Rendszeroptimalizálás

Vigovszky Dániel

2009-01-11

Megjegyzések

- A 14. tételben az orákulumok közti kapcsolatra hiányzik a bizonyíték
- Steiner-fa visszavezetését metrikus Steiner-fára lehet hogy bele kéne rakni...

Tartalomjegyzék

1. tétel

1.1. Az optimális hozzárendelés problémája

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban keresünk teljes párosítást úgy, hogy az M teljes párosításra az élek összsúlya, $\sum_{e \in M} w(e)$ maximális legyen.

1.2. Egerváry algoritmusa

1.2.1. Címkézés

Rendeljünk $G = (A, B; E)$ gráfban $\forall v$ csúcshoz egy $c(v) \in \mathbb{R}$ címkét úgy, hogy $\forall e = \{x, y\}$-ra $c(x) + c(y) \geq w(e)$ teljesüljön.

Azokat az éleket, ahol egyenlőséggel teljesül: $c(x) + c(y) = w(e)$, piros élnek nevezzük.

1.2.2. Algoritmus

1. $M = \varnothing$ és
$$c(v) = \begin{cases} \max_{y \in B, \{v,y\} \in E} w(\{v, y\}) & \text{ha } v \in A \\ 0 & \text{ha } v \in B \end{cases}$$

2. M-ből kiindulva keresünk maximális elemszámú M' párosítást javító utakkal a *piros részgráfban.* Ha M' teljes, akkor készen vagyunk.

3. Legyen U az M által le nem fedett A-beli pontok halmaza, T' az U-ból piros részgráfon alternáló úttal elérhető B-beli pontok halmaza és T a T' pontok M' párosítás szerinti párjai. Ekkor
$$\delta = \min\{c(x) + c(y) - w(\{x, y\} | \{x, y\} \in E, x \in T \cup U, y \in B - T'\}$$
és az új címkézés:
$$c'(v) = \begin{cases} c(v) - \delta & \text{ha } v \in T \cup U \\ c(v) + \delta & \text{ha } v \in T' \\ c(v) & \text{különben} \end{cases}$$
Ezzel folytatjuk az előző lépéstől.

1.3. Lineáris Programozás alapfeladata

A lineáris programozás alapfeladata:
$$\max\{cx : Ax \leq b\}$$

1.4. Kétváltozós feladat grafikus megoldása

Kétváltozós esetben az egyenlőtlenségek félsíkokat határoznak meg, és az eredmény ezen félsíkok metszetén található. A $c_1x_1 + c_2x_2$ feltételből kifejezünk egy egyenest, amelynek egy s paramétere határozza meg az egyenes pozícióját (meredeksége pedig fix). Az s paramétert változtatva az egyenes és a sokszög valamely metszéspontjában lesz a megoldás, az erős bázismegoldásokra vonatkozó tétel miatt pedig pontosan a sokszög egy csúcspontjában.

2. tétel

2.1. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval

Az $(A|b)$ mátrixon végzünk műveleteket, és minden lépésben egyel csökkentjük a változók számát. Először a sorok pozitív számmal való szorzásával elérjük, hogy az első oszlopban csak $1, -1, 0$ értékek szerepeljenek. Ekkor legyen I az 1-el kezdődő sorok halmaza, J a -1-el kezdődőeké és K a 0-val kezdődőeké.

Ha $J = \varnothing$ akkor a feladat visszavezethető $(A_0|b_0)$ $n-1$ változós esetre, ha x első komponensét a

$$\lambda = \min_{i \in I} (b(i) - \bar{a}^i \bar{x})$$

Ha $I = \varnothing$ akkor hasonlóan az előzőekhez,

$$\lambda = \max_{j \in J} (\bar{a}^j \bar{x} - b(j))$$

választással a feladat visszavezethető az $n-1$ változós esetre.

Különben $\forall i \in i, j \in J$ sort páronként összeadva az eredeti sorokat elhagyva és K sorokat megtartva, az első oszlopot elhagyva megkapjuk a redukált esetet.

