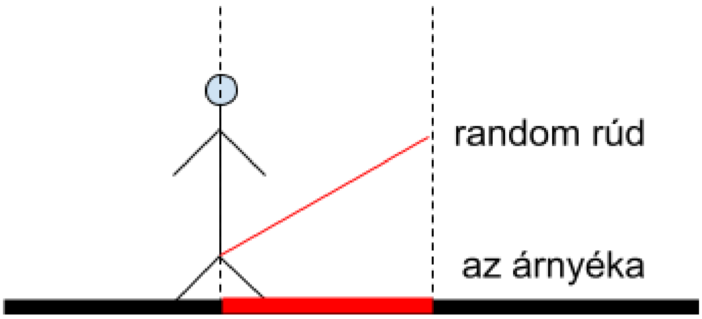
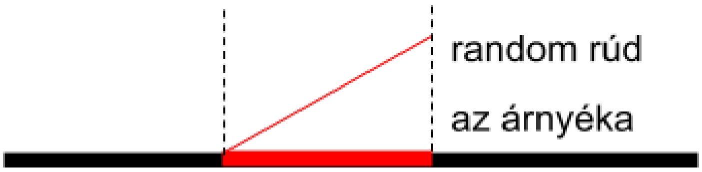
Vetítés - nem mozi : (

Képzeld el, hogy egy tökéletesen lapos felületen állsz, például egy lapostetős ház tetején. Képzeld el, hogy a Nap tökéletesen feletted van az égen, minden napsugár merőleges a tetőre. Azt akarjuk ebben a helyzetben kiszámolni, hogy egy adott hosszú rúd árnyéka milyen irányú és mekkora:



Kicsit általánosabban:



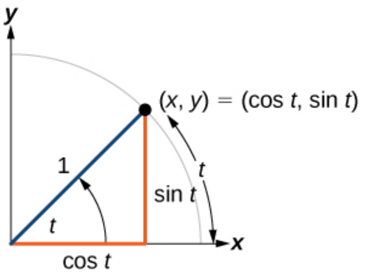
A feladathoz mindig két dolgot ismerünk: a random rúd nagyságát és irányát vektorként, illetve egy olyan vektort, ami a talaj irányát szimbolizálja, de mérete bármekkora lehet, ezzel számolnunk kell.

Kiszámolása

Először tudni kell a szöget, amiben a vetítendő vektor (rúd) **áll** a talajhoz képest. Ezt a skaláris szorzat megmondja, csak át kell rendezni. Alapból ugye ez a skalárszorzat:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot cos\,\alpha$$

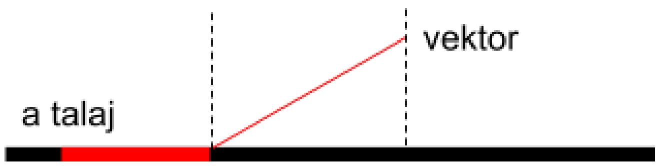
A skalárszorzat egy másik definíciója, hogy a vektorok elemeinek szorzatösszege, ezt használjuk itt ki. Legyen $a = (3; 3)$ a random rúd, és $b = (5; 0)$ a talaj. Mindig a-t vesszük a rúdnak és b-t a talajnak, hogy ne kelljen szavakkal megjegyezni a képleteket. Még ne számoljunk semmit, csak mondjuk el, hogy a skalárszorzatba mindent be tudunk helyettesíteni, és ki tudjuk számolni, amit csak szeretnénk. A vektorok hossza Pitagorasz-tétel, a skalárszorzat értéke pedig szorzatösszeg ($3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 15$). **Nagyon fontos, hogy a szöget igazából felesleges kiszámolni, és ez akkor derül ki, amikor a következő képletet nézzük meg.** Ez az ábra fog nekünk magyarázatot adni:



Itt látható, hogy egy vektor koszinusza igazából annak a vetített hossza, tehát ha beszorozzuk a koszinusszal az a vektor hosszát, megkapjuk, milyen hosszú kell legyen az árnyék, aminek b_u a jele: $|b_u| = |a| \cdot cos\,\alpha$. Itt kicsit átalakíthatjuk a képletet, ha becsempészünk egy 1-es szorzót: $|b_u| = |a| \cdot 1 \cdot cos\,\alpha$. Ez ugyanazt jelenti, de mintha valaminek a skaláris szorzata lenne, ahol $|b| = 1$. Úgy lehet b hossza 1, ha elosztjuk a saját hosszával, ennek jele b_e lesz: $b_e = \frac{b}{|b|}$. Ebből már kihozhatunk egy olyan behelyettesítést, hogy $|b_u| = a \cdot b_e$.

Megvan tehát az árnyék hossza, már csak irányba kell állítani. Mivel b_e hossza egységnyi, vagyis 1, ezért ha beszorozzuk $|b_u|$-val, akkor pont megkapjuk a helyes irányt és a helyes hosszt egy vektorban: $b_u = |b_u| \cdot b_e$. Ha b_u képletét behelyettesítjük, az egész vetítés egyetlen képletben leírható, és legyen ez a következő, ezt kell megtanulni: $b_u = (a \cdot b_e) \cdot b_e$.

Fontos kiemelni, hogy lehet tompaszög is. Ha ilyen történik, szorozzuk be -1-gyel az eredményt, mert ellentétes irányban jól fog állni.



Összefoglalva nagyon röviden

- b vektor egységnyi hosszú változatát ki kell számolnunk, ez $b_e = \frac{b}{|b|}$
- Ekkor mindössze egy skaláris szorzat és egy sima szorzás a vetítés: $b_u = (a \cdot b_e) \cdot b_e$
- Ez azért jöhet így létre, mert a skaláris szorzat egységvektorral megadja, hogy milyen hosszú az árnyék, azzal pedig a vetület egységvektorát (ami az irányt adja meg) megszorozva megkapjuk a vetületet.
- Ha a vektorok tompaszögűek, fordítsuk meg a vetületet.

Példa megoldása

Legyen $a = (3; 3)$ és $b = (5; 0)$, vetítsük a-t b-re.

$$b_e = \frac{b}{|b|} = \frac{b}{5} = (1; 0)$$

$$b_u = (a \cdot b_e) \cdot b_e = (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) \cdot b_e = 3 \cdot b_e = (3; 0)$$