Villamosmérnök A3X (2018 tavasz) 1. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' - y\cos x = 2xe^{\sin x}$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Elsőrendű függvényegyütthatós lineáris.
(1) Homogén általános megoldása. $\frac{dy}{dx} = y\cos x \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx \rightsquigarrow \ln|y| = \sin x + c \rightsquigarrow$ $|y| = c_1 e^{\sin x}$, $c_1 > 0$, amiből a Bolzano-tétel miatt $y_{ha} = ce^{\sin x}$, $c \neq 0$. De $y \equiv 0$ szinguláris megoldás, tehát $y_{ha} = ce^{\sin x}$, $c \in \mathbb{R}$.
(2) Inhomogén partikuláris megoldása állandók variálásával. $y(x) = c(x)e^{\sin x}$, visszahelyettesítve $2xe^{\sin x} = y' - y\cos x = c'(x)e^{\sin x} + c(x)e^{\sin x}\cos x - c(x)e^{\sin x}\cos x = c'(x)e^{\sin x} \rightsquigarrow$ $c'(x) = 2x \rightsquigarrow c(x) = x^2$. Tehát $y_{ip} = x^2 e^{\sin x}$, és így az inhomogén általános megoldása $y_{ia} = (c + x^2)e^{\sin x}$.
VAGY: Egzaktra visszavezethető: $P(x, y) + Q(x, y)y' = y\cos x + 2xe^{\sin x} - 1y' = 0$ nem egzakt, mert $P_y = \cos x \neq 0 = Q_x$; de $\frac{P_y - Q_x}{Q} = -\cos x$, és így $e^{\int -\cos x\, dx} = e^{-\sin x}$-el végigszorozva $M(x, y) + N(x, y)y' = y\cos xe^{-\sin x} + 2x - e^{-\sin x}y' = 0$ már egzakt, mert $M_y = \cos xe^{-\sin x} = N_x$.

Kell $u(x, y)$, amire $u_x = M$, $u_y = N$. Az első miatt $u(x, y) = \int y\cos xe^{-\sin x} + 2x\, dx = x^2 - ye^{-\sin x} + c(y)$, amiből a második miatt $c'(y) = 0$, azaz $c(y) = c$. Így az implicit megoldás $c = u(x, y) = x^2 - ye^{-\sin x}$, amiből $y = (x^2 - c)e^{\sin x}$.

2. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ differenciálegyenletet Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül!

Megoldásvázlat. (1) Homogén általános megoldása. Karakterisztikus egyenlet: $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$-nek $\lambda = 2$ kétszeres gyöke, ezért $y_{ha} = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$.
(2) Inhomogén partikuláris megoldása. $e^{2x} = e^{2x}(0\cos 0x + 0\sin 0x)$ és 2 kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért y_{ip}-t Px^2e^{2x} $(P \in \mathbb{R})$ alakban kereshetjük. $y' = Pe^{2x}(2x + 2x^2)$, $y'' = Pe^{2x}(2 + 8x + 4x^2)$, visszahelyettesítve $e^{2x} = Pe^{2x}(2 + 8x + 4x^2 - 8x - 8x^2 + 4x^2) = 2Pe^{2x}$, vagyis $P = 1/2$, azaz $y_{ip} = x^2e^{2x}/2$ és így $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x}/2$.

3. Oldja meg az $y'' + y = \cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

Megoldásvázlat. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformálva $\frac{s}{s^2+1} = s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = (s^2 + 1)Y - s - 2 \rightsquigarrow Y = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{s+2}{s^2+1}$, amiből inverz Laplace-transzformációval $y(t) = \frac{1}{2}t\sin t + \cos t + 2\sin t$.

4. Számítsa ki az $r(t) = (5\sin t, 5\cos t, 12t)$, $t \in [0, 4\pi]$ egyenletű görbe hosszát!

Megoldásvázlat. $|L| = \int_0^{4\pi} |\dot{r}(t)|\, dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{5^2 + 12^2}\, dt = 52\pi$.

5. Számítsa ki a $v(x, y) = (x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + y)$ vektorfüggvény vonalintegrálját az origó középpontú, R sugarú, pozitívan irányított körvonalon!

Megoldásvázlat. A körvonal egyenlete $r(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, amiből $\dot{r}(t) = R(-\sin t, \cos t)$, és így

$$\int_K v\, dr = \int_0^{2\pi} v(r(t))\dot{r}(t)\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - \sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t + \sin t)(-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\, dt = R^2 2\pi\sqrt{3}$$

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \mathfrak{L}\left\{g(t)\right\}(s - a)$, ahol $\mathfrak{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ jelöli az f függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldásvázlat. $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{at}g(t)e^{-st}\, dt = \int_0^\infty g(t)e^{-(s-a)t}\, dt = \mathfrak{L}\left\{g(t)\right\}(s - a)$.