Név: . . . . . Neptun-kód: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Információfeldolgozás zárthelyi megoldások

1. Az óceán vízszintjét egy úszó bójának a tengerfenéktől való távolságát érzékelve mérik. A hullámzás erős, kb. A = 2-3 m magasságú hullámok haladnak kb. v = 4-5 m/s sebességgel a part felé, egymástól kb. S = 6 m távolságban. A hullámzás közel szinuszos. Mit tud mondani, egyenletes, szinkronizálatlan mintavétel esetén milyen gyakran kell a bója helyzetét mintavételezni ahhoz, hogy ne kövessen el nagy hibát az átlagos tengerszint mérésénél? Hány mintát kell venni ahhoz, hogy a szint cm-es nagyságrendű megváltozását is érzékelje? Írja le, ha plusz feltételt használ!

2 pont

A leírás alapján a jel szinuszos, frekvenciája legfeljebb $f_1 = v_{max}/S = 0{,}833$ Hz. Erre be kell tartani a mintavételi tételt: $f_m > 2f_1 = 1{,}66$ Hz, különben a hiba nagyon nagy és utólag kiköszöbölhetetlen lehet $2f_1 = kf_m$ esetén (ahol k természetes szám).
A tengerszint mérése a mintákból átlagolással történhet. Két lehetőség van (mindegyik jó):

- koherens mintavételezés, és átlagolás: a szinusz kiesik, marad a DC *(ez elég is megfelelő válasznak. Min. 3 minta kell)*
- nem koherens mintavételezés, és annyi minta eldobása, hogy a maradék kb. koherens legyen.
  A hiba függ a mintavételi frekvenciától és a koherencia hibájától *(ennek pontos kiszámítását nem kívánom meg egy zárthelyiben)*
  Az azonban megtehető, hogy a rekordot úgy vesszük, hogy az átlagérték közelében legyen a széle: ilyenkor az átlag csak picit tér el az ideálistól *(ez is megfelelő válasz)*
- nem koherens mintavétel, ablakolás és átlagolás: ehhez annyi minta kell, hogy a szinusz elég messze legyen a DC-től: mondjuk legalább 3-4 periódust mérünk *(ez is helyes válasz)*

Bónusz elemzés: a szinuszos hullámforma durva közelítés. Jobb, ha feltételezzük, hogy néhány felharmonikus is van, és ezekkel a hullámforma kellően pontosan leírható. Ha a 10. harmonikusig kell figyelembe venni ezeket, akkor erre kell betartani a mintavételi tételt. $f_m > 10 \cdot 2f_1 = 16{,}6$ Hz. Koherens mintavétellel a határhelyzetben mintavételezve minimálisan 21 minta kell. Ablakoláshoz, 4 periódussal számolva 80.

2. Egy tranziens jelet f_m = 10 kHz mintavételi frekvenciával mintavételezünk. N = 1024 mintát veszünk, majd DFT-t hajtunk végre.

a) Milyen messze vannak egymástól az egyes kiszámolt spektrumértékek megfelelői Hz-ben?
b) Megfigyelhető-e valamilyen szimmetria a DFT-ben? Hány olyan pont van, amely biztosan valós értékű?

2 pont

$\Delta f = f_m/N = 10$ Hz
Komplex konjugált szimmetria: a k és N-k indexű tagok között. A 0 indexű tag és páros N esetén az $N/2$ indexű tag biztosan valós.

3. Egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye
$R(\tau) = 4(1-|\tau|/T)$ ha $|\tau| \le T$, egyébként 0. Adja meg a következőket:

a) szórás
b) autokovariancia-függvény
2 pont c) várható érték

a) 2
b) $C(\tau) = 4(1-|\tau|/T)$ ha $|\tau| \le T$, egyébként 0.
c) 0

4. Egy f_0 = 5 kHz-es szinuszjelet a mintavételi tételt betartva, koherensen mintavételezünk. A mintavételezett sorozat DFT-je N = 4096 pontból áll (1.,2.,...4096. pont), és a transzformált sorozat 11. elemében van egy nagyobb csúcs.

a) Mennyi lehetett a mintavételi frekvencia? Csak egy megoldás képzelhető-e el?
b) Van-e a DFT eredményében még egy csúcs? Ha igen, hányadik pontban?

2 pont

A 11. pont a 10-es indexnek felel meg. $f_m = f_0/10 \cdot N \approx 2$ MHz
Ha betartottuk a mintavételi tételt, akkor csak egy.
$k_2 = N - k_1 = 4086$, vagyis a 4087. pontban

5. Mekkora a Hamming-ablak (a tengelyhez simuló koszinuszos ablak kissé megemelve) oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban? Miért használjuk?

2 pont

20 dB/dekád. Elsősorban azért, mert az első oldalhullám aránylag kicsi, mindenesetre kisebb, mint a Hann-ablak esetében.

6. Miért szerepel a kalkulátorokon általában a korrigált tapasztalati szórásnégyzetet:
$\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ kiszámító gomb?

2 pont

Mert független normális eloszlású mintákból ez a torzítatlan varianciabecslő.

7. Elképzelhető-e, hogy átlagolással akarjuk a jel/zaj viszont növelni, és 100 minta átlagolása után a jel/zaj viszony 25 dB-lel nő? Miért?

2 pont

Nem: 100 minta esetén a maximális javulás $10 \cdot \log_{10}(N) = 20$ dB

8. Honnan lehet látni egy DFT eredményében, hogy az időfüggvény periodikus?

2 pont

A DFT eredményében kiemelkedő csúcsok vannak.

9. Mekkora a véletlen fázisú, A = 3 V csúcsértékű, 5 kHz-es szinuszjel pillanatértékének varianciája?

2 pont

Megegyezik a teljesítménnyel: 4,5 V^2.

2 pont

10. Két valószínűségi változó korrelálatlan. Függetlenek-e ennek következtében? Egyáltalán, lehetnek-e függetlenek?

Csak ha együttesen normális eloszlásúak (kétdimenziós normális eloszlás). Igen, akár lehetnek függetlenek.

2 pont

11. Ekvivalens mintavételezéskor betartjuk-e a mintavételi tételt? Ha nem, miért látjuk mégis a helyes jelalakot?

Nem tartjuk be. f_s valamivel kisebb, mint az alapharmonikus frekvenciája.
Azért mert

- az időtartományban a minták egymás utáni fázishelyzetben vannak a perióduson belül
- a frekvenciatartományban az átlapolódás speciális: az egyes spektrumvonalak az eredetivel megegyező sorrendben kerülnek egymás mellé.

(mind a két választ elfogadtam)

Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

2 pont

1. Egybeeshet-e a legkisebb négyzetes hibájú becslő a maximum likelihood becslővel? Milyen feltétellel?

Igen, additív, független, azonos szórású Gauss-zaj esetén.

2 pont

2. Mondja ki precízen a frekvenciatartománybeli mintavételi tételt.

Ha egy jel időkorlátozott egy T hosszúságú időintervallumban, akkor Fourier-transzformáltját $\Delta f \leq 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt (vagyis az eredeti Fourier-transzformált a mintákból helyreállítható).

2 pont

3. Írja fel a λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét. Mekkora a várható érték?

$1-e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, 0 egyébként. E{x}=1/λ.

2 pont

4. Írja fel a [±A] között egyenletes eloszlás karakterisztikus függvényét!

$$\Phi(u) = \frac{\sin(Au)}{Au}$$

2 pont

5. Melyek a Hamming-ablak (0,54-re emelt szinusz) legfontosabb jellemzői? Mi az a tulajdonsága, ami miatt előszeretettel használjuk?

Egyetlen emelt szinuszból áll, ezek közül a legkisebb a maximális oldalhulláma. Emiatt használják.

Ugyanakkor az időfüggvény szélein ugrása van, ezért az oldalhullámok aszimptotikus csökkenése csak -20 dB/dekád.

2 pont

6. Hogyan lehet kiszámítani a koherensen mintavételezett szinuszjel amplitúdóját a DFT-ből?

A maximális értéknél $A = \frac{2|X_k|}{N}$

2 pont

7. Mi a léckerítés-hatás (picket fence hatás)?

Nem koherens mintavétel esetén szinuszjelre a DFT abszolút értéke kisebb, mint az elvileg várt *AN/2*. A minimális érték: $A\frac{N}{2}\frac{2}{\pi}$

8. Egy stacionárius sztochasztikus folyamat mintafüggvényét megmérjük a [0,T] intervallumban. A diszkrét mintákból visszaállítható-e a [0,T]-beli folytonos időfüggvény? Ha nem, miért, ha igen, akkor milyen feltétellel?

2 pont

Általában nem, különösen a széleken nem. Többféleképpen is lehet érvelni.

- A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó mintavételi tétel nem teljesíthető, mert a minták számával nem tudunk egyik irányban sem végtelenhez tartani.
- Egyetlen mintafüggvény nem más, mint egy tranziens. Ez stacionárius folyamat esetében folytatódna a határokon túl, de azok a minták nincsenek meg: vagyis az interpolációs formulának egyes tagjait el kell hagynunk. Ezért a visszaállítás hibás lesz, különösen a széleknél.

Egyetlen ilyen esett képzelhető el: a folyamat véletlen időzítésű periodikus, és a mintavétel koherens. Ilyenkor a széle folytatható a minta másik széléről.

9. Mi az a Sheppard-korrekció? Írja fel az első momentumra!

2 pont

A kvantált minták momentumaiból megadja a kvantálatlan minták momentumát.

$E\{x\} = E\{x_q\}$

10. Hogyan definiáljuk a sávkorlátozott fehér zajt?

2 pont

Olyan sztochasztikus folyamat, melynek [-*B*,*B*] között a teljesítménysűrűsége konstans, máshol nulla.

11. Mi a különbség az átlagos négyzetes érték és a szórásnégyzet között?

2 pont

$\Psi_x^2 = E\{x^2\} = E\{(x - E\{x\})^2\} + E^2\{x\} = \sigma_x^2 + E^2\{x\}$

Bármelyik egyenlőség megfelel megoldásnak.

12. Normális eloszlású valószínűségi változó esetén mi az az egyszerű ökölszabály, melynek teljesülése esetén arra számíthatunk, hogy a Sheppard-korrekciók pontosak?

2 pont

$\sigma > q$

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

B B B B B B B B B B B B B B B B

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Egy A/D konverterrel szinuszos jel mintáit gyűjtjük, majd a mintasorozatra legkisebb négyzetes módszerrel szinuszt illesztünk. Becslők-e valamilyen értelemben a kiszámított szinusz-paraméterek?

Determinisztikus szinuszjel esetén a kvantálási hiba szigorúan véve nem véletlen. Ilyen értelemben tehát ez legkisebb négyzetes jelillesztés, és nem becslés. Ilyen értelemben tehát nem.

2 pont Ha viszont a szinuszt véletlen fázisúnak tekintjük, akkor paramétereinek a legkisebb négyzetes becslőjét határozzuk meg. Ilyen értelemben tehát igen.

Mindkét válasz jó megfelelő indoklással.

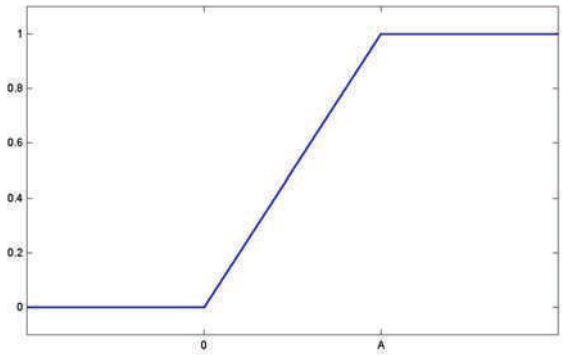
2. Mondja ki precízen az időtartománybeli mintavételi tételt.

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha

2 pont $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

3. Rajzolja fel a [0,A] között egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét. Mekkora a várható érték? Mekkora a szórásnégyzet?

2 pont



$$E\{x\} = A/2,\ \sigma_x^2 = \frac{A^2}{12}$$

4. Adja meg, hogy az exponenciális eloszlás alábbi karakterisztikus függvényében mekkora a K konstans!

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ _ $\Phi(u) = \dfrac{K}{1 + ju/\lambda}$

2 pont

Mivel $\Phi(0)=1$, $K = 1$.

5. Melyek a Hann-ablak (0,5-re emelt szinusz) legfontosabb jellemzői? Mi az a tulajdonsága, ami miatt előszeretettel használjuk?

Egyetlen megemelt szinuszból áll, a széleken odasimul az időtengelyhez, ezért az

2 pont oldalhullámok csökkenése 60 dB/dekád. A frekvenciatartományban [-0,25, 0,5, -0,25] súlyokkal előállítható a DFT-ből. A két utóbbi miatt kedvelik.

6. Hogyan lehet kiszámítani a koherensen mintavételezett szinuszjel amplitúdóját a diszkrét periodogramból?

2 pont

A maximumnál $A = \sqrt{4P_k / N}$

7. Mi a szivárgás?

2 pont

Nem koherens mintavétel esetén a szinusz teljesítménye megjelenik más frekvenciákon is.

