

Sztoczasztika
MintaZH, 2013. ősz
A csoport

- Dobálunk egy szabályos hatoldalú dobókockát addig, amíg kijön az első 1-es. Jelölje X az ezt megelőzően kijött 6-osok számát.
 - Határozzuk meg X eloszlását. $\mathbb{E}X = ?$
 - Jelölje Y azt, hogy hányadik dobásra jött ki az 1-es. Határozzuk meg X feltételes eloszlását azon feltétel mellett, hogy $Y = k$. $\mathbb{E}(X|Y = k) = ?$
- A sarki kisboltban percenként átlagosan két vevő fordul meg. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 3 perces intervallumban nem jön egy vevő sem, viszont utána 3 percen belül legalább 3 vevő érkezik?
- Egy baktériumtenyészet kezdetben egyetlen baktériumból áll. A baktériummal minden perc végén három dolog valamelyike történik: $1/4$ valószínűséggel elpusztul, $1/2$ valószínűséggel kettéosztódik, és $1/4$ valószínűséggel megmarad, de kettéosztódás nélkül. A kettéosztódás eredményeként létrejövő baktériumok ugyanilyen szabály szerint, a többi baktériumtól függetlenül viselkednek a továbbiakban.
 - Várhatóan hány baktériumból áll a tenyészet 15 perc múltán?
 - Mekkora a valószínűsége, hogy a tenyészet kipusztul?

B csoport

- Az Aranylábúak SE minden meccsén 0, 1 vagy 2 gólt szerez (egyforma valószínűséggel), és ettől függetlenül 0, 1 vagy 2 gólt kap (ugyancsak egyforma valószínűséggel). Számoljuk ki annak a feltételes valószínűségét, hogy egy adott meccsükön 2 gólt rúgnak, feltéve, hogy megnyerik a meccset.
- Egy játékban el kell jutni a célba egy bábuval. A játékos minden körben dob egy szabályos hatoldalú kockával; ha 1, 2, 3 vagy 4-est dob, akkor közelebb lép a célhoz 1 mezővel, ha 5-öst dob, nem lép, ha 6-ost dob, vissza kell lépnie 1 mezőt. Jelölje X_1 azt, hogy hány dobásra van szüksége ahhoz, hogy célba érjen, ha most éppen 1 mezőre áll a céltól. Adjuk meg X_1 generátorfüggvényét (tipp: használjunk teljes várható érték tételt). Jelölje X_n azt, hogy hány dobásra van szükség, ha n mezőre áll a céltól. Fejezzük ki X_n generátorfüggvényét X_1 generátorfüggvényének segítségével.
- Egy populációnak kezdetben egyetlen tagja fertőzött egy betegséggel. Mielőtt meggyógyul, megfertőz véletlen számú további tagot, melynek eloszlása p paraméterű pesszimista geometriai.
 - Modellezzük a betegség terjedését elágazó folyamattal! Mekkora a valószínűsége, hogy az első beteg által megfertőzött tagok már nem fertőznek tovább senkit (azaz a második generáció üres)?
 - Várhatóan hány tagot számlál az első 3 generáció *összesen*?
 - Határozzuk meg a járvány valószínűségét p függvényében (járványról beszélünk, ha a megfelelő elágazó folyamat soha nem hal ki).