Az egyváltozós eset megoldhatósága:

- Ha $\exists k \in K$ amire $b(k) < 0$, akkor nem megoldható
- Különben K sorai elhagyhatók
- I és J sorokból a megoldhatóság könnyen eldönthető

2.2. Farkas-lemma

2.2.1. 1. alak

Tetszőleges A és b esetén az alábbiak közül pontosan egynek van megoldása:

1. $Ax \leq b$
2. $yA = 0, y \geq 0, yb < 0$

2.2.2. 2. alak

Tetszőleges A és b esetén az alábbiak közül pontosan egynek van megoldása:

1. $Ax = b, x \geq 0$
2. $yA \geq 0, yb < 0$

3. tétel

3.1. A LP célfüggvény felülről korlátosságának feltételei

Ha $Ax \leq b$ megoldható, az alábbi három állítás ekvivalens:

1. $Ax \leq b$ megoldáshalmazán a cx felülről korlátos
2. Nincs megoldása $Az \leq 0, cz > 0$ rendszernek
3. Van megoldása $yA = c, y \geq 0$ rendszernek

3.2. A LP dualitástétele

Ha a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ megoldható és felülről korlátos, akkor

1. A $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ duális program is megoldható és alulról korlátos.
2. A primál programnak létezik maximuma, a duálisnak létezik minimuma
3. $max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Ekvivalens alak. Ha a $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ primál program megoldható és felülről korlátos, akkor $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ is megoldható és alulról korlátos, a primál programnak létezik maximuma és a duálisnak létezik minimuma, és

$$\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$$

3.3. A LP alapfeladatának bonyolultsága

A *szimplex-módszer* nem polinomiális idejű algoritmus, de a gyakorlatban nagyon jól használható. Létezik polinomiális idejű algoritmus is, pl. az *ellipszoid-módszer*.

4. tétel

4.1. Egészértékű programozás

IP feladat $\max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$

DIP feladat $\min\{yb : yA = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^n\}$

$$max_{IP} \leq max_{LP} = min_{LP} \leq min_{DIP}$$

4.2. IP feladat bonyolultsága

Az IP probléma NP-teljes, a *3-SAT* probléma visszavezethető rá.

4.3. Korlátozás és szétválasztás algoritmus

Algoritmus $\max\{cx : Ax \leq b, f \leq x \leq g \in \mathbb{Z}^n\}$ alakú problémák megoldására.

1. $\mathcal{L} = \{(f, g, \infty)\}, z^* = -\infty$
2. Ha $\mathcal{L} = \varnothing$ akkor vége. Különben választunk $\mathcal{L}$-ből egy $IP^{(i)}$ feladatot és töröljük $\mathcal{L}$-ből.
3. Ha $w^{(i)} \leq z^*$ akkor vissza az előző lépéshez.
4. Megoldjuk az $LP^{(i)}$ relaxált feladatot. Ha nincs megoldás, vissza a 2. lépéshez. Különben $z^{(i)}$ és $x^{(i)}$ a maximum érték és hely.
5. Ha $z^{(i)} \leq z^*$ akkor vissza a 2. lépéshez.
6. Ha $z^{(i)} > z^*$ és egész vektor, akkor $z^* = x^{(i)}$ és $x^* = x^{(i)}$. Vissza a 2. lépéshez.
7. Ha $z^{(i)} > z^*$ de nem egész vektor, akkor választunk egy x_j elágazási változót, és $f_j^{(i)} \leq t \leq g_j^{(i)}$ közbülső értéket. $\mathcal{L}$-hez hozzávesszük $(IP^{(i)})'$ és $(IP^{(i)})''$ feladatokat, $(w^{(i)})' = (w^{(i)})'' = z^{(i)}$ értékekkel. Vissza a 2. lépéshez.

5. tétel

5.1. Bázismegoldások

Tegyük fel, hogy $Ax \leq b$-nek x egy megoldása. Álljon $A_x^=$ A azon soraiból, melyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket x egyenlőséggel teljesíti.

x *bázismegoldás*, ha $r(A) = r(A_x^=)$.

x *erős bázismegoldás*, ha x nem nulla komponenseinek megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

5.2. Caratheodory tétele

Tegyük fel, hogy $Ax \leq b$ megoldható és cx felülről korlátos a megoldáshalmazán. Ekkor $\forall x_o$ megoldáshoz $\exists x_1$ erős bázismegoldás, melyre $cx_1 \geq cx_2$.

6. tétel

6.1. IP totálisan unimoduláris együtthatómátrixal

Egy mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes részmátrixának determinánsa 0, -1 vagy 1.

Ha A TU-mátrix, b egész vektor és c tetszőleges vektor, valamint a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP feladat megoldható és maximuma véges, akkor $\max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ is megoldható és maximuma megegyezik az LP feladat maximumával.

6.2. Alkalmazás páros gráfokra

Páros gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.

Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf, illeszkedési mátrixa B és $Bx \leq (1, \ldots, 1)^T, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n$ megoldásait tekintjük. Egy ilyen x pontosan akkor megoldás, ha az 1 komponenseknek megfelelő élek független élhalmazt alkotnak G-ben. Ha w tetszőleges m dimenziós valós vektor, akkor

$$\max\{wx : Bx \leq (1, \ldots, 1)^T, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

IP-feladat G-ben maximális súlyú független élhalmaz keresését jelenti, ahol w tartalmazza az élsúlyokat.

Ha G páros gráf, akkor ez megegyezik az LP feladat maximumával, ami viszont a dualitás tétele miatt megegyezik

$$\min\{y(1, \ldots, 1)^T : yB \geq w, y \geq 0\}$$

Egy y megoldás minden v ponthoz egy $c(v)$ címkét rendel. Másképp megfogalmazva tehát a feladatot:

Legyen $G = (A, B; E)$ páros gráf és $\forall e \in E$ élhez legyen adott $w(e)$ súly. Ekkor a maximális összsúlyú párosítás összesúlya megegyezik

$$\min \sum_{v \in A \cup B} c(v)$$

-vel ahol a minimum minden olyan c függvényen értendő, amelyre $c(x) + c(y) \geq w(e)$ teljesül $\forall e = \{x, y\}$ élre.

7. tétel

7.1. LP és IP alkalmazása hálózati folyamproblémákra

Adott $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ két kitüntetett csúcs, $c : E \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Ha $X : E \to \mathbb{R}^+$ függvény és $v \in V$ csúcs, akkor $\rho_X(v)$ a v-be belépő élek értékének összege, és $\delta_X(v)$ a v-ből kilépő élek értékének összege.

Egy X függvény *folyam*, ha $\forall v \in V - \{s, t\}$ esetén $\rho_X(v) = \delta_X(v)$. A folyam *megengedett*, ha $\forall e \in E$ élre $X(e) \le c(e)$.

A *folyam értéke* $\delta_{X(s)} - \rho_{X(s)} = \rho_{X(t)} - \delta_{X(t)}$.

Ha G illeszkedési mátrixa B, $v \in V$-nek megfelelő B-beli sor legyen b_v. Hozzáveszünk G-hez egy $e^* = (t, s)$ élt, a kapott gráfot nevezzük G^*-nak, B^* illeszkedési mátrixal. $B^*x^* \le 0$ megoldásának utolsó komponense legyen μ, ennek elhagyásával a megoldás x.

Egy ilyen x folyam, és a folyam értéke μ.

Maximális értékű folyam keresése a (G, s, t, c) hálózaton tehát:

$$\max\{(0, 0, \ldots, 1)x^* : B^*x^* \le 0, x^* \ge 0, x \le c\}$$

Ennek duális feladata $\min\{\sum_{e \in E} w(e)c(e)\}$ ha $\Pi(v) \ge 0\ \forall v \in V$-re és $w(e) \ge 0\ \forall e \in E$-re. $\forall e = (u, v) \in E$-re $\Pi(u) - \Pi(v) + w(e) \ge 0$ és $\Pi(t) - \Pi(s) \ge 1$. Ezen minimum értéke megegyezik a hálózati folyam minimális vágásának értékével.

7.2. Minimális költségű folyam

Adott $k(e) : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Keressük a legalább M értékű folyamok közül a minimális költségűt: $\min \sum_{e \in E} k(e)x(e)$-t. Ez LP feladatként megfogalmazva:

$$\min\{kx : B^*x^* \le 0, x^* \ge 0, x \le c, \mu \ge M\}$$

7.3. Többtermékes folyamprobléma

Adott $G = (V, E)$ irányított gráf, és abban k darab (s_i, t_i) pontpár. $x_i : E \to \mathbb{R}^+$ függvények a feladat megoldása, ha $\rho_{x_i}(v) = \delta_{x_i}(v)$ teljesül $\forall 1 \le i \le k$-ra és $\forall v \in V - \{s_i, t_i\}$-re, és $\sum_{i=1}^{k} x_i(e) \le c(e)\ \forall e \in E$ élre.

A probléma megoldásához maximalizáljuk

$$\sum_{i=1}^{k} (\delta_{x_i}(s_i) - \rho_{x_i}(s_i))$$

-t.

8. tétel

8.1. Matroidok

- Egy E alaphalmazon értelmezett nem üres, leszálló halmazrendszer *matroid*, ha tetszőleges nem negatív súlyfüggvényre a mohó algoritmus optimális (maximális súlyú) megoldást ad.
- Legyen $\mathcal{F}$ halmazrendszer E-n, amelyre teljesül, hogy $\varnothing \in \mathcal{F}$ és ha $Y \subseteq X \wedge X \in \mathcal{F} \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$. Ekkor $(E, \mathcal{F})$ matroid $\Leftrightarrow X, Y \in \mathcal{F} \wedge |X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y : Y + x \in \mathcal{F}$
- $M = (E, \mathcal{F})$ matroidban az alaphalmaz $\mathcal{F}$-hez tartozó részhalmazai a *független halmazok*.
- Ha $X \subseteq E \wedge X \notin \mathcal{F} \Rightarrow X$ összefüggő
- Maximális független halmazok a matroid *bázisai*.
- Tartalmazásra nézve minimális összefüggő halmazok a matroid *körei*.
- M matroidban $X \subseteq E$ *rangja* $r(X)$ egy X-beli maximális független halmaz mérete. Ez az $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ a matroid *rangfüggvénye*.

8.1.1. Lineáris matroid

Valamely mátrix oszlopvektorai által indukált matroidot *lineáris matroidnak* nevezzük.

8.1.2. Grafikus matroid

Egy G gráf által indukált matroid független halmazai a G-beli erdők, és $M(G)$-vel jelöljük. Megnevezése *grafikus matroid* vagy G *körmatroidja*.

8.1.3. Uniform matroid

Álljon $\mathcal{F}$ az n elemű E alaphalmaz összes legfeljebb k elemű halmazából ($0 \leq k \leq n$). Ekkor $(E, \mathcal{F})$ *uniform matroid*, melyet $U_{n,k}$-val jelölünk.

8.2. A rangfüggvény szubmodularitása

Legyen X, Y halmazpár. $X \cap Y$-ben a maximális független részhalmaz legyen A és $|A| = \alpha$. Kiegészítjük A-t maximális független részhalmazzá $X \cup Y$-ban. Ehhez X-ből β, Y-ból γ új elem kerül bele. Ekkor

$$\begin{aligned} r(X \cap Y) &= \alpha \\ r(X \cup Y) &= \beta + \alpha + \gamma \\ r(X) &\geq \beta + \alpha \\ r(Y) &\geq \alpha + \gamma \end{aligned}$$

9. tétel

9.1. Mohó algoritmus matroidon

E véges alaphalmazon adott egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer és egy $w : E \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Keresünk egy olyan X halmazt, hogy $X \in \mathcal{F}$ és $\sum_{e \in X} w(e)$ maximális. $\mathcal{F}$ nem üres és leszálló.

9.1.1. Algoritmus

$\varnothing \in \mathcal{F}$-ből indulva növeli a megoldás méretét amíg lehet:

Ha $X \subset E$ és $\exists e' : X + e' \in \mathcal{F}$ akkor legyen e olyan, hogy

$$w(e) = \max\{w(e') : e' \in E \setminus X, X + e' \in \mathcal{F}\}$$

és az új halmaz legyen $X + e$.

Ha nincs, akkor az algoritmus véget ér, az eredmény X.

9.2. Matroid megadása rangfüggvényével

- $r(\varnothing) = 0$
- $r(X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq E$
- $r(Y) \leq r(X)$ ha $Y \subseteq X$
- $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \quad \forall X, Y \subseteq E$

Fordítva: ha a fenti állítások igazak, akkor r egy $M = (E, \mathcal{F})$ matroid rangfüggvénye, ahol

$$\mathcal{F} = \{H : r(H) = |H|\}$$

9.3. Matroid megadása bázisaival

- $\mathcal{B} \neq \varnothing$
- $X_1 = X_2 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{B}$
- $X_1, X_2 \in \mathcal{B} \wedge e_1 \in X_1 \Rightarrow \exists e_2 \in X_2 : X_1 - e_1 + e_2 \in \mathcal{B}$

Fordítva: ha $(E, \mathcal{B})$ egy halmazrendszer a fenti tulajdonságokkal, akkor $M = (E, \mathcal{F})$ matroid ahol

$$\mathcal{F} = \{H : H \subseteq B, B \in \mathcal{B}\}$$

9.4. Matroid duálisa

M duálisa $M^* = (E, \mathcal{F}^*)$ ahol egy $X \subseteq E$ pontosan akkor eleme $\mathcal{F}^*$-nak, ha $E \setminus X$ tartalmaz M-beli bázist. M^*-ban X pontosan akkor bázis, ha M-ben $E \setminus X$ bázis. Egy ilyen M^* matroid. $(M^*)^* = M$.

Síkbarajzolható gráfok esetén $(M(G))^* = M(G^*)$.

9.5. Duális matroid rangfüggvénye

$$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E \setminus X)$$

10. tétel

10.1. Elhagyás

$M \setminus X = (E \setminus X, \mathcal{F}')$ matroid, ahol egy $\mathcal{F}$-beli halmaz pontosan akkor tartozik $\mathcal{F}'$-höz, ha részhalmaza $E \setminus X$-nek. $\mathcal{F}'$-ben más halmaz nincs.

10.2. Összehúzás

Legyen $M = (E, r)$ matroid r rangfüggvénnyel, $X \subseteq E$. Ekkor $E \setminus X$ alaphalmazon $R(Y) = r(X \cup Y) - r(X)$ rangfüggvénnyel definiált $M/X = (E \setminus X, R)$ matroid M-ből X összehúzásával áll elő.

$(M/X)^* = M^* \setminus X$ és $(M \setminus X)^* = M^*/X$.

10.3. Direkt összeg

Legyen $M_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$ két matroid a diszjunkt E_1 és E_2 nem üres halmazokon. A két matroid direkt összege

$$N = M_1 + M_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{F}')$$

ahol $X \in \mathcal{F}'$ pontosan akkor, ha $X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1 \wedge X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2$.

10.4. Összefüggőség

Egy M matroid összefüggő, ha nem áll elő matroidok direkt összegéből.

10.5. Reprezentálhatóság

- M matroid *reprezentálható/koordinázható* F test felett, ha létezik olyan mátrix, amely oszlopai által az F test felett meghatározott lineáris matroid izomorf M-el.
- M *lineáris matroid*, ha létezik olyan F test, amely felett koordinázható.
- A kételemű test felett reprezentálható matroidokat *bináris matroidoknak* nevezzük.
- Ha egy matroid tetszőleges test felett koordinázható, akkor *reguláris*.
- Két matroid, $M = (E, \mathcal{F})$ és $M' = (E', \mathcal{F}')$ akkor *izomorf*, ha létezik olyan bijekció E és E' között, amely független halmazt független halmazba visz át. Jele: $M \equiv M'$.
- Ha $M = (E, \mathcal{F})$ reprezentálható F test felett, akkor M^* is reprezentálható F felett.

11. tétel

11.1. Matroidok típusai

Grafikus matroid G gráf által indukált matroid, függetlenjei a G-beli erdők. Tetszőleges test felett reprezentálhatóak.

Kografikus matroid A grafikus matroidok duálisa.

Reguláris matroid Minden test felett koordinátázható matroidok.

Bináris matroid M bináris matroid, ha a bináris test felett koordinátázható.

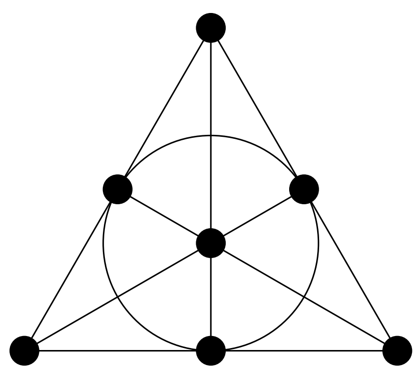
Lineáris matroid M lineáris matroid, ha van olyan test, ami felett koordinátázható.

A grafikus és kografikus matroidok halmazának metszete nem üres. Minden grafikus és kografikus matroid reguláris. Minden reguláris matroid bináris. Minden bináris matroid lineáris.

11.2. Példák

- Grafikus, de nem kografikus matroid egy síkba nem rajzolható gráf körmatroidja.
- Kografikus, de nem grafikus matroid egy síkba nem rajzolható gráf körmatroidjának duálisa.
- Grafikus és kografikus matroid egy síkbarajzolható gráf körmatroidja.
- Reguláris, de nem grafikus vagy kografikus matroid egy síkba nem rajzolható gráf kör és vágásmatroidjának direkt összege.
- Bináris, de nem reguláris matroid a Fano-matroid (F_7).
- Lineáris, de nem bináris matroid az $U_{4,2}$.
- Nem lineáris matroid a Fano-matroid és az Anti Fano-matroid direkt összege: $F_7 + F_7^-$.

11.3. Fano-matroid



$F_7(E, \mathcal{F})$ Fano-matroid, ha $E = \{1, \ldots, 7\}$ és $\mathcal{F}$ tartalmazza E legfeljebb 2 elemszámú részhalmazait, valamint E 3 elemű részhalmazai közül azokat, amelyek az ábrán nincsenek egyenesen vagy körön.

$F_7^-(E, \mathcal{F})$ Anti Fano-matroid, ha $E = \{1, \ldots, 7\}$ és $\mathcal{F}$ tartalmazza E legfeljebb 2 elemszámú részhalmazait, valamint E 3 elemű részhalmazai közül azokat, amelyek az ábrán nincsenek egyenesen.

Az F_7 csak a 2-karakterisztikájú testek felett koordinátázható, az F_7^- pedig csak a nem 2-karakterisztikájú testek felett koordinátázható.

Test karakterisztikája az a legkisebb pozitív egész szám, mellyel az egységelemet többszörözve a nulla elemhez jutunk.

11.4. Tuttle tételei

Az M matroidból törlések és összehúzások útján előállt matroidot az M *minorának* nevezzük.

- M bináris $\Leftrightarrow$ nem tartalmazza minorként az $U_{4,2}$-t.
- M reguláris $\Leftrightarrow$ nem tartalmazza minorként az $U_{4,2}$-t, az F_7-et és az F_7^*-ot.
- M grafikus $\Leftrightarrow$ nem tartalmazza minorként az $U_{4,2}$-t, az F_7-et és az F_7^*-ot, valamint $M^*(K_5)$ és $M^*(K_{3,3})$ matroidokat.

11.5. Paul Seymour tétele

Az M akkor és csak akkor reguláris, ha előáll 1 grafikus, 1 kografikus éa az R_{10} matroid néhány példányából a direkt összeg, 2-összeg és 3-összeg műveletek segítségével.

12. tétel

12.1. Matroidok összege

Az $M_1(E, \mathcal{F}_1), \dots, M_k(E, \mathcal{F}_k)$ matroidok összege az az $N = \bigvee_{i=1}^{k} M_i$ halmazrendszer, amelynek alaphalmaza E és egy halmaz pontosan akkor tartozik N-hez, ha előáll különböző M_i-k független halmazainak úniójaként:

$$N = (E, \mathcal{F}') \quad \mathcal{F}' = \{H_1 \cup H_2 \cdots \cup H_k : H_i \in \mathcal{F}_i, i = 1 \dots k\}$$

Az így definiált N halmazrendszer matroid. Rangfüggvénye:

$$r'(X) = \min_{Y \subseteq X} \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i(Y) + |X - Y| \right\}$$

12.2. k-matroid-metszet probléma

Egy M_1 és M_2 matroid metszete az $N(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ halmazrendszer mely nem minden esetben matroid.

12.2.1. Feladat

Adott k darab matroid: $M_i = (E, \mathcal{F}_i)$, $i = 1 \dots k$ és $p \in \mathbb{Z}$. Létezik-e $\mathcal{F}_i$-knek legalább p méretű közös elemük?

12.2.2. Bonyolultság

Az MMP_2 polinomidőben megoldható, visszavezethető a matroid partíciós problémára. Az MMP_k $k \geq 3$-ra NP-teljes.

13. tétel

13.1. k-matroid-partíciós probléma

Adott k darab matroid közös E alaphalmazon és egy $X \subseteq E$ részhalmaz. X független-e a matroidok összegében? Más szóval: partícionálható-e X $X_1, \ldots, X_k$ részhalmazokra, melyek rendre az $1., \ldots, k.$ matroidban függetlenek?

13.1.1. Algoritmus

Kiindulunk $\forall i : X_i = \emptyset, X_i \in \mathcal{F}_i$, halmazokból, és addig bővítjük, amíg uniójuk X nem lesz, vagy ha nem bővíthető, mutatunk egy tanut.

A bővítéshez definiálunk egy $n + k$ pontú segédgráfot:

- Csúcsai $E \cup \{p_1, \ldots, p_k\}$ ahol p_i az X_i partíció segédpontja.
- $(x \to p_i) \in E(G)$ ha $x \notin X_i \wedge X_i + x \in \mathcal{F}_i$
- $(x \to y) \in E(G)$ ha $\exists i : x \notin X_i, y \in X_i, X_i + x \notin \mathcal{F}_i, X_i + x - y \in \mathcal{F}_i$

Legrövidebb irányított utat keresünk $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} X_i$-ből $\{p_1, \ldots, p_k\}$-ba. Ha van ilyen út, javítunk az út mentén (végrehajtjuk a cseréket). Ezáltal $\bigcup_{i=1}^{k} X_i$ mérete 1-el nő. Ha nincs ilyen út megállunk, és tanu az $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} X_i$-ből irányított úton elérhető pontok halmaza.

13.2. 2-matroid-metszet probléma visszavezetése matroid partíciós problémára

Legyen $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ valamint $p \in \mathbb{Z}^+$. Ha $p > \min(r_1, r_2)$, a válasz *nem*. Csonkoljuk a matroidokat addig, amíg rangjuk $\min(p, r_1, r_