8. Egy stacionárius sztochasztikus folyamat mintafüggvényét megmérjük a [0,T] intervallumban. A diszkrét mintákból visszaállítható-e a [0,T]-beli folytonos időfüggvény? Ha nem, miért, ha igen, akkor milyen feltétellel?

2 pont

Általában nem, különösen a széleken nem. Többféleképpen is lehet érvelni.

- A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó mintavételi tétel nem teljesíthető, mert a minták számával nem tudunk egyik irányban sem végtelenhez tartani.
- Egyetlen mintafüggvény nem más, mint egy tranziens. Ez stacionárius folyamat esetében folytatódna a határokon túl, de azok a minták nincsenek meg: vagyis az interpolációs formulának egyes tagjait el kell hagynunk. Ezért a visszaállítás hibás lesz, különösen a széleknél.

Egyetlen ilyen esett képzelhető el: a folyamat véletlen időzítésű periodikus, és a mintavétel koherens. Ilyenkor a széle folytatható a minta másik széléről.

9. Mi az a Sheppard-korrekció? Írja fel a második momentumra!

2 pont

A kvantált minták momentumaiból megadja a kvantálatlan minták momentumát.

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

10. Hogyan definiáljuk a sávkorlátozott fehér zajt?

2 pont

Olyan sztochasztikus folyamat, melynek [-*B*,*B*] között a teljesítménysűrűsége konstans, máshol nulla.

11. Mi a különbség a korreláció és a kovariancia között?

2 pont

$$R_{xy} = E\{xy\} = E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\} + E\{x\}E\{y\} = C_{xy} + E\{x\}E\{y\}$$

Bármelyik egyenlőség megfelel megoldásnak.

12. A [±q/2] között egyenletes eloszlású dither esetén mely Sheppard-korrekciók teljesülnek (teljesül-e bármelyik?)

2 pont

Az első teljesül, a többi nem.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

c c c c c c c c c c c c c c c c

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Egy ismeretlen konstans értéket [-A,A] között egyenletes eloszlású, nem független mintákból álló zaj terhel. Használható-e a legkisebb négyzetes becslő a konstans becslésére? Lehetséges-e, hogy van ennél jobb becslő?

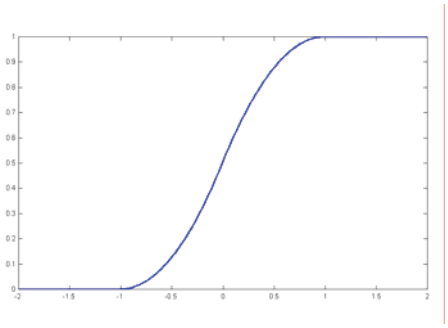
2 pont Igen, az LS becslő általában használható, de a ML becslő varianciája általában kisebb. Ebben az esetben is, mert a ML becslő nem LS.

2. Mondja ki a közelítő mintavételi tételt.

2 pont Ha egy jel egyszerre sáv- és időkorlátozott, akkor $N = 2BT$ megfelelően vett mintával leírható, vagyis ezekből a közbenső értékek kiszámíthatók.

3. Rajzolja fel a [-A,A] közötti háromszög alakú eloszlás (-A-nál nulla, nullánál 1/A, A-nál nulla) eloszlásfüggvényét. Mekkora a várható érték? Mekkora a szórásnégyzet?

2 pont



E{x}=0, var{x}=$q^2/6$

4. $\Phi(u) = \mathrm{sinc}(Au) - 0{,}5$ karakterisztikus függvény-e? Ha igen, mennyi a várható érték?

2 pont

Nem, mert u=0-nál nem 1 az értéke.

5. Mire használjuk a lapostetejű (flat top) ablakot?

2 pont

A spektrumból a maximális értéket leolvasva kis hibával meghatározható a szinusz nagysága (az amplitúdó közel pontos, a szivárgás kicsi).

6. Ha egy $N = 512$-pontos DFT-eredményben k=8-nál és k=504-nél is az érték $5j$, mit mondhatunk az időfüggvényről?

2 pont Komplex exponenciálisok összege – nem valós,. mert a fenti két értéknek komplex konjugáltaknak kellene lenniük.

7. Mi a szivárgás?

2 pont A teljesítmény inkoherencs mintavételnél a DFT-ben máshol is megjelenik mint az igazi teljesítmény helye lenne.

8. Léckerítésen keresztül megfigyeljük egy ház tetejét. Mit lehet mondani a legmagasabb pontról, ha azt nem látjuk, csak a réseken át megfigyelhető mintákat?

2 pont

Az értékét csak azzal a feltételezéssel tudjuk megmondani, hogy a tető sziluettje két egyenes vonalból áll. A mintavételi törvény be nem tartása miatt az interpoláció erre nemigen használható.

9. Mi az a Sheppard-korrekció? Írja fel a második momentumra!

2 pont

A kvantált minták momentumaiból megadja a kvantálatlan minták momentumát.

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

10. Hogyan definiáljuk a fehér zajt? Mekkora a varianciája, és ezt a gyakorlatban hogyan kezeljük?

2 pont

Olyan sztochasztikus folyamat, melynek spektruma minden frekvenciára konstans. Varianciája elvben végtelen. Modellként használjuk, a valós rendszerek átvitele véges sávszélességű, és ezért az azon kívül eső rész mindegy, hogy konstans-e vagy véges szélességű: tehát számunkra a rendszer sávszélességéig konstans spektrumú zaj tekinthető fehér zajnak is.

11. Miért korrigáljuk a tapasztalati szórásnégyzetet, és hogyan?

2 pont

Mert normális eloszlású független mintákra a várható értéke torzított. N/(N-1)-gyel szorozzuk.

12. Milyen feltételekkel lehet és érdemes szinuszos dithert használni?

2 pont

Ha a szinusz amplitúdója q-hoz képest nagy, és a szinusz teljesítményétől utólag valahogy meg tudunk szabadulni.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Milyen feltételek esetén azonos a nem nulla középértékű ismeretlen valószínűségi változó középértékének Bayes-becslője a maximum likelihood becslővel?

2 pont

a) az a priori variancia nagyon nagy ($\to\infty$)
b) a költségfüggvény megegyezik a likelihood (vagy log-likelihood) függvénnyel.

2. Mondja ki precízen az időtartománybeli mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

3. Ergodikus-e a véletlen időzítésű szinuszjel, melynek periódusideje T, és a nulla helyen felvett fázisának valószínűség-sűrűségfüggvénye szimmetrikus háromszög-eloszlású a $[0,4\pi]$ intervallumban? Miért?

2 pont

A szimmetrikus háromszög-eloszlás a $[0,2\pi]$ intervallumba transzformálva egyenletes eloszlás lesz. Ez tehát a szokásos véletlenfázisú szinuszjel.
Igen, ergodikus.

4. Egy jel $x(t) = 3\sin(\pi t+\varphi)+2$ alakú, egy véletlen fázisú folyamat mintafüggvénye. Írjuk fel az autokovariancia-függvényét és teljesítmény-sűrűségfüggvényét.

2 pont

$$C(\tau) = 4{,}5\cos(\pi t), \quad S(f) = 2{,}25\delta(f-0.5)+2{,}25\delta(f+0.5)+4\delta(f)$$

5. Miben jobb a Hamming-ablak a Hann-ablaknál, és miben rosszabb?

2 pont

Az oldalhullámok maximuma kisebb.
Nagy f-ekre lassabban tűnik el ($1/f^3$ helyett $1/f$)

6. Hogyan lehet kiszámítani a koherensen mintavételezett szinuszjel amplitúdóját az időfüggvény DFT-jéből? (algoritmus lépései)

2 pont

Vesszük az abszolút érték csúcsát, és elosztjuk N/2-vel.

7. Mi az a léckerítés-hatás (picket fence)?

2 pont

A DFT-ből (illetve a periodogramból) leolvasott csúcsérték kisebb, mint A*N/2 (illetve $N*A^2/2$).

8. Mit okoz a korreláció indirekt elvű becslésében, ha nem tartjuk be mintavételezésnél a mintavételi tételt? Ki lehet-e küszöbölni a cirkuláris korrelációs torzítást?

2 pont

A cirkuláris korreláció torzításának kiküszöbölése (kiegészítés nullákkal, osztás a Bartlett-ablakkal) ugyanúgy használható. A korreláció-becslők torzítatlanok lesznek, csak éppen a korrelációs függvény becslő értékeiből a folytonos korrelációs függvény nem állítható helyre.

9. Miért használunk dither-t?

2 pont

A kvantálási torzítás csökkentése céljából. Vagy: hogy a Sheppard-korrekciók teljesülését biztosítsuk a bemeneti jeltől függetlenül..

10. Milyen a DFT eredményének eloszlása koherensen mintavételezett véletlen fázisú szinuszjel esetén a különböző frekvenciákon?

2 pont

A szinusznak megfelelő frekvenciákon a komplex síkon lévő N/2*A sugarú nulla középpontú kör fölött egyenletes eloszlású. A többi frekvencián azonosan nulla.

11. Mekkora két korrelálatlan valószínűségi változó korrelációja?

2 pont

$$R(x1, x2) = E\{x_1\}E\{x_2\}$$

12. Egy egyenletes kvantáló kimenetén a kvantált jel kétféle értéket vesz fel: az "1" és "3" értékek között váltakozik. Mit mondhatunk a bemeneti jelről? Négyszögjel-e?

2 pont

A bemeneti érték az adott kimeneti szinthez tartozó sávban van. Ennél többet nem tudunk róla. Lehet négyszögjel, de egyáltalán nem biztos.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Milyen információkat használ fel a Bayes-becslés a mérési eredményeken kívül?

2 pont

A csatornakarakterisztikát (a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényét), a kívánt mennyiség a priori sűrűségfüggvényét, és a költségfüggvényt.

2. Mondja ki precízen a frekvenciatartománybeli mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel időkorlátozott egy T hosszúságú időintervallumban, akkor Fourier-transzformáltját $\Delta f \leq 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt (vagyis az eredeti Fourier-transzformált a mintákból helyreállítható).

3. Ergodikus-e a véletlen időzítésű háromszögjel, melynek periódusideje T, és az egyik nullátmenete a [T/4,T/2] intervallumban van? Miért?

2 pont

Nem, mert nem stacionárius (az egyik nullátmenet helye a periódusidő ¼-ébe van rögzítve).

4. Egy jel $x(t) = -2\cos(5t+\varphi)$ alakú, egy véletlen fázisú folyamat mintafüggvénye. Írjuk fel a teljesítmény-sűrűségfüggvényét.

2 pont

$$S(f) = \delta(f - 5/(2\pi)) + \delta(f + 5/(2\pi))$$

5. Egy olyan periódikus jelet definiálunk, melynek darabjai egymáshoz simán illeszkedő másodfokú paraboladarabokból állnak. Milyen gyorsan csökkennek a felharmonikusai a rendszám függvényében?

2 pont

A sima illeszkedés miatt az első derivált folytonos. A másodfok miatt a második deriváltban ugrás van. Ezen szerint a csökkenés $1/n^3$-nal arányos.

6. Hogyan lehet kiszámítani a koherensen mintavételezett szinuszjel amplitúdóját periodogramjának maximális értékéből?

2 pont

$$A = \sqrt{\frac{4S_k}{N}}$$

7. Mi az a spektrum-szivárgás?

2 pont

Nem koherens mintavétel esetén a DFT-ben (és a periodogramban is) nemcsak a szinusz frekvenciájához legközelebb eső bin-ben, hanem a többiben is megjelenik nullától különböző érték.

2 pont

8. Írja fel a következő két sorozat cirkuláris korrelációját: [-1,0,1], [5,6,-7].

[-4 -0.33 4,33]

(Matlab:

```
x1=[-1,0,1]; x2=[5,6,-7]; Rcirc=1/3*ifft(conj(fft(x1)).*fft(x2))
```

)

9. Miért használunk dither-t?

2 pont

A kvantálási torzítás csökkentése céljából.

2 pont

10. Milyen a DFT eredményének eloszlása véletlen fázisú szinuszjel esetén?
Az átlapolódást elhanyagolva nulla középértékű körszimmetrikus egyenletes eloszlás a komplex síkon.

2 pont

11. Két valószínűségi változó korrelálatlan. Függetlenek-e ennek következtében? Egyáltalán, lehetnek-e függetlenek?
Nem feltétlenül (csak normális eloszlás esetén következik belőle). Igen, lehetnek.

2 pont

12. Egy egyenletes kvantáló kimenetén a kvantált jel azonosan nulla. Mit mondhatunk a bemeneti jelről, ha $q = 0.1$?
A $[-q/2, q/2]$ intervallumban van.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

B B B B B B B B B B B B B B B B

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Kell-e ismerni a csatornakarakterisztikát a maximum likelihood becsléshez? És a becslendő paraméter a piori eloszlását?

2 pont Igen, a becslőt a csatornakarakterisztikából határozzuk meg. Az a priori eloszlást nem használjuk, akkor sem, ha megvan.

