Felsőbb matematika vizsga – 2013-01-08

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mit értünk egy valós és mit egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán és mikor létezik? *(2 pont)*

2. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

4. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az xy-síkot $\pi/3$ szöggel elforgatja és az $(1, 1, 1)$ vektort pedig helyben hagyja. *(2 pont)*

5. Határozzuk meg Householder-tükrözésekkel az alábbi mátrix QR felbontását: *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Írjuk föl az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris érték szerinti fölbontását!

7. Irreducibilis vagy reducibilis az alábbi mátrix?
$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (Rajzzal igazolható!)

8. Melyik pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit és melyik indefinit az alábbi mátrixok közül?
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 \\ 2^2 & 2^3 \end{bmatrix},$

9. Ismerjük a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit $(4, \ -2, \ -2, \ 0)$, és a hozzájuk tartozó páronként ortogonális sajátvektorokból alkotott $\mathbf{Q}$ mátrixot. Ezek felhasználásával írjuk föl $\mathbf{A}$ szinguláris fölbontását! *(2 pont)*

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Milyen tételt tudunk hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjáról? Bizonyítsuk is be! *(3 pont)*

11. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, akkor normális. *(3 pont)*

12. Igazoljuk Gerschgorin tételét, azaz hogy minden sajátérték benne van a mátrix valamelyik sorához tartozó Gerschgorin-körben! *(4 pont)*