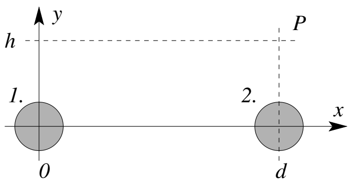
Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) $\boxed{\text{A}}$ **2019. november 19.**

Nagypéldák. (Az egyes nagypéldákat külön lapokon, *áttekinthetően* dolgozza ki.)

1. példa. Két párhuzamos, igen hosszú, egyforma $a = 2\,\text{mm}$ sugarú hengeres vezető egymástól $d = 30\,\text{mm}$ távolságra helyezkedik el levegőben. A hengereken a hosszegységre eső töltéssűrűség $q_1 = -q_2 = 5\,\text{nC/m}$.



a) Határozza meg a hengerek közötti U_{12} feszültséget. (*2 pont*)

A kis sugarú közelítés alkalmazható. A vonaltöltések potenciálfüggvényéből:
$U = 2\dfrac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{a} = 486{,}8\,\text{V}$ (2 p)

b) Adja meg vezetők felszínén az elektromos térerősség maximális nagyságát. (*2 pont*)

A hengerek egymáshoz legközelebbi pontján: (1 p)

$E_{\max} = \dfrac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{d-a}\right) = 48{,}15\,\text{kV/m}$ (1 p)
(a második tagként $1/d$ is elfogadható)

c) Határozza meg az elektromos térerősség y komponensét a P pontban, ha $h = 12\,\text{mm}$. (*4 pont*)

$E_{1y} = \dfrac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{h^2+d^2}}\dfrac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} = 1{,}033\,\text{kV/m}$ (2 p)

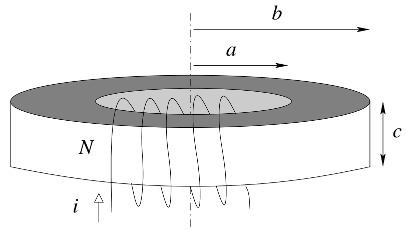
$E_{2y} = \dfrac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{h} = -7{,}490\,\text{kV/m}$ (1 p)

$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -6{,}457\,\text{kV/m}$ (1 p)

d) Számítsa ki az egyik vezető $l = 5\,\text{m}$ hosszú szakaszára ható elektrosztatikus vonzóerőt. (*2 pont*)

$F_{12} = \left|E_{1x}(lq_2)\right| = \dfrac{l|q_1q_2|}{2\pi\varepsilon_0 d} = 74{,}90\,\mu\text{N}$ (2 p)

2. példa. Egy téglalap keresztmetszetű toroid vasmagra $N = 120$ menetes tekercset csévélünk. A vasmag méretei $a = 20\,\text{mm}$, $b = 26\,\text{mm}$, $c = 12\,\text{mm}$, relatív permeabilitása $\mu_r = 500$. A tekercs árama $i = 0{,}2\,\text{A}$.



a) Mekkora a közepes erővonalhossz a vasmagban? (*2 pont*)

$l = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)2\pi = 0{,}145\,\text{m}$ (2 p)

b) A keresztmetszetben homogén indukcióeloszlást feltételezve számítsa ki a vasmag- és tekercsfluxust. (*4 pont*)

A gerjesztési törvényből:
$B \approx \mu_0\mu_r\dfrac{Ni}{l} = 104{,}3\,\text{mT}$ (2 p)

$\Phi_v = B(b-a)c = 7{,}513\,\mu\text{Vs}$ (1 p)

$\Psi = N\Phi_v = 901{,}6\,\mu\text{Vs}$ (1 p)

c) Adja meg a tekercs öninduktivitását a b) pont szerinti közelítésben. (*2 pont*)

$L = \dfrac{\Psi}{i} = 4{,}508\,\text{mH}$ (2 p)

d) Figyelembe véve az indukció változását a keresztmetszet mentén, adja meg az indukció maximálás és minimális nagyságát a vasmagban. (*2 pont*)

A legkisebb és a legnagyobb kerület mentén:

$B_{\max} = \mu_0\mu_r\dfrac{Ni}{2\pi a} = 120{,}0\,\text{mT}$ (1 p)

$B_{\min} = \mu_0\mu_r\dfrac{Ni}{2\pi b} = 92{,}31\,\text{mT}$ (1 p)

Kispéldák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a *részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon* mellékelje.)
A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Egy 50 Hz-es frekvencián üzemelő porcelán szigetelő legnagyobb lineáris mérete 0,5 m. Alkalmazható-e elektrosztatikus modell az elektromos térerősség számítására a szigetelőben és annak közelében? Válaszát indokolja.

   Igen, mert a hullámhossz ($\sim c/f$) sok nagyságrenddel nagyobb a modelltartomány lineáris kiterjedésénél.

2. Egy levegőben elhelyezkedő, hosszú, egyenes koaxiális kábel erében $I_1 = 3\,\mathrm{A}$, köpenyében $I_2 = 5\,\mathrm{A}$ egyenáram folyik, *azonos irányba.* Az ér külső átmérője 18 mm. Adja meg a mágneses térerősség nagyságát a köpeny külső felszínén.
$$H = \frac{I_1 + I_2}{\pi d} = 141{,}5\,\mathrm{A/m}$$

3. Egy $a = 0{,}75\,\mathrm{mm}$ sugarú réz huzalból $R = 15\,\mathrm{cm}$ sugarú körgyűrűt hajlítunk és $Q = 50\,\mathrm{pC}$ töltéssel feltöltjük. Becsülje meg az elektromos térerősség nagyságát a huzal felszínétől $h = 1\,\mathrm{mm}$ távolságban, levegőben.
$$E \approx \frac{Q/(2\pi R)}{2\pi\varepsilon_0(a + h)} = 545\,\mathrm{V/m}$$

4. Egy nyitott végű koaxiális kábel hosszegységre eső kapacitása 4,5 pF/m, dielektrikumának relatív permittivitása $\varepsilon_r = 2{,}3$. A kábelt hosszú időre egyenfeszültségre kapcsolva, majd leválasztva és magára hagyva azt tapasztaljuk, hogy az ér és köpeny közötti feszültség 3 s időállandóval exponenciálisan csökken. Határozza meg a dielektrikum (egyenáramú) fajlagos vezetőképességét.
$$\sigma = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{G'}{C'} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\tau} = 6{,}79\,\mathrm{pS/m}$$

5. Írja fel az L' és C' paraméterekkel jellemzett ideális távvezetéken a feszültség hely-időfüggvényére vonatkozó parciális differenciálegyenletet.
$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\varphi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$, $\quad E_r(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$
- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\varphi(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{r}$, $\quad E_r(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$
- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{1}{r}$

Konstansok: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$