. Ennek a sugárzásnak egy széles nyalábja egymástól 5 cm távolságban elhelyezett függőleges rudakból készült kerítésbe ütközik. Adjuk meg a beeső sugár és az első diffrakciós minimum közti szöget a kerítés mögött!

39A-20 Monokromatikus fényvel megvilágított diffrakciós rács olyan elhajlási képet hoz létre, amelyen a harmadrendű, a hatodrendű, a kilencedrendű stb. elhajlási kép hiányzik! Határozzuk meg a résszélesség és réstávolság arányát erre a rácsra!

39A-21 Egy diffrakciós rács 2,5 cm² területű és rácsállandója 5000 vonal/cm. Számítsuk ki (a) a másodrendű diszperziót és (b) a felbontóképességet másodrendű 600 nm hullámhossz esetére.

39B-22 Diffrakciós rácsot (2500 vonal/cm) a Na-színkép vizsgálatára használunk. Számítsuk ki a sárga Na-dublett vonalak (588,955 nm és 589,592 nm) szög elválasztását az első három rendszám esetén.

39B-23 Egy rácsnak 20000 vonala van 5,5 cm-en. Adjuk meg azt a fényhullámhosszat, amire a két másodrendű maximum között a szögtávolság 60°.

39B-24 Egy diffrakciós rácsnál a réstávolság és résszélesség aránya 10:1. Számítsuk ki az elsőrendű intenzitásmaximum és a centrális ($m = 0$) maximum intenzitás-arányát!

39B-25 Egy diffrakciós rácsnak elsőrendű diszperziója $2,5 \times 10^{-2}$ fok/nm, felbontóképessége 10^4 . Határozzuk meg, mekkora a szög elválasztás két színképvonal között az 550 nm hullámhosszúság közelében, ha azokat átfedés nélkül fel lehet bontani a Rayleigh-féle kritériumnak megfelelően.

39.5 Röntgen-diffrakció

39.7 A Fresnel-féle zónalemez

39A-26 Monokromatikus röntgensugár esik egy kristályra és 20°-os szög mellett elsőrendű Bragg-féle visz-

szaverődést hoz létre. Számítsuk ki, hogy a másodrendű visszaverődés mekkora szög mellett várható!

39A-27 A $0,30$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre 30° -os szögben érkező. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

39A-28 A $0,188$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak köbös LiF kristályra esnek. Az elsőrendű szórási maximum $27,9^\circ$ szögnél van. (a) Adjuk meg a LiF kristályrács síkjainak távolságát. (b) Mekkora szögnél tapasztalható a másodrendű szórás?

39A-29 Legyen egy köbös kristályban az atomok közti távolság d . Mutassuk meg, hogy a $d\sqrt{2}$ hullámhosszúságú röntgensugarak nem elégíthetik ki a Bragg-féle feltételt a 39-24 ábrán bemutatott egyik szórósíkra vonatkozóan sem.

39B-30 A 39-27 ábra egy pénzérme diffrakciós képét mutatja. Az érme átmérője 19 mm. Az ábra adatait használva és feltéve, hogy a hullámhossz 546 nm, becsüljük meg azoknak a Fresnel-féle zónáknak a számát, amelyeket az érme eltakar, ha az ernyőn lévő kép középpontjából nézzük az elrendezést.

39B-31 A 490 nm hullámhosszúságú fény merőlegesen halad át az 1 cm átmérőjű, kör alakú nyíláson. A 6 m távol lévő ernyő középpontjában hány Fresnel-féle zóna lesz a nyíláson belül?

További problémák

39C-32 Egyrészes diffrakciós maximum θ szögét $\text{tg}\alpha = \alpha$ adja meg, ahol $\alpha = (\pi/\lambda) a \sin\theta$ ahol a a rés szélessége. Ezt az egyenletet legkönnyebb szukcesszív approximációval megoldani zsebszámítógép segítségével. Tegyük fel, hogy $a = 20\lambda$ (a) Mutassuk meg, hogy az elsőrendű maximum nem pontosan középen fekszik az első és második minimum között. (b) Határozzuk meg a helyét! (Útmutatás: α első közelítésének válasszuk a θ_{all} értéket, ami θ_1 és θ_2 , az első két minimumhoz tartozó szög átlaga. Majd próbálkozzunk egy kicsit kisebb α értékkel, amíg α és $\text{tg}\alpha$ különbsége elhanyagolhatóan kicsivé nem válik) (lásd a 904. oldal 3 lábjegyzetét).