2. Sztochasztikus folyamatokra hogyan szól a mintavételi tétel?

2 pont Ha egy sztochasztikus folyamat sávkorlátozott, azaz teljesítmény-sűrűségfüggvényére igaz az, hogy $S(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az időfüggvény a mintákból helyreállítható:

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(x(t) - \sum_{i=-N/2}^{N/2} x_i \frac{\sin\left(\frac{t-iT}{T}\pi\right)}{\frac{t-iT}{T}\pi}\right)^2\right] = 0\,).$$

3. Ergodikus-e egy olyan négyszögjel, melynek értékei ±1, a $t = 0$ időpontban értéke 1, és állapotváltozásai ettől kezdve egymástól exponenciális eloszlású időpontokban vannak?

2 pont Nem, mert nem stacionárius (a 0 környékén nagy valószínűséggel 1 az értéke).

4. Egy jel $x(t) = -2\cos(5t)$ alakú, egy véletlen fázisú folyamat mintafüggvénye. Írjuk fel az autokovariancia-függvényét.

2 pont $C(\tau) = 2\cos(5\tau)$

5. A szimmetrikus négyszögjelnek milyen gyorsan csökkennek a felharmonikusai a rendszám függvényében?

2 pont Ugrásokat tartalmaz, ezért $1/n$-nel arányosan.

6. Hogyan lehet kiszámítani a koherensen mintavételezett szinuszjel amplitúdóját a DFT eredményének maximális abszolút értékű pontjából? És a kezdőfázist?

2 pont $A = \frac{2|X_k|}{N}$

A szög a szinusz definíciójától függ:
Ha $x(t) = A\cos(2\pi f_1 t+\varphi)$, $\varphi = \arg(X_k)$.
Ha $x(t) = A\sin(2\pi f_1 t+\varphi)$, $\varphi = \arg(X_k/j)$.

7. Mi az a picket fence (léckerítés)-hatás?

2 pont A DFT csak mintákat mutat. A maximális abszolút értékű minta abszolút értéke nem koherens mintavétel esetén kisebb, mint az elvi $NA/2$ érték.

8. Írja fel a következő két sorozat cirkuláris konvolúcióját: [-1,0,1], [5,6,-7].

2 pont [1,-13,12]
(Matlab:

```
x1=[-1,0,1]; x2=[5,6,-7]; Cconv=ifft(fft(x1).*fft(x2))
```

)

9. Csökkenti-e a kvantálási torzítást, ha a bemeneti jelhez kvantálás előtt négyszögjelet adunk? Ha nem, miért, ha igen, mennyivel?

2 pont

Legfeljebb kismértékben. A kvantálási tételeket nem teljesíti.
Ha csúcstól-csúcsig amplitúdója $q/2$, akkor a várható érték maximális torzítását $q/2$-ről $q/4$-re csökkenti. Ha a csúcstól-csúcsig amplitúdó q, akkor nem csökkenti.

10. Miért folytonosnak látszó (és nem szakadásos vagy fehér zajjal terhelt) függvény a korrelációs függvény becslője?

2 pont

Mert a szomszédos becslő pontok erősen korreláltak.

11. Két valószínűségi változó független. Korrelálatlanok-e ennek következtében? Milyen mennyiségek egyenlők ilyenkor nullával?

2 pont

Igen. A kovariancia és a korrelációs együttható nulla.

12. A ±1 V közötti tartományt 10-bites A/D konverterrel kvantáljuk. Mekkora a kvantálási zaj teljesítménye?

2 pont

$q = 2 \cdot 10^{-3}$. $P = q^2/12$.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Milyen eloszlású megfigyelések esetén biztos, hogy a középérték becslésére legjobb a megfigyelések számtani közepét használni?

2 pont

Független, azonos normális eloszlású megfigyelések esetén.

2. Milyen értelemben reprezentálják a minták a sztochasztikus folyamat regisztrátumát, ha a mintavételi tétel feltételét betartjuk?

2 pont

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(x(t)-\sum_{i=-N/2}^{N/2} x_i \frac{\sin\left(\frac{t-iT}{T}\pi\right)}{\frac{t-iT}{T}\pi}\right)^2\right]=0$$

3. Egy sztochasztikus folyamat minden mintafüggvénye konstans. Stacionárius-e? Milyen feltétel(ek) mellett ergodikus?

2 pont

Stacionárius, hiszen tulajdonságai időfüggetlenek.
Nem ergodikus, hiszen különböző időfüggvényeinek átlaga eltér. Kivétel: ha minden időfüggvény azonos (nagyon precízen: 1 valószínűséggel azonos).

4. Egy [0 s,12 s] között konstans, egyébként 0 értékű tranziens jelet 0,2 Hz frekvenciával mintavételezünk. Helyreállítható-e a mintákból hibátlanul a jel az interpolációs formulával?

2 pont

Nem, hiszen az időfüggvény Fourier-transzformáltja (sinc) nem sávkorlátozott.

5. A fűrészjelnek (háromszög, melyen minden második éle függőleges) milyen gyorsan csökkennek a felharmonikusai a rendszám függvényében?

2 pont

A jelben ugrások vannak, ezért a harmonikusok 20 dB / dekáddal ($1/n$-nel arányosan) csökkennek.

6. Egy szinuszos jelből 5 kHz-es mintavételezési frekvenciával 1000 mintát veszünk. Az FFT után a k=110 indexű pontban van egy csúcsérték. Melyek a szinusz frekvenciájának lehetséges értékei?

2 pont

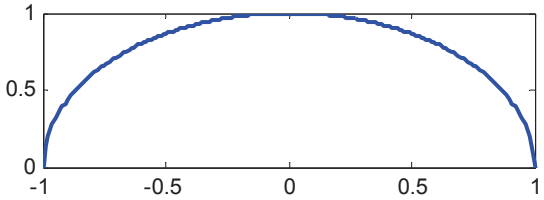
A szinusz vonala a kf_m/N frekvenciánál jelenik meg. Eredeti helye $kf_m/N+nf_m$, ahol n egész szám. A szinusz eredeti frekvenciája tehát $|kf_m/N+nf_m|$ lehet.

7. Mi az a spektrum-szivárgás?

2 pont

Egy jel véges regisztrátumának diszkrét Fourier-transzformáltjában nemcsak a spektrum tényleges helyén, hanem a többi helyen is megjelenik nullától különböző érték.

8. Az alábbi, ±1 kHz között fél-ellipszis alakú teljesítmény-sűrűségfüggvénynek mekkora az ekvivalens sávszélessége?



2 pont

A görbe alatti terület π/2 (félkörlap...), vagyis az ekvivalens sávszélesség $B_e = \pi/4$ kHz = 0,79 kHz.

9. Az előző kérdésben látható spektrumú jelből 3 kHz mintavételi frekvenciával 100 mintát veszünk, és átlagoljuk őket. Hanyadrészére csökken a variancia?

2 pont

A mintavételi tételt túlteljesítjük, vagyis az átlag varianciája $\frac{\sigma^2}{2B_eT} \approx \frac{\sigma^2}{53}$

10. A periodogram varianciája 100%-os. Mi minek a 100%-a?

2 pont

A variancia a várható érték négyzetének 100%-a (vagyis egyenlő vele).

11. Két valószínűségi változó korrelálatlan. Függetlenek-e ennek következtében? Egyáltalán, lehetnek-e függetlenek?

2 pont

Nem feltétlenül. De lehet, hogy azok. (Együttes normális eloszlás esetén a korrelálatlanságból következik a függetlenség).

12. Milyen a véletlen zaj FFT-je abszolút érték-négyzetének eloszlása azokon a frekvenciákon, ahol a teljesítmény-sűrűségfüggvény értéke nem nulla?

2 pont

Exponenciális eloszlású (vagy másképp: kétszabadságfokú χ^2-eloszlású). A várható értéke $\frac{1}{\lambda} \approx TS(f)$ (ezt nem voltkötelező megadni)

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

B B B B B B B B B B B B B B B B

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mikor esik egybe a legkisebb négyzetes (LS) becslés és a maximum likelihood (ML) becslés?

2 pont Normális, független, azonos eloszlású minták középértékének mérésekor.

2. Sztochasztikus folyamatokra hogyan szól a mintavételi tétel?

2 pont Ha egy sztochasztikus folyamat sávkorlátozott, azaz teljesítmény-sűrűségfüggvényére igaz az, hogy $S(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az időfüggvény a mintákból helyreállítható:

$$\lim_{N\to\infty} P\left[\left(x(t) - \sum_{i=-N/2}^{N/2} x_i \frac{\sin\left(\frac{t-iT}{T}\pi\right)}{\frac{t-iT}{T}\pi}\right)^2\right] = 0\ ).$$

3. Stacionárius-e egy véletlen időzítésű négyszögjel, melynek felfutási időpontja egyenletes eloszlású [-0,4T,1,6T] között, ahol T a periódusidő? Ergodikus-e a jel?

2 pont Stacionárius és ergodikus. Az időzítés a periódusidő kétszeresét kitevő intervallumban egyenletes.

4. Egy 5 kHz-es koszinuszjel Fourier-transzformáltját szeretnénk hibátlanul mintavételezni. Mekkora sűrűséggel kell mintákat vennünk?

2 pont Az időfüggvény végtelenül széles (más érv: a Fourier-transzformált Dirac-deltát tartalmaz). Nem lehet hibátlanul mintavételezni.

5. A szimmetrikus háromszögjelnek milyen gyorsan csökkennek a felharmonikusai a rendszám függvényében?

2 pont A jelben nincs ugrás, de töréspontok vannak. Ezért a harmonikusok 40 dB / dekáddal ($1/n^2$-tel arányosan) csökkennek.

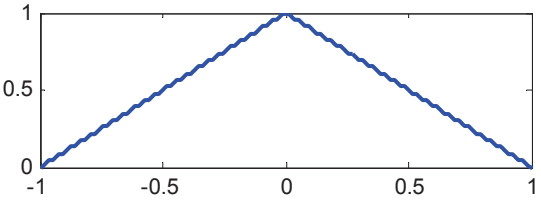
6. Koherens mintavételezés esetén mekkora az X amplitúdójú szinuszjel ($X\sin(2\pi f_1 t)$) DFT-jének maximális amplitúdójú komponense abszolút értékben? Mekkora a fázis?

2 pont $X{\cdot}N/2$. A fázis a pozitív frekvenciákra -90º, negatívakra +90º.

7. Mi az a picket fence (léckerítés)-hatás?

2 pont Ha nem koherens a mintavételezés, akkor a szinuszjel diszkrét Fourier-transzformáltjának maximális abszolút értéke kisebb, mint $A{\cdot}N/2$.

8. Az alábbi, ±1 kHz között háromszög alakú spektrumnak mekkora az ekvivalens sávszélessége?



2 pont

0,5 kHz

9. Az előző kérdésben látható spektrumú jelből 4 kHz mintavételi frekvenciával 100 mintát veszünk, és átlagoljuk őket. Hanyadrészére csökken a variancia?

2 pont

Túl van mintavételezve, 25-öd részére.

10. Nagy τ értékekre általában mekkora az autokovariancia függvény relatív varianciája?

Az autokovariancia értéke nulla, varianciája véges, tehát a relatív variancia végtelen.

2 pont

11. Két valószínűségi változó független. Korrelálatlanok-e ennek következtében? Milyen mennyiségek egyenlők ilyenkor nullával?

2 pont

Igen. Nulla a kovariancia, és a korrelációs együttható. A korreláció maga csak akkor nulla, ha a várható értékek egyike nulla.

12. Milyen a véletlen zaj FFT-jének eloszlása azokon a frekvenciákon,, ahol a teljesítmény-sűrűségfüggvény értéke nem nulla?

2 pont

Körszimmetrikus, nulla várható értékű kétdimenziós normális eloszlás a komplex sík fölött.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

Név: . . . . . Kód: . . . . . .Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Használható-e a legkisebb négyzetes (LS) becslő korrelált egyenletes eloszlású megfigyelések esetén a középérték becslésére? Ilyen megfigyelésekre jobb-e a Gauss-Markov becslő, mint az LS becslő, ha igen, miért?

2 pont

Természetesen használható, csak nem maximum likelihood, tehát nem optimális. Korrelált megfigyelésekre jobb a G_M becslő, hiszen figyelembe veszi a korreláltságot, az LS becslő viszont nem.

2. Mondja ki precízen a II. (frekvenciatartománybeli) mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel időkorlátozott egy T hosszúságú időintervallumban, akkor Fourier-transzformáltját $\Delta f \leq 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt (vagyis az eredeti Fourier-transzformált a mintákból helyreállítható).

3. Hogyan definiáljuk a majdnem periodikus jeleket? Igaz-e ezek Fourier-transzformáltjára, hogy pozitív frekvenciánál az értékük a megfelelő negatív frekvenciánál vett értékük komplex konjugáltja?

2 pont

Szinuszos összetevőkből álló, de nem periodikus jel. Igen, hiszen a jel valós, és a komplex konjugáltság ebből következik.

4. Milyen sűrűn kell mintavételezni egy $\mathrm{sinc}^2(2\pi Bt)$ alakú jelet a mintavételi tétel értelmében?

2 pont

A Fourier-transzformált $\pm 2B$ között különbözik nullától, tehát legfeljebb $1/4B$ távolságokban.

5. Miben jobb a Hamming-ablak a Hann-ablaknál? Miben rosszabb?

2 pont

A maximális oldalhullám kisebb. Az oldalhullámok csökkenési sebessége a Hann-nál nagyobb (60 dB/dekád), a Hamming-nál kisebb (20 dB/dekád).

