ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT II. rész** **1999. január 12.**

Műszaki Informatika szak Munkaidő: 60 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. Feladat (12 pont)

Bizonyítsa be, hogy a harmonikus sor divergens!

2. Feladat (14 pont)

Az általunk tanult módon vezesse le

$$\mathrm{e}^x, \qquad a^x, \qquad \ln x, \qquad \log_a x$$

deriváltját!

3. Feladat (20 pont)

Mondja ki Weierstrass I. és II. tételét! Az utóbbit bizonyítsa be!

4. Feladat (26 pont)

Adjon egy elégséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható függvény esetére! Bizonyítsa be! (A szükséges részt is!)

5. Feladat (28 pont)

Mit értünk alsó ill. felső integrálközelítő-összegen? Milyen tulajdonságait ismeri? (Bizonyíthat is.) Adja meg a Riemann integrálhatóság definícióját! Mutasson példát (indoklással!)

– korlátos, de nem integrálható függvényre

– olyan integrálható függvényre, melynek nincs primitív függvénye.

6. Feladat (22 pont)

a) Mutassa meg, hogy az $a_n = \sqrt[n]{n}, \quad n > 3$ sorozat szigorúan monoton csökkenő!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$\alpha.)$ $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}$ $\qquad$ $\beta.)$ $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}\,\frac{1}{n}$

a) Mikor mondjuk, hogy $|a_n| = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$? Igaz-e az alábbi állítás?

$$|a_n| = \Theta\left(\tfrac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ divergens}$$