39C-33 Az előző feladat adatait felhasználva adjuk meg a másodrendű diffrakciós maximum irányát arra az esetre, amikor $a = 20\lambda$.

39C-34 Két függőleges, $0,150$ mm széles, (középtől-középig) $0,9$ mm távolságú rést merőlegesen beeső, 550 nm hullámhosszúságú fényvel világítunk meg. A rések mögötti ernyőn létrejövő elhajlási-interferenciaképen a résekből adódó interferenciamaximumok távolsága 1 mm. (a) Vácoljuk fel az ernyőn látható képet. (c) Adjuk meg az $m = 3$ interferenciacsúcs intenzitását a centrális csúcs I_0 intenzitásához képest.

39C-35 Az egyrészes elhajlási kép maximumhelyeit a $dI/d\alpha = 0$ egyenletből határozhatjuk meg (lásd a 39-8.

összefüggést). Mutassuk meg, hogy ez a $\text{tg}\alpha = \alpha$ relációhoz vezet! (b) Szukcesszív approximációval (öt értékes jegyre) határozzuk meg az ennek a relációnak megfelelő első három α értéket és hasonlítsuk össze a (39-11) képlettel közelítőleg meghatározott értékekkel.

39C-36 Egy diffrakciós rácsot merőleges irányból λ hullámhosszúságú fényvel megvilágítva, a ráccsal párhuzamos síkban lévő nagy ernyőn interferencia-képet kapunk. Számítsuk ki, mekkora a rács maximális részélességének és a hullámhossznak az aránya, ha tudjuk, hogy elhajlási minimumok nem figyelhetők meg, bármilyen közel is van a rács az ernyő.

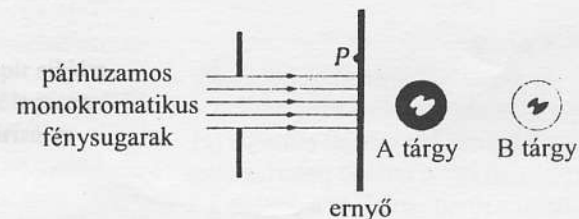
39C-37 Mutassuk meg, hogy egy ráccsal két Δf frekvenciakülönbségű vonalat tudunk felbontani: $\Delta f = c/Nm\lambda$, ahol c a fénysebesség, N a rács vonalainak a száma, m a rendszám és λ a hullámhossz!

39C-38 A diffrakciós rács D diszperziója a diffrakció m rendszámától, a rések d távolságától és a λ hullámhossztól függ. Vezessünk le képletet a D -re, amely az m , d és λ mennyiségeket tartalmazza!

39C-39 Tekintsük a Bragg-féle síkokat azon a kétdimenziós rácsban, amit a 39-24 ábra mutat be. (a) Mutassuk meg, hogy e síkok közti távolságot $d = a(n^2 + 1)^{-1/2}$ fejezi ki, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$ és a a rácsban az atomok közti távolság. (b) Általában igaz, hogy $d = a(n^2 + m^2)^{-1/2}$, ahol mind n mind m egész számok. Készítsünk a 39-24 ábrán láthatóhoz hasonló ábrát, mely mutatja, hogy a síkokat $d = a(13)^{-1/2}$ távolság választja el.

39C-40 Bizonyítsuk be, hogy a zónalemezen mind egyik zóna területe közelítőleg $\pi\lambda L$, ahol L a zónalemez legkisebb fókusz-távolsága.