6. Egy szinuszos jelből f_m mintavételi frekvenciával N mintát veszünk, és DFT-nek vetjük alá. Milyen szinuszfrekvenciákra tartalmaz a DFT eredménye mindössze kettő nullától különböző értéket?

2 pont

$k\frac{f_m}{N},\ k \neq n\frac{N}{2},\ k,n$ egész

7. Mi az a léckerítés-hatás, és hogyan csökkentjük (legalább 2 eljárás)?

2 pont

A DFT-ből leolvasott maximális szinusz-csúcs kisebb, mint koherens mintavételnél. Csökkentés: Ablakfüggvény (flat top), interpolált FFT, szinuszillesztés.

8. Elképzelhető-e, hogy az autokorrelációs függvény $\tau \to \infty$ esetén az $R(0)$ értéknél nagyobb értékhez tart? Tarthat-e negatív értékhez?

2 pont

Nem, mert az *R(0)* az *R* maximális értéke.
Nem, mert a határérték a μ^2, ami nem lehet negatív.

9. A mintavételi tételt B_e ekvivalens sávszélességű jelnél ötszörösen túlteljesítjük, és 1000 mintát veszünk. Hanyadrészére csökken a variancia, ha minden második mintát átlagolunk?

2 pont

2,5-szörösen teljesítjük túl, vagyis 500/2,5=200-adrészére.

10. Mekkora a koherensen mintavételezett véletlen fázisú szinuszjel periodogramjának varianciája?

2 pont

A periodogramból a szinusz fázisa kiesik, tehát 0 a variancia.

11. Mi a pontos feltétele annak, hogy három valószínűségi változó független legyen? Biztos-e ilyenkor, hogy páronkénti korrelációjuk nulla?

2 pont

$$f_{x1,x2,x3}(z_1, z_2, z_3) = f_{x1}(z_1) f_{x2}(z_2) f_{x3}(z_3)$$

A *kovarianciák* és a *korrelációs együtthatók* nullák. A korrelációk csak akkor nullák, ha a várható értékek közül legalább 2 nulla.

12. Milyen a periodogram eloszlása véletlen zaj esetén? Mekkora a várható értéke?

2 pont

Exponenciális eloszlású. Várható értéke közelítőleg megegyezik a teljesítmény-sűrűségfüggvény értékével.

Σ 24 pont

Megfelelt:
13 ponttól

Elővizsga:
20 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mondja ki a közelítő mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott B sávkorláttal ($X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$), és időkorlátozott T időkorláttal (egy T hosszúságú szakaszon kívül 0 az időfüggvény), akkor $N = 2BT$ mintával egyértelműen jellemezhető (ezekből a folytonos időfüggvény helyreállítható).

2. Egy tranziens jelet $f_m = 5$ kHz mintavételi frekvenciával mintavételezünk. $N = 512$ mintát veszünk, majd DFT-t hajtunk végre.

a) Milyen messze vannak egymástól az egyes kiszámolt spektrumértékek megfelelői Hz-ben?

b) Megfigyelhető-e valamilyen szimmetria a DFT-ben? Hány olyan pont van, amely biztosan valós értékű?

a) A frekvenciatartományban a felbontás $f_m/N \approx 10$ Hz.

b) Igen, a negatív frekvenciákhoz tartozó pontok a pozitív frekvenciákhoz tartozó pontok komplex konjugáltjai. Vagy másképp: a pontokat $k = 0,1,...,511$-tel indexelve, a k-hoz tartozó pont az N-k-hoz tartozó pont komplex konjugáltja.

2 pont

Igen, a $k=0$-hoz tartozó pont, és páros N esetén a $k = N/2$-höz tartozó pont.

3. Egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye $R(\tau) = 9\mathrm{V}^2 e^{-5\mathrm{kHz}|\tau|} + 4\mathrm{V}^2$. Adja meg a következőket:

a) szórás

b) autokovariancia-függvény

c) várható érték

2 pont

a) $\sigma = 3$ V

b) $C(\tau) = 9\mathrm{V}^2 e^{-5\mathrm{kHz}|\tau|}$

c) $\mu = 2$ V

4. Egy $f_0 = 2$ kHz-es szinuszjelet a mintavételi tételt betartva, koherensen mintavételezünk. A mintavételezett sorozat DFT-je $N = 1024$ pontból áll (1,2,...1024. pont), és a transzformált sorozat 6. elemében van egy nagyobb csúcs.

a) Mennyi lehetett a mintavételi frekvencia?

b) Van-e a DFT eredményében még egy csúcs? Hányadik pontban?

2 pont

a) A 6. elem azt jelenti, hogy az ennek megfelelő frekvencia $f_0 = 5 \cdot f_m/N$, vagyis a mintavételi frekvencia $f_0 N/5 = 400$ kHz.

b) Igen, az N-k+1 = 1020. pontban.

5. Mekkora a Hann-ablak (a tengelyhez simuló koszinuszos ablak) oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban? Miért?

2 pont

60 dB/dekád, mivel az ablakfüggvény második deriváltjában van ugrás, az ablakfüggvényben vagy deriváltjában nincs.

6. Miért szokás az átlapolásgátló szűrő áteresztő tartományának szélét inkább a mintavételi frekvencia negyedére, és nem a felére választani?

2 pont

Azért, mert ideálisan meredek aluláteresztő szűrőt nem lehet készíteni, tehát helyet kell hagyni az átmeneti tartománynak, különben az áteresztő tartományban átlapolódás következik be.

7. Elképzelhető-e, hogy indított átlagolással akarjuk a jel/zaj viszont növelni, és 100 minta átlagolása után a jel/zaj viszony 25 dB-lel nő?

2 pont

Nem, mert a maximális javulás 100 minta esetén 20 dB.

8. Használható-e exponenciális eloszlású dither a kvantálási torzítás csökkentésére? Hogyan?

2 pont

Igen, ha az amplitúdója eléggé nagy ahhoz, hogy a kvantálási tétel feltételét közelítőleg teljesítse.

9. Vezesse le a másodrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

2 pont

$$x_q = x + n\,, \quad E\{x_q^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 0 + \frac{q^2}{12}$$

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

10. Két valószínűségi változó korrelálatlan. Függetlenek-e ennek következtében? Egyáltalán, lehetnek-e függetlenek?

2 pont

Nem feltétlenül. Biztosan azok, ha az eloszlás normális. Igen, lehetnek függetlenek.

11. Miért hívják cirkulárisnak a cirkuláris korrelációt illetve konvolúciót?

2 pont

Azért, mert a kiszámított érték úgy is értelmezhető, mintha az egyik sorozatot körben tolnánk a másik sorozat előtt.

Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

B B B B B B B B B B B B B B B B

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mondja ki precízen az I. mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

2. Egy tranziens jelenség jele $T_r = 3$ ms hosszúságú. A jelenség 4 ms-onként megismétlődik. $f_m = 50$ kHz frekvenciával $N = 600$ mintát veszünk, majd DFT-t hajtunk végre. Hogyan látható a spektrum (a tranziens válasz Fourier-transzformáltja) a kapott eredményben? Lehet-e a frekvenciatartományban interpolálni a spektrumot?

2 pont

Az $N = 600$ minta 50 kHz frekvenciával véve 12 ms hosszúságú regisztrátumot jelent. Ebben pontosan 3 ismétlés van, tehát a DFT eredménye 3-pontonként mintavételezve mutatja a spektrumot. Ezekből a pontokból elvben mindig lehet interpolálni, de csak akkor kapjuk meg az eredeti időfüggvény transzformáltját, ha betartjuk a mintavételi tételt, vagyis az ismételt időfüggvény nem lapolódik át.

3. Egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye $R(\tau) = 4\mathrm{V}^2 \dfrac{\sin(\pi\tau 5kHz)}{\pi\tau 5kHz} + 2\mathrm{V}^2$.

Adja meg a következőket:

a) szórás
b) autokovariancia-függvény
c) várható érték

2 pont

a) $\sigma = 2$ V
b) $C(\tau) = 4\mathrm{V}^2 \dfrac{\sin(\pi\tau 5kHz)}{\pi\tau 5kHz}$
c) $\mu = 1{,}41$ V

4. Az X_p sorozat $N = 4096$ pontból áll ($p = 1,2,...,4096$). Ennek a sorozatnak a Matlab `ifft` parancsával kiszámítjuk az inverz DFT-jét. Tudjuk, hogy a sorozatban a $p = 33$ helyen van egy 2^{12} nagyságú impulzus, a $p = 4065$ helyen pedig ugyancsak egy 2^{12} nagyságú impulzus, a többi elem nulla. Számítsuk ki az inverz DFT eredményét.

2 pont

Az inverz DFT-hez $k = 0,1,...,4095$ indexpontokban kell venni a sorozatot, vagyis át kell indexelnünk: $k = p-1$. Ilyenkor a $k = 32$ és $k = 4064$ pontok egymásnak tükörképei az $N = 4096$ össz-mintaszámot nézve, vagyis az inverz DFT eredménye egy mintavételezett koszinuszfüggvény:

$$x_i = 2\cos 2\pi \frac{32}{4096} i, \quad i = 0,1,...4095.$$

5. Mekkora a Hamming-ablak (a 0,54-gyel megemelt koszinusszal leírható ablak) oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban? Miért?

2 pont

-20 dB/dekád, mert a széleken ugrás van az ablakfüggvényben.

6. Megvalósítható-e elvileg az ideális aluláteresztő szűrő? Ha igen, hogyan, ha nem, miért?

2 pont

Az ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális, ezért elvileg nem lehet megvalósítani. Közelíthető megfelelő késleltetés megengedésével.

7. Ha indított átlagolást végzünk, és tudjuk, hogy a zaj $B = 6$ kHz ekvivalens sávszélességű, akkor 48 kHz mintavételi frekvenciával $N = 80$ mintát átlagolva, mennyivel javul a jel/zaj viszony?

2 pont

A mintavételi tételt négyszeresen teljesítjük túl, tehát a variancia 20-ad részére csökken. Ez 13 dB-nek felel meg.

8. Mire jó a dither?

2 pont

Kvantálás előtt használva csökkenti a momentumok mérési hibáját (biztosítja a zajmodell használhatóságát, vagy a Sheppard-korrekciók teljesülését).

9. Vezesse le a harmadrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

2 pont

$$x_q = x + n\,,\quad E\{x_q^3\} = E\{(x+n)^3\} = E\{x^3 + 3x^2 n + 3xn^2 + n^3\} = E\{x^3\} + 0 + 3E\{x\}\frac{q^2}{12} + 0$$

$$E\{x^3\} = E\{x_q^3\} - E\{x_q\}\frac{q^2}{4}$$

10. Két valószínűségi változó független. Korrelálatlanok-e ennek következtében? Milyen mennyiségek egyenlők ilyenkor nullával?

2 pont

Igen, biztosan azok. Nulla a kovariancia és a korrelációs együttható.

11. Mi a teendő a cirkuláris korreláció becslőjével, ha nullák megfelelő hozzáadásával megszüntettük a cirkularitást? Minden kapott pontra meg lehet tenni a korrekciót?

2 pont

A Bartlett-ablakkal osztani kell, de csak ott, ahol az ablak nem túl kicsi.

4 pont

Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
10 ponttól

C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

Név: . . . . Aláírás: . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

2 pont

1. Mondja ki precízen a II. mintavételi tételt.

Ha egy jel időkorlátozott egy T hosszúságú időintervallumban, akkor Fourier-transzformáltját $\Delta f \leq 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti Fourier-transzformált a mintákból helyreállítható).

2 pont

2. Milyen szimmetria-tulajdonságai vannak egy mért jel Fourier-transzformáltjának? A jel maga nem más, mint a Fourier-transzformált inverz Fourier-transzformáltja. Ennek miért nincs meg ugyanez a tulajdonsága?

A negatív és pozitív frekvenciákon egymás komplex konjugáltja.
Azért, mert a spektrum nem valós (a fenti szimmetria a valós időtartomány-beli jelből következik).

2 pont

3. Elképzelhető-e, hogy egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye ideális négyszögimpulzus-alakú? Miért? És háromszög-impulzus-alakú?

Nem, mert a Fourier-transzfromált (a teljesítmény-sűrűségfüggvény) helyenként negatív lenne.
Igen, mert annak Fourier-transzformáltja nemnegatív valós.

2 pont

4. Egy f_0 = 250 kHz-es szinuszjelet a mintavételi tételt betartva, koherensen mintavételezünk. A mintavételezett sorozat DFT-je N = 4096 pontból áll (1,2,...4096. pont), és a transzformált sorozat 11. elemében van egy nagyobb csúcs.

a) Mennyi lehetett a mintavételi frekvencia?
b) Van-e a DFT eredményében még egy csúcs? Hányadik pontban?

a) A 11. elem azt jelenti, hogy az ennek megfelelő frekvencia $f_0 = 10 \cdot f_m / N$, vagyis a mintavételi frekvencia $f_0 N/10$ = 102,4 MHz.
b) Igen, az N-k+1 = 4087. pontban.

2 pont

5. A Hamming-ablak oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban sokkal kisebb, mint a Hann-ablaké. Miért? Ha így van, miért használjuk?

Mert a két szélen ugrást tartalmaz (20 dB/dekád), a Hann-ablak nem (60 dB/dekád).
Mert ez az a harmonikus ablak, mely egyetlen koszinuszos összetevőt tartalmaz, és a legnagyobb oldalhulláma ezen ablakok között a legkisebb (optimalizált ablak).

2 pont

6. Meg lehet-e valósítani közelítőleg az ideális aluláteresztő szűrőt digitálisan, ha igen hogyan, ha nem, miért?

Igen, de csak közelítőleg: az ideális ablak nonkauzalitása miatt megfelelően nagy késleltetéssel.

2 pont

7. A mozgó átlagolás általában növeli a jel/zaj viszonyt. Mekkora a növekedés maximális értéke paraméteresen kifejezve, dB-ben? Mi korlátozza az ablak célszerű szélességét?

A maximális növekedés $\lg\left(\frac{1}{2BT_r}\right)$, vagy független minták esetén $\lg\left(\frac{1}{N}\right)$.

Az ablakfüggvény főhulláma majdnem konstans részének legalábbis közelítőleg tartalmaznia kell a hasznos jel spektrumát.

C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

2 pont

8. Mire való a dither hozzákeverése a kvantálás előtt? Van-e hátránya, vagy csak előnye van?

Megfelelő dither biztosítja a Sheppard-korrekciók teljesülését.
Hátránya a megnövekedő variancia.

2 pont

9. Vezesse le a másodrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

$$x_q = x + n\,, \quad E\{x_q^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 0 + \frac{q^2}{12}$$

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

2 pont

10. Két valószínűségi változó külön-külön normális eloszlású. Következik-e ebből, hogy együttes eloszlásuk is normális?

Nem. A peremeloszlások általában nem határozzák meg az együttes eloszlást, itt sem.

2 pont

11. Hogyan lehet a cirkuláris korreláció illetve cirkuláris konvolúció kiszámítási algoritmusát úgy módosítani, hogy a cirkularitás megszűnjék?

A cirkularitás úgy is felfogható, hogy az egyik sorozat „körbefordul” a másik előtt. Ha mindkét sorozatot kiegészítjük a mintaszámmal egyenlő számú nullával, akkor a körbeforduló sorozat nem nulla része csak akkor éri el a másik sorozat nem nulla részét, amikor a „kimenő rész” már elhagyta azt.

Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mondja ki a közelítő mintavételi tételt.

2 pont Ha egy jel sávkorlátozott B sávkorláttal ($X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$), és időkorlátozott T időkorláttal (egy T hosszúságú szakaszon kívül 0 az időfüggvény), akkor $N = 2BT$ mintával egyértelműen jellemezhető (ezekből a folytonos időfüggvény helyreállítható).

2. Egy sztochasztikus jelet $f_m = 5$ kHz mintavételi frekvenciával mintavételezünk. $N = 2048$ mintát veszünk, majd DFT-t hajtunk végre.

a) Milyen messze vannak egymástól az egyes kiszámolt spektrumértékek megfelelői Hz-ben?

b) Megfigyelhető-e valamilyen szimmetria a sztochasztikus folyamat regisztrátumának DFT-jében? Hány olyan pont van, amely biztosan valós értékű?

a) A frekvenciatartományban a felbontás $f_m/N \approx 2{,}5$ Hz.

b) Igen, a negatív frekvenciákhoz tartozó pontok a pozitív frekvenciákhoz tartozó pontok komplex konjugáltjai. Vagy másképp: a pontokat $k = 0,1,...,2047$-tel indexelve, a

2 pont k-hoz tartozó pont az N-k-hoz tartozó pont komplex konjugáltja.

Igen, a $k=0$-hoz tartozó pont, és páros N esetén a $k = N/2$-höz tartozó pont.

3. Egy sztochasztikus folyamat egy elsőfokú aluláteresztő szűrő kimenetén, 0,5 V középértékű fehér zajból keletkezik. A szűrő időállandója $K = 1$ ms. Az átlagos négyzetes érték 0,75 V^2. Írja fel az autokorrelációs függvényt és a teljesítmény-sűrűségfüggvényt.

2 pont $R(\tau) = 0{,}25\ \mathrm{V}^2 + 0{,}5\ \mathrm{V}^2 e^{-\frac{|\tau|}{K}}$ $\quad S(f) = 0{,}25\ \mathrm{V}^2\ \delta(0) + \dfrac{0{,}5\ \mathrm{V}^2 \cdot 2K}{1 + (2\pi f K)^2}$

4. Egy $f_0 = 5$ MHz-es szinuszjelet a mintavételi tételt betartva, koherensen mintavételezünk. A mintavételezett sorozat DFT-je $N = 1024$ pontból áll, és a transzformált sorozat 5. elemében van egy nagyobb csúcs.

a) Mennyi lehetett a mintavételi frekvencia?

b) Van-e a DFT eredményében még egy nagyobb csúcs? Hányadik pontban

2 pont a) Az 5. elem azt jelenti, hogy az ennek megfelelő frekvencia $f_0 = 4 \cdot f_m/N$, vagyis a mintavételi frekvencia $f_0 N/4 = 1{,}28$ GHz.

b) Igen, az N-k+1 = 1021. pontban.

5. Mekkora a Bartlett-ablak (háromszög alakú ablak) oldalhullámainak csökkenési

2 pont sebessége dB/dekád-ban? Miért?

40 dB/dekád, mivel az ablakfüggvény deriváltjában van ugrás, az ablakfüggvényben nincs.

6. Miért szokás az átlapolásgátló szűrő áteresztő tartományának szélét inkább a mintavételi frekvencia negyedére, és nem a felére választani?

2 pont Azért, mert ideálisan meredek aluláteresztő szűrőt nem lehet készíteni, tehát helyet kell hagyni az átmeneti tartománynak, különben az áteresztő tartományban átlapolódás következik be.

7. Elképzelhető-e, hogy indított átlagolással akarjuk a jel/zaj viszont növelni, és 100 minta átlagolása után a jel/zaj viszony mindössze 9 dB-lel nő? Milyen feltétellel?

2 pont Igen, akkor, ha a zaj varianciája csak kicsit csökken. A 9 dB egy 8-as faktornak felel meg. Ilyenkor a zaj sávszélessége kicsi, $2B_eT = 8$, vagyis $= B_e = 4/T = 1/(25T_p)$.

8. Használható-e szinuszos dither a kvantálási torzítás csökkentésére? Hogyan?

2 pont Igen, ha az amplitúdója eléggé nagy ahhoz, hogy a kvantálási tétel feltételét közelítőleg teljesítse.

9. Vezesse le a másodrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

2 pont

$$, \quad E\{x_q^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 0 + \frac{q^2}{12}$$

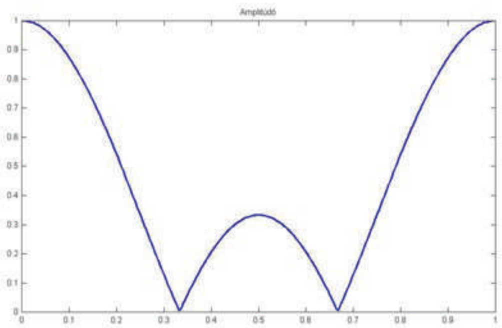
$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

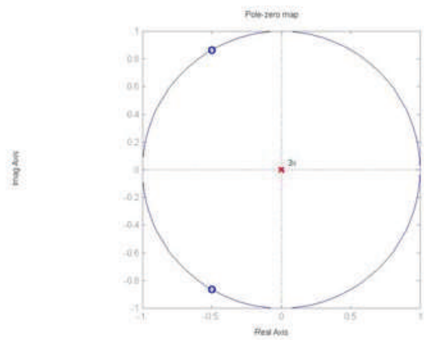
10. Adott az *x(n) = (y(n-1) + y(n-2) + y(n-3))/3* rekurzív kifejezés. Számolja ki a *z*-tartománybeli átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, az amplitúdó-karakterisztikát ____________ között, és adja meg a fázist az *f=0* helyen.

4 pont

$$X(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-3}Y(z)\right) \Rightarrow H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2+z+1}{z^3}.$$

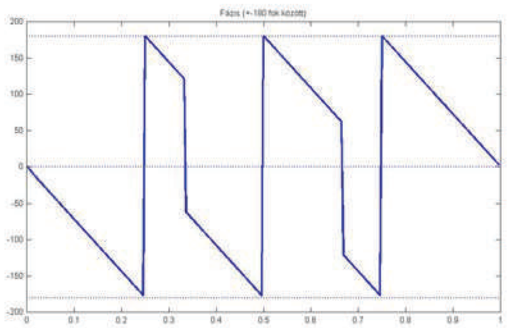
$$H(z) = \frac{1}{3}z^{-2}(z+1+z^{-1}) = e^{-2j2\pi fT}\frac{1}{3}\left(e^{j2\pi fT} + 1 + e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\frac{1}{3}\left(2\cos(2\pi fT)+1\right).$$





A fázis az az *f=0* helyen 0.

A fázismenetet nem volt kötelező felrajzolni:



Σ 22 pont

Megfelelt: 12 ponttól

Elővizsga: 19 ponttól

B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mondja ki precízen az I. mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

2. Egy tranziens jelenség jele $T_r = 3$ ms hosszúságú. A jelenség 4 ms-onként megismétlődik. $f_m = 50$ kHz frekvenciával $N = 600$ mintát veszünk, majd DFT-t hajtunk végre. Hogyan látható a spektrum (a tranziens válasz Fourier-transzformáltja) a kapott eredményben? Lehet-e a frekvenciatartományban interpolálni a spektrumot?

2 pont

Az $N = 600$ minta 50 kHz frekvenciával véve 12 ms hosszúságú regisztrátumot jelent. Ebben pontosan 3 ismétlés van, tehát a DFT eredménye 3-pontonként mintavételezve mutatja a spektrumot. Ezekből a pontokból elvben mindig lehet interpolálni, de csak akkor kapjuk meg az eredeti időfüggvény transzformáltját, ha betartjuk a mintavételi tételt, vagyis az ismételt időfüggvény nem lapolódik át.

3. Egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye $R(\tau) = 4\mathrm{V}^2 e^{-5\mathrm{kHz}|\tau|} + 2\mathrm{V}^2$. Adja meg a következőket:

a) szórás
b) autokovariancia-függvény
c) várható érték

2 pont

a) $\sigma = 2$ V
b) $C(\tau) = 4\mathrm{V}^2 e^{-5\mathrm{kHz}|\tau|}$
c) $\mu = 1{,}41$ V

4. Az X_p sorozat $N = 2048$ pontból áll ($p = 1,2,...,2048$). Ennek a sorozatnak a Matlab `ifft` parancsával kiszámítjuk az inverz DFT-jét. Tudjuk, hogy a sorozatban a $p = 33$ helyen van egy 2^{10} nagyságú impulzus, a $p = 2017$ helyen pedig ugyancsak egy 2^{10} nagyságú impulzus, a többi elem nulla. Számítsuk ki az inverz DFT eredményét.

2 pont

Az inverz DFT-hez k = 0,1,...,2047 indexpontokban kell venni a sorozatot, vagyis át kell indexelnünk: $k = p-1$. Ilyenkor a $k = 32$ és $k = 2016$ pontok egymásnak tükörképei az $N = 2048$ össz-mintaszámot nézve, vagyis az inverz DFT eredménye egy mintavételezett koszinuszfüggvény:

$$x_i = \cos 2\pi \frac{32}{2048} i, \quad i = 0,1,...2047.$$

5. Mekkora a Hamming-ablak (a 0,54-gyel megemelt koszinusszal leírható ablak) oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban? Miért?

2 pont

-20 dB/dekád, mert a széleken ugrás van az ablakfüggvényben.

6. Mire használjuk az átlapolás-gátló szűrőt? Létezik-e ideális (adott frekvencia fölött nulla átvitelű) átlapolás-gátló szűrő, miért?

2 pont

Mintavételezés előtt korlátozzuk a bemeneti jel sávszélességét, hogy a Fourier-transzformáltak átlapolódását megakadályozzuk. Az ideális sávszűrő impulzusválasza nem kauzális, tehát megvalósíthatatlan, bár késleltetés megengedésével tetszőlegesen jól közelíthető.

7. Ha indított átlagolást végzünk, és tudjuk, hogy a zaj $B = 6$ kHz ekvivalens sávszélességű, akkor 48 kHz mintavételi frekvenciával $N = 80$ mintát átlagolva, mennyivel javul a jel/zaj viszony?

2 pont

A mintavételi tételt négyszeresen teljesítjük túl, tehát a variancia 20-ad részére csökken. Ez 13 dB-nek felel meg.

8. Miért használjuk szívesen a háromszög-eloszlású dither-t az audio-technikában?

2 pont

Azért, mert biztosítja a második Sheppard-korrekció teljesülését, vagy másképpen: a kvantálási hiba teljesítménye nem függ a bemenő jeltől.

9. Vezesse le a harmadrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

2 pont

$$x_q = x + n\,,\quad E\{x_q^3\} = E\{(x+n)^3\} = E\{x^3 + 3x^2 n + 3xn^2 + n^3\} = E\{x^3\} + 0 + 3E\{x\}\frac{q^2}{12} + 0$$

$$E\{x^3\} = E\{x_q^3\} - E\{x_q\}\frac{q^2}{4}$$

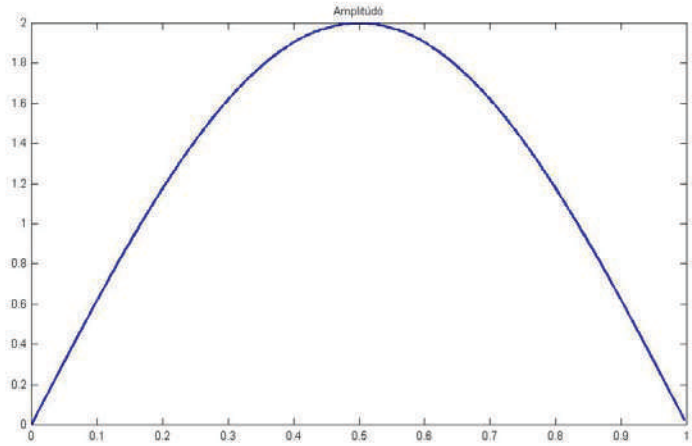
B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B B

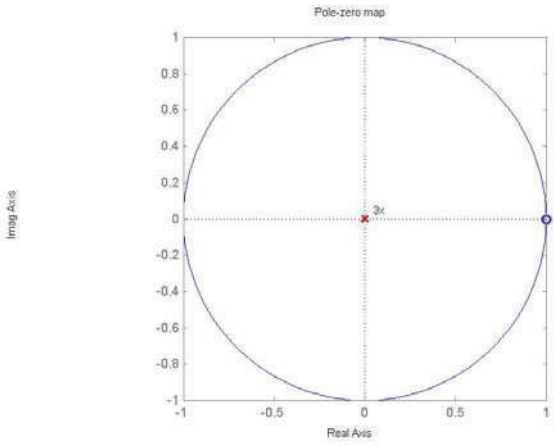
10. Adott az *x(n) = y(n-2) - y(n-3)* rekurzív kifejezés. Számolja ki a *z*-tartománybeli átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, az amplitúdó-karakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között, és adja meg a fázist az *f=0* helyen.

$$X(z) = z^{-2}Y(z) - z^{-3}Y(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = z^{-2} - z^{-3} = \frac{z-1}{z^3}.$$

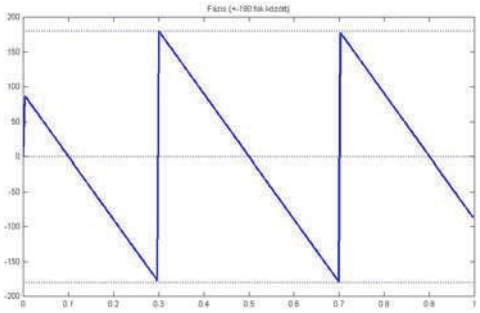
$$H(z) = z^{-2,5}\left(z^{0,5} - z^{-0,5}\right) = e^{-2,5j2\pi fT}\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = e^{-j5\pi fT}\, j2\sin(\pi fT).$$

4 pont





A fázis-ábra nem kötelező, csak a nulla-hely kiértékelése, melynél 90° (π/2) a fázistolás:



4 pont

Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi megoldás

1. Mondja ki precízen a II. mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel időkorlátozott, azaz egy T hosszúságú időintervallumon kívül azonosan 0, akkor Fourier-transzformáltját $\Delta f \le 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti spektrum és az időfüggvény a mintákból helyreállítható).

2. Egy sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye a ±4 ms intervallumon kívül elhanyagolható. Mit mondhatunk arról, hogyan kell mintavételezni a folyamat teljesítmény-sűrűségfüggvényét?

2 pont

$\Delta f \le (1/8)\,\text{kHz}$ távolságokban

3. Írja fel egy 3 magasságú, [-T,T] intervallumban 0-tól különböző négyszög-ablak Fourier-transzformáltját!

2 pont

$W(f) = 6T\text{sinc}(2\pi f T)$

4. Mely k helyeken különbözik 0-tól a DFT értéke, ha egy $\mu = 2.5$ középértékű, 1.7 amplitúdójú, $f_1 = 8$ kHz fekvenciájú koszinuszos jelet $f_m = 32$ kHz frekvenciával N = 512 pontban mintavételezünk, és DFT-nek vetünk alá?

$$\Delta f = \frac{f_m}{N}$$

$k_0=0$

$$k_1 = \frac{f_1}{\Delta f} = N\frac{f_1}{f_m} = 512\frac{8}{32} = 128$$

2 pont

$$k_2 = \frac{f_m - f_1}{\Delta f} = N\frac{f_m - f_1}{f_m} = 512\frac{24}{32} = 384$$

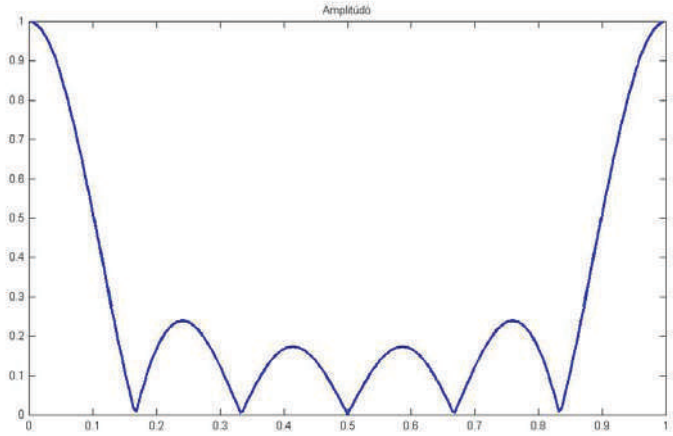
5. Mi a szivárgás, mikor lép fel, és hogyan csökkenthető?

2 pont

A szinuszjel hatása (amplitúdó, teljesítmény) a szinusz frekvenciájától eltérő frekvenciákon is megjelenik.
Akkor lép fel, ha a mintavételezés nem koherens (nem egész számú periódust mértünk).
Ablakfüggvény alkalmazásával csökkenthető.

A A A A A A A A A A A A A

6. Rajzolja fel a mozgó átlagolás (csúszóablakos átlagolás) átviteli függvényének abszolút értékét $N = 6$ átlagolt minta esetén, az ábrán adja meg a fontosabb értékeket, és írja le, melyik betű mit jelent!



2 pont

Első leszívás: 1/T=1/(NΔt), ahol N a minták száma, Δt a mintavételi távolság

7. Mi az a két mennyiség, melyet konstans értéken tartunk egy jel sávkorlátozott fehér zajjal való helyettesítésekor?

2 pont

A variancia (szórásnégyzet), és a kovariancia-teljesítménysűrűség spektrum értéke a 0 helyen.

8. Mi a szinuszos dither két legfontosabb előnye, és mi a hátránya?

2 pont

Előnyök: egyszerű generálás, frekvenciában koncentrált teljesítmény
Hátrány: széles karakterisztikus függvény, nagy amplitúdó kell

9. Vezesse le a másodrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján.

2 pont

$$x_q = x + n\,, \quad E\{x_q^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 0 + \frac{q^2}{12}$$

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

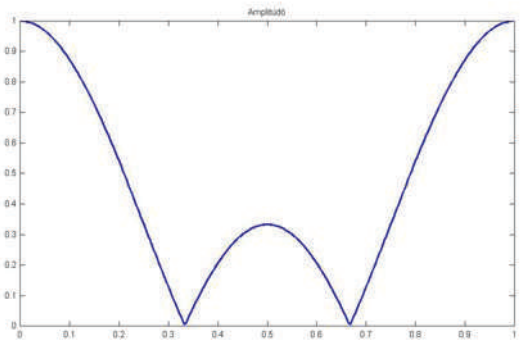
A A A A A A A A A A A A A

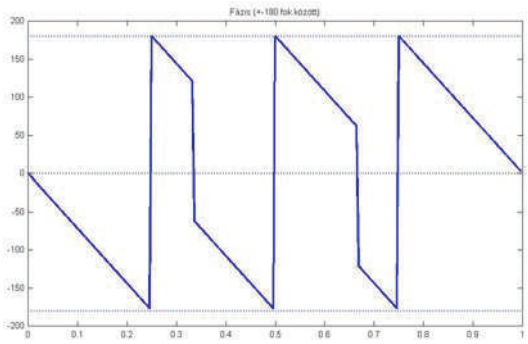
10. Adott az *x(n) = 1/3*(y(n-1) + y(n-2) + y(n-3))* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között.

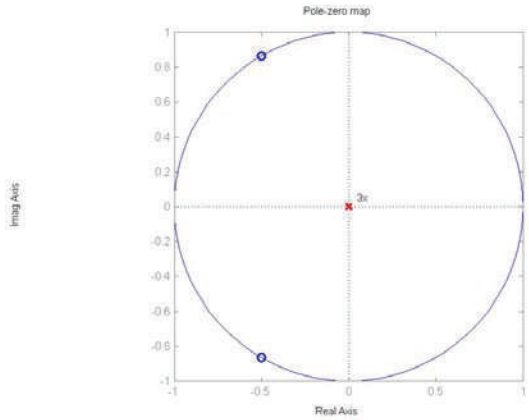
4 pont

$$X(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-3}Y(z)\right) \Rightarrow H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2+z+1}{z^3}.$$

$$H(z) = \frac{1}{3}z^{-2}(z+1+z^{-1}) = e^{-2j2\pi fT}\frac{1}{3}\left(e^{j2\pi fT} + 1 + e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\frac{1}{3}\left(2\cos(2\pi fT)+1\right).$$







Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi megoldás

1. Mondja ki a közelítő mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott B sávkorláttal ($X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$), és időkorlátozott T időkorláttal (egy T hosszúságú szakaszon kívül 0 az időfüggvény), akkor $N = 2BT$ mintával egyértelműen jellemezhető (ezekből a folytonos időfüggvény helyreállítható).

2. Mekkora távolságokban kell a mintavételi tétel értelmében egy $T = 5\ s$ hosszúságú tranziens jel Fourier-transzformáltját kiszámítani, ha nem akarunk információt veszíteni?

2 pont

$\Delta f \leq (1/5)Hz$ távolságokban

3. Írja fel egy 5 magasságú, [T,4T] intervallumban 0-tól különböző négyszög-ablak Fourier-transzformáltját!

2 pont

$15T\mathrm{sinc}(3\pi fT)$

4. Mely k helyeken különbözik 0-tól a DFT értéke, ha egy $\mu = 2.5$ középértékű, 4.7 amplitúdójú, $f_0 = 11$ kHz fekvenciájú koszinuszos jelet $f_m = 5{,}5$ kHz frekvenciával N = 256 pontban mintavételezünk, és DFT-nek vetünk alá?

2 pont

Alulmintavételezés: csak a $k=0$ helyen

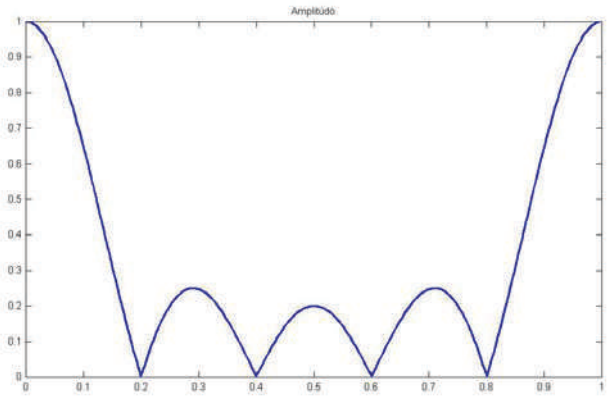
5. Mi az a léckerítés-hatás, mikor lép fel, és miért baj, hogy fellép?

2 pont

Másnéven picket fence hatás: Akkor lép fel, ha a mintavételezés nem koherens (nem egész számú periódust mértünk). A leolvasott szinusz-amplitúdó az ablakfüggvény mintavételezése miatt nem egyezik az elvileg várt maximum-értékkel. A szinusz amplitúdója a maximum mérésével nem állapítható meg.

BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB

6. Rajzolja fel az indított átlagolás (additív zajszűrés) átviteli függvényének abszolút értékét $N = 5$ átlagolt periódus esetén, az ábrán adja meg a fontosabb értékeket, és írja le, melyik betű mit jelent!



2 pont

Első leszívás: 1/(NT), ahol N a minták száma, T a periódusidő

7. A szorzás a Fourier-transzformált tartományban konvolúciónak felel meg. Miért *korreláció* a periodogram időtartománybeli megfelelője, és nem *konvolúció*?

2 pont

A periodogramban az egyik Fourier-transzformált komplex konjugáltját vesszük, ezzel az ennek megfelelő időfüggvény megfordul.

8. Használható-e a négyszögjel ditherként?

2 pont

Nem, mert a karakterisztikus függvény nem sávkorlátozott.

9. Vezesse le a harmadrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján.

2 pont

$$x_q = x + n\,,\quad E\{x_q^3\} = E\{(x+n)^3\} = E\{x^3 + 3x^2 n + 3xn^2 + n^3\} = E\{x^3\} + 0 + 3E\{x\}\frac{q^2}{12} + 0$$

$$E\{x^3\} = E\{x_q^3\} - E\{x_q\}\frac{q^2}{4}$$

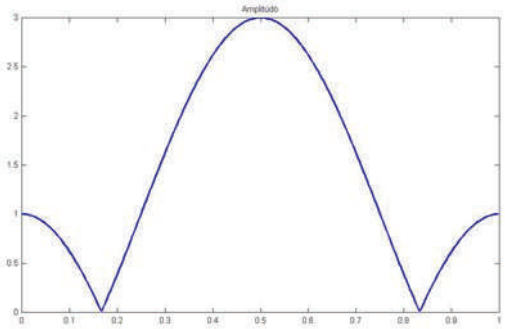
10. Adott az *x(n) = y(n-1) - y(n-2) + y(n-3)* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között.

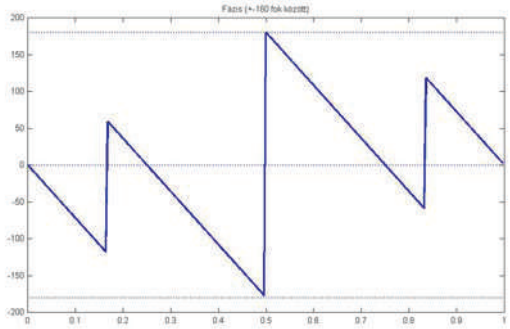
4 pont

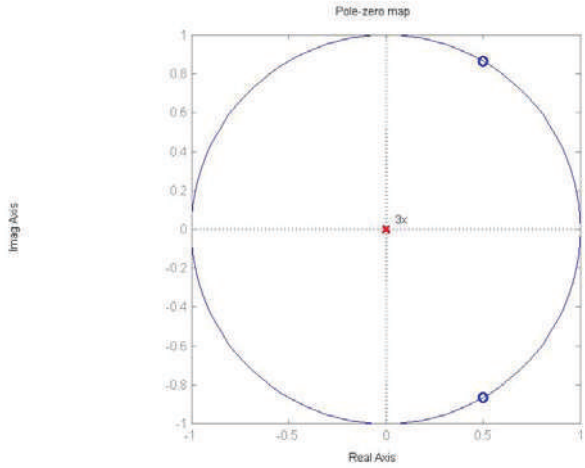
$$X(z) = z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) + z^{-3}Y(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^2 - z + 1}{z^3}.$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

$$H(z) = z^{-2}(z - 1 + z^{-1}) = e^{-2j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT} - 1 + e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\left(2\cos(2\pi fT) - 1\right).$$







Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

Név: . . . . Aláírás: . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi

1. Mondja ki precízen az I. mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

2. Egy jelet a [3,5 ms - 5 ms] tartományon rögzítünk. Mekkora távolságokban kell kiszámítani a Fourier-transzformáltat, hogy lényegében ne veszítsünk információt? Mennyi minta kell a frekvenciatartományban ahhoz, hogy elvileg se veszítsünk információt?

2 pont

T = 1,5 ms, ezért a szükséges minimális mintavételi távolság a frekvenciatartományban $1/T \approx 667$ Hz. Elvileg végtelen sok minta kellene.

3. Írja fel egy $\sigma = 3$ V szórású, B = 2 kHz sávszélességű sávkorlátozott fehér zaj és egy $\mu = 0{,}5$ V értékű konstans összegének autokovariancia-függvényét, helyes mértékegységekkel!

2 pont

$$\sigma^2 \mathrm{sinc}(2\pi \mathrm{B t}) = 9 \mathrm{sinc}(2\pi\, 2\mathrm{t[ms]})\, \mathrm{V}^2$$

4. Mekkora a DFT pontos értéke a $k = 0$, $k = 32$ illetve a $k = 64$ helyeken, ha az $1.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t) + 2$ jelet $f_m = 4$ kHz frekvenciával N = 256 pontban mintavételezzük, és DFT-nek vetünk alá?

2 pont

$k = 0$: $2N = 512$

$k = 32$ 0

$k = 64$ $-j\dfrac{A}{2}N = -j192$

5. Mekkora a Hann-ablak oldalhullámainak csökkenési sebessége dB/dekád-ban? Miért?

2 pont

60 dB/dekád, mert az ablakfüggvény a szélein a tengelyhez simul: sem a függvényben, sem a deriváltjában nincs a szélén ugrás, a második deriváltban viszont van.

6. Mi annak a feltétele (matematikai kifejezés), hogy a $T = 4$ µs periódusidejű jelet additív zajszűrésnek alávetve az eredmény varianciája az átlagolt periódusok számával fordítottan arányosan csökkenjen?

2 pont

A zajból T távolságban vett mintáknak korrelálatlanoknak kell lenniük, vagyis a zaj sávszélességére $B > 1/(2T)$ =125 kHz.

C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

7. B = 6 kHz sávszélességű zajból 25 kHz mintavételi frekvenciával N = 1024 mintát veszünk, és átlagoljuk őket. Milyen arányban csökken a szórás egy minta szórásához képest?

A mintavételi tételt túlteljesítjük, ezért a folytonos jelre vonatkozó kifejezést kell használnunk:

2 pont $$\sigma_{\text{átl}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2BT}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2BN / f_{\text{m}}}} \approx \frac{\sigma}{22{,}2}.$$

8. Milyen tulajdonságúnak kell lennie a dithernek, hogy segítségével a II. kvantálási tételt teljesítsük a kvantáló bemenetén?

2 pont

Karakterisztikus függvényének sávkorlátozottnak kell lennie $\pm\frac{2\pi}{q} - \varepsilon$ között.

9. Vezesse le az elsőrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján!

2 pont

$$x_q = x + n,$$
$$E\{x_q\} = E\{x + n\} = E\{x\}$$
$$E\{x\} = E\{x_q\}$$

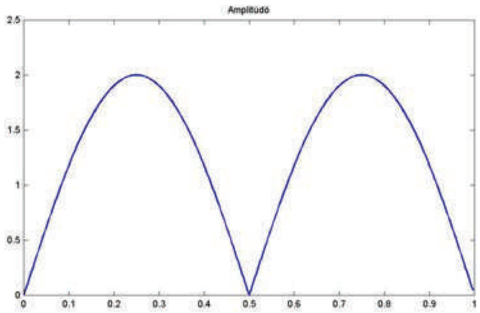
C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C

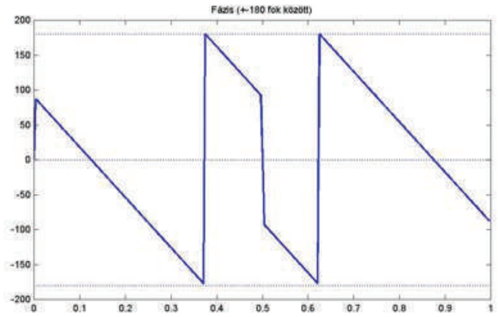
10. Adott az *x(n) = y(n-1) - y(n-3)* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között.

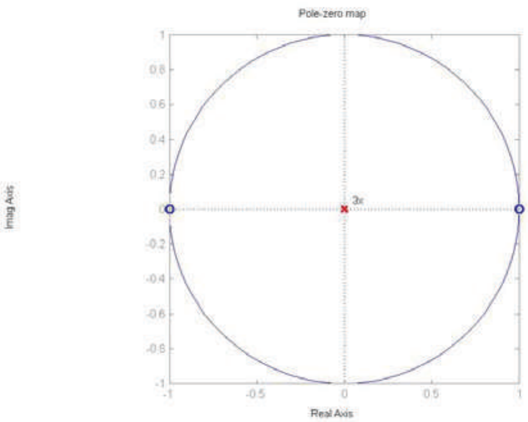
$$X(z) = z^{-1}Y(z) - z^{-3}Y(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = z^{-1} - z^{-3} = \frac{z^2 - 1}{z^3}.$$

$$H(z) = z^{-2}\left(z^{1} - z^{-1}\right) = e^{-2j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\, j2\sin\left(2\pi fT\right).$$

4 pont







Σ 22 pont

Megfelelt:
12 ponttól

Elővizsga:
19 ponttól

A A A A A A A A A A A A A

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi megoldás

1. Mondja ki precízen az I. mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott, azaz Fourier transzformáltjára igaz az, hogy $X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti időfüggvény a mintákból helyreállítható).

2. Egy ω_1 körfrekvenciájú szinuszos jelet hogyan kell mintavételezni a mintavételi tétel értelmében? Mi történik akkor, ha $f_m=\omega_1/(2\pi)$ frekvenciával mintavételezzük a jelet?

2 pont

$$f_m > 2\frac{\omega_1}{2\pi}$$

$f_m=\omega_1/(2\pi)$ frekvenciával mintavételezve konstanst kapunk.

3. Írja fel az inverz DFT képletét, és adja meg, hogy az indexek mettől-meddig mennek.

2 pont

$$x_i = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi\frac{ki}{N}}, \quad i = 0,1,...,N-1$$

4. Mekkora a DFT értéke a $k = 0$ helyen, ha egy $\mu = 1.5$ középértékű, 2.7 amplitúdójú, $f_0 = 3$ kHz frekvenciájú koszinuszos jelet $f_m = 12$ kHz frekvenciával N = 512 pontban mintavételezünk, és DFT-nek vetünk alá?

2 pont

A mintavételezés koherens, mert $f_0 = \frac{f_m}{4} = 128\frac{f_m}{512}$. Ezért nincs szivárgás, és $X(0) = N\mu = 768$.

5. Mekkora a szinuszjel DFT-jében az előforduló maximális amplitúdóhiba és mikor lép fel? Hogyan tudjuk javítani az eredményt?

2 pont

Az egyszerű (ablak nélküli) DFT a sinc függvény mintáit tartalmazza. Koherens mintavételnél ezek a minták a $\frac{\sin x}{x}$ függvény $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ helyein vannak. A legnagyobb a hiba, ha a függvény $\pi/2$ értékkel eltolva van mintavételezve. A relatív hiba ilyenkor $1 - \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.36$.

A hibát ablakfüggvény alkalmazásával csökkenthetjük.

6. A mintavételező oszcilloszkópnál (ekvivalens mintavételezés) betartjuk-e a mintavételi tételt? Milyen feltétellel használható az eredmény (frekvenciatartománybeli magyarázat!) és miért?

2 pont Nem tartjuk be (periódusonként kevesebb, mint 1 minta!). Ha a mintavételi frekvencia csak egy picivel nagyobb az alapharmonikusnál, akkor a betranszformálódó felharmonikusok ugyanolyan sorrendben jelennek meg a spektrumban, mint az eredeti jelben (csak éppen letranszformálódott frekvenciákon).

7. Mi egy jel ekvivalens zajsávszélességének kifejezése? Mit jelent?

2 pont

$$B_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_c(f)df}{2S_c(0)}$$

Annak a sávkorlátozott fehér zajnak a sávszélessége, melynek ugyanakkora a varianciája, mint a bemenő jelnek, és azonos hosszúságú átlagolással ugyanannyira csökken az átlagérték varianciája.

8. A kvantálási tétel alapján mekkora az a kvantumnagyság, ami biztosítja, hogy egy kb. ±1 V-os négyszögjelet ±2,5 V tartományban kvantálva a jel momentumait pontosan helyre tudjuk állítani?

2 pont A karakterisztikus függvény nem sávkorlátozott (koszinusz), ezért elvben csak $q = 0$.

9. Vezesse le a másodrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján.

2 pont

$$x_q = x + n\,,\quad E\{x_q^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 0 + \frac{q^2}{12}$$

$$E\{x^2\} = E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}$$

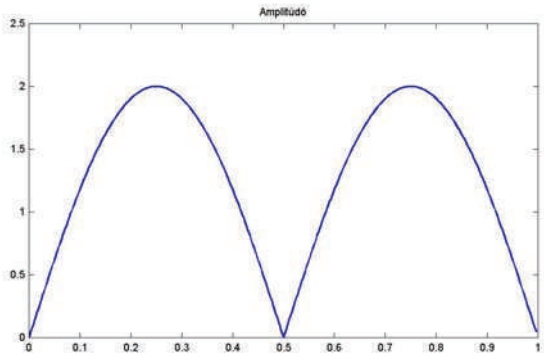
A A A A A A A A A A A A A

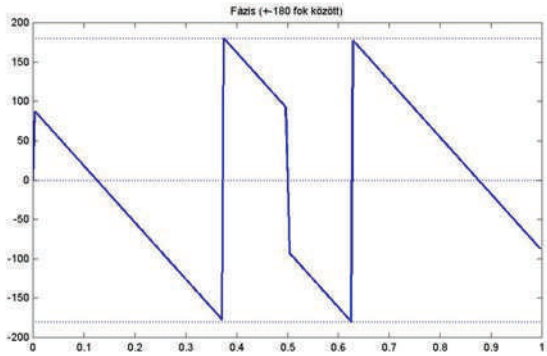
10. Adott az *x(n) = y(n-1) - y(n-3)* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között.

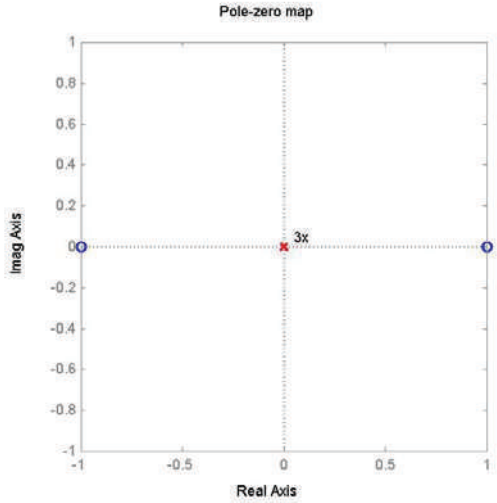
$$X(z) = z^{-1}Y(z) - z^{-3}Y(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = z^{-1} - z^{-3} = \frac{z^2 - 1}{z^3}.$$

$$H(z) = z^{-2}(z - z^{-1}) = e^{-2j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\, 2j\sin(2\pi fT).$$

4 pont







BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás zárthelyi megoldás

1. Mondja ki a közelítő mintavételi tételt.

2 pont

Ha egy jel sávkorlátozott B sávkorláttal ($X(f) = 0$ ha $|f| \geq B$), és időkorlátozott T időkorláttal (egy T hosszúságú szakaszon kívül 0 az időfüggvény), akkor $N = 2BT$ mintával egyértelműen jellemezhető (ezekből a folytonos időfüggvény helyreállítható).

2. Az I. mintavételi tétel betartása esetén hogyan állítható vissza a mintákból a folytonos időfüggvény valamelyik pontban (képlet)?

2 pont

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{t - i\Delta t}}{\Delta \mathrm{t}}\pi\right)$$

3. Írja fel a DFT képletét, és adja meg, hogy az indexek mettől-meddig mennek.

2 pont

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi\frac{ki}{N}}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

4. Ismeretlen frekvenciájú szinuszjelet mintavételezünk, és kiszámítjuk a DFT-t. Mikor lehet a maximális abszolút értékű spektrummintából pontosan kiszámítani az amplitúdót, és hogyan?

2 pont

Ha a mintavételezés koherens. $A = \dfrac{2|X_k|}{N}$

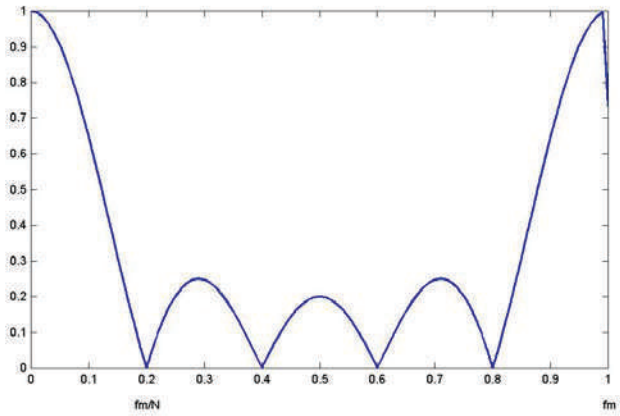
5. Mi az a szivárgás, mikor lép fel, és miért baj, hogy fellép?

2 pont

A szinuszjel teljesítménye a szinusz frekvenciájától eltérő frekvenciákon is megjelenik. Akkor lép fel, ha a mintavételezés nem koherens (nem egész számú periódust mértünk). Mert a szivárgó teljesítmény elfedhet egyébként jelen lévő kis teljesítményű szinuszokat.

6. Rajzolja fel az indított átlagolás (additív zajszűrés) átviteli függvényének abszolút értékét $N = 5$ átlagolt periódus esetén, és az ábrán adja meg a fontosabb értékeket.

2 pont



7. Miért hívják a cirkuláris korrelációt cirkulárisnak?

2 pont

Azért, mert a sorozat úgy korrelálódik mintha az egyik sorozat eltolásakor a kilépő minták „cirkulárisan” visszalépnének a másik oldalon.

8. Milyen értelemben hasonlít egymásra a dither és az átlapolásgátló szűrő hatása?

Az átlapolásgátló szűrő a jel spektrumának szélességét korlátozza. A dither a karakterisztikus függvény szélességét korlátozza.

2 pont

$$X'(f) = H(f)X(f), \quad S'(f) = |H(f)|^2 S(f)$$

$$\Phi'(u) = \Phi_{\mathrm{d}}(u)\Phi(u)$$

9. Vezesse le a harmadrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján.

2 pont

$$x_q = x + n, \quad E\{x_q^3\} = E\{(x+n)^3\} = E\{x^3 + 3x^2 n + 3xn^2 + n^3\} = E\{x^3\} + 0 + 3E\{x\}\frac{q^2}{12} + 0$$

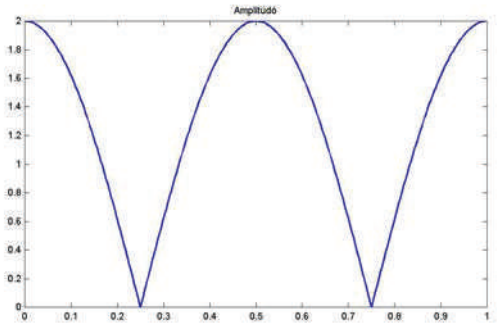
$$E\{x^3\} = E\{x_q^3\} - E\{x_q\}\frac{q^2}{4}$$

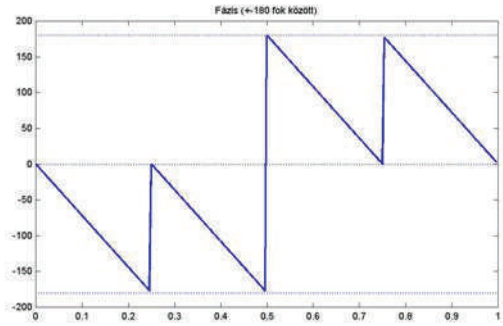
10. Adott az *x(n) = y(n-1) + y(n-3)* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f / f_m = [0,1]$ között.

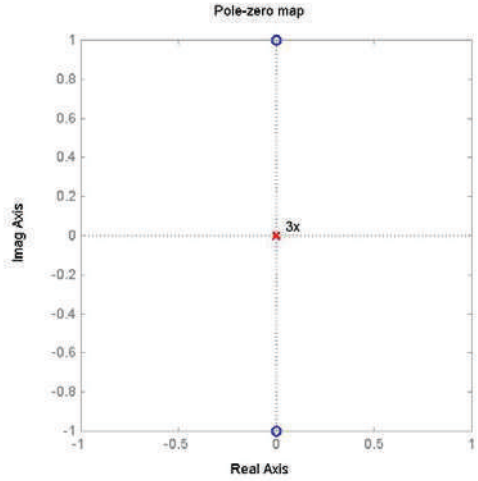
4 pont

$$X(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-3}Y(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = z^{-1} + z^{-3} = \frac{z^2+1}{z^3}.$$

$$H(z) = z^{-2}(z + z^{-1}) = e^{-2j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}\right) = e^{-2j2\pi fT}\, 2\cos(2\pi fT).$$







C C C C C C C C C C C C C

Név: . . . . . Aláírás: . . . . . .

Digitális jelfeldolgozás pótzárthelyi megoldások

1. Mondja ki precízen a II. mintavételi tételt.

2 pont Ha egy jel időkorlátozott, azaz egy T hosszúságú időintervallumon kívül azonosan 0, akkor Fourier-transzformáltját (amplitúdó-spektrumát) $\Delta f \le 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt, (vagyis az eredeti spektrum a mintákból helyreállítható).

2. Hány minta kell egy *B* sávkorlátú, *T* időkorlátú jelből ahhoz, hogy gyakorlatilag ne veszítsünk információt, ha a mintavételezési frekvencia $f_m = 4B$?

2 pont $$N = \frac{T}{\Delta t} = Tf_m = 4BT.$$

3. Írja fel az auto-teljesítménysűrűség-spektrumot becslő diszkrét periodogram képletét. Milyen feltételek mellett lehet ez a periodogram negatív? Lehet-e komplex?

2 pont $$\hat{S}(k) = \frac{1}{N}\left|X_k\right|^2$$

Nem lehet sem negatív, sem komplex.

4. Mekkora a DFT értéke a $k = 128$ helyen, ha egy $\mu = 1.5$ középértékű, 2.5 amplitúdójú, $f_0 = 6$ kHz frekvenciájú koszinuszos jelet $f_m = 24$ kHz frekvenciával N = 512 pontban mintavételezünk, és DFT-nek vetünk alá?

2 pont A mintavételezés koherens, mert $f_0 = \frac{f_m}{4} = 128\frac{f_m}{512}$. Ezért nincs szivárgás, és éppen a kérdéses pont éppen a csúcsnál van:

$$X(128) = N\frac{A}{2} = 640.$$

5. Mi az a picket fence („léckerítés”) hatás? Hogyan tudjuk javítani az eredményt?

2 pont A DFT-ben az ablakfüggvény mintái jelennek meg, ezért a maximális érték attól függ, hogyan találjuk el az ablakfüggvény közepét. Az összes ablak, de különösen a Flat Top ablak csökkenti az ebből származó hibát.

6. Mekkora a periodogram varianciája *A* amplitúdójú szinuszos jel esetén, ha koherens mintavételt alkalmazunk?

2 pont Koherens mintavétel esetén a periodogram összes pontjának varianciája 0.

7. Mire való a dither?

2 pont Kvantálás előtt a jelhez adva segíti a jel+ditherre a kvantálási tétel feltételének teljesítését.

C C C C C C C C C C C C C

8. Rajzolja fel a mozgó átlagolás blokkvázlatát, és írja fel a rekurzív kifejezést.

2 pont **ÁBRA**

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N}\big(y(n) - y(n-N)\big)$$

9. Vezesse le a negyedrendű Sheppard-korrekció kifejezését a zajmodell alapján, annak felhasználásával, hogy $E\{n^4\} = q^4/80$.

$x_q = x + n$,

2 pont

$$E\{x_q^4\} = E\{(x+n)^4\} = E\{x^4 + 4x^3n + 6x^2n^2 + 4xn^3 + n^4\} = E\{x^4\} + 6E\{x^2\}\frac{q^2}{12} + \frac{q^4}{80}$$

$$E\{x^4\} = E\{x_q^4\} - 6E\{x^2\}\frac{q^2}{12} - \frac{q^4}{80} = E\{x_q^4\} - 6\left(E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12}\right)\frac{q^2}{12} - \frac{q^4}{80}$$

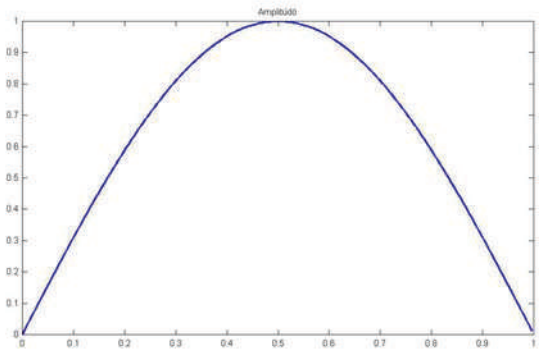
$$= E\{x_q^4\} - E\{x_q^2\}\frac{q^2}{2} + \frac{7q^4}{240}.$$

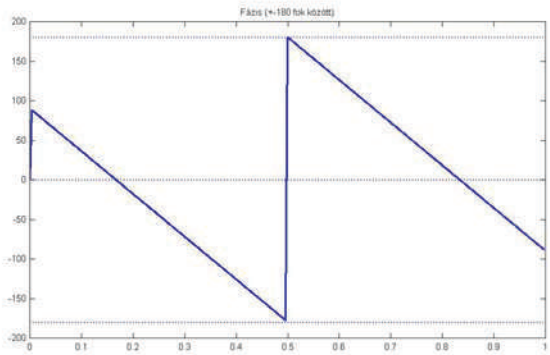
10. Adott az *x(n) = (y(n-1) - y(n-2))/2* rekurzív kifejezés. Adja meg az átviteli függvényt, rajzolja fel a pólus-zérus képet, továbbá az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát $f/f_m = [0,1]$ között.

$$X(z) = \frac{z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z)}{2} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{2} = \frac{z-1}{2z^2}.$$

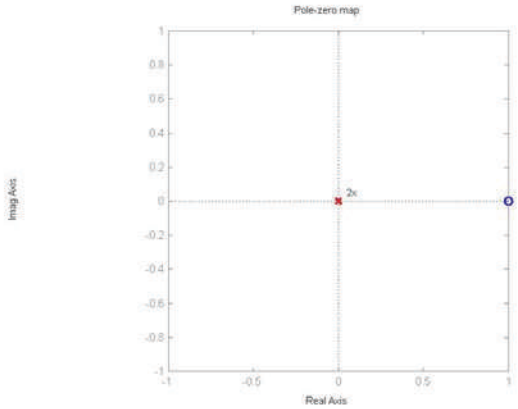
4 pont

$$H(z) = z^{-1,5}\frac{(z^{0,5} - z^{-0,5})}{2} = e^{-1.5j2\pi fT}\frac{\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)}{2} = e^{-1,5j2\pi fT}\, j\sin(\pi fT).$$





C C C C C C C C C C C C C



Σ 22 pont