39C-41 Miként a 39-38 ábra mutatja, egy párhuzamos monokromatikus fénynyaláb nagy kör alakú nyílás mögött az ernyőn fényfoltot hoz létre. Vizsgáljuk azt a P pontot, amely kissé távolabb van az egyenes nyaláb beérkezési helyétől, már ott, ahol nem éri fény az ernyőt. Tegyük fel, hogy egy átlátszatlan korongon tetsszőleges nyílást vágunk (ez az A tárgy), a korongot a nyílás elé rakva, P -be diffraktált fény érkezését figyelhetjük meg. Ezután az A tárgyat olyan B tárggyal helyettesítjük, amely ott sötét, ahol A világos, és megfordítva. (Ha mindkét tárgy a nyílás előtt lenne egyszerre, a nyílás sötét lenne.) Babinet elve szerint a P pontba jutó diffraktált fény mindkét esetben pontosan ugyanannyi. Bizonyítsuk be ezt az állítást a szuperpozíció elvének felhasználásával!



39-38 ábra

A 39C-41 problémához

- 38B-19 a) zöld b) piros
 38B-21 99,6 nm
 38B-23 113
 38B-25 1,31
 38B-27 18,7 cm
 38C-29 A válasz adott.
 38C-31 A válasz adott.
 38C-33 A válasz adott.
 38C-35 A válasz adott.
 38C-37 A válasz adott.
 38C-39 a) $0,155\lambda/d$ b) $0,500\lambda/d$
 38C-41 543 nm
 38C-43 A válasz adott.
 38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

- 39A-1 0,396 mm
 39B-3 18,0 mm
 39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
 39B-7 0,684
 39B-9 a) 120 b) 60
 39A-11 11,5 km
 39A-13 15,4
 39B-15 420 m
 39B-17 $1,07 \times 10^{-3}$ m b) $1,97 \times 10^{-5}$ m
 39A-19 $36,9^\circ$
 39A-21 $7,16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
 39B-23 688 nm
 39B-25 $1,375 \times 10^{-3}$ fok
 39A-27 0,300 nm
 39A-29 A válasz adott.
 39B-31 17,0
 39C-33 0,1233 rad
 39C-35 lásd 2. láb.
 39C-37 A válasz adott.
 39C-39 A válasz adott.
 39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

- 40A-1 $\frac{7}{8}$
 40B-3 $\frac{1}{8}$
 40A-5 $32,0^\circ$
 40A-7 $49,2^\circ$
 40B-9 $\text{tg } \theta_p = 1/\sin \theta_c$
 40B-11 16,4 μm
 40B-13 A válasz adott.
 40B-15 $68,4 \text{ mg/cm}^3$
 40C-17 0° és 90°
 40C-19 78,1%
 40C-21 A válasz adott.
 40C-23 A válasz adott.

- 40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
 40C-27 A válasz adott.
 40C-29 118°

XLI. Fejezet

- 41B-1 1,5 cm/s
 41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
 41A-5 a) $1 - \beta \approx 2,35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
 41B-7 $22,5 \text{ m/c}$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
 41B-9 6,17 ns
 41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c
 d) 36 m e) 45 m/c
 41A-13 0,946c és $-0,385c$
 41A-15 $v_x = 0,994c$
 41B-17 1,78
 41A-19 $v = 0,866c$
 41A-21 889 kg
 41B-23 $4,28 \times 10^9 \text{ kg/s}$
 41B-25 A válasz adott.
 41B-27 A válasz adott.
 41B-29 A válasz adott.
 41B-31 A válasz adott.
 41B-33 a) 270 m/c vagy $9,00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó
 orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
 41B-35 b) 80 m/c
 41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
 41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
 41C-41 A válasz adott.
 41C-43 A válasz adott.
 41C-45 $5,55 \times 10^{-17}$ s
 41C-47 $V = v \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2}}$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
 41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$
 c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
 41C-51 A válasz adott.
 41C-53 A válasz adott.
 41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

- 42A-1 $1,51 \text{ cm}^2$
 42B-3 0,646%
 42A-5 9660 nm
 42A-7 5222 K
 42A-9 $2,43 \times 10^{-12}$ m
 42A-11 A válasz adott.
 42B-13 $3,54 \times 10^6$ m
 42A-15 451 nm
 42B-17 a) $3,56 \times 10^5 \text{ m/s}$ b) 432 nm
 42A-19 4,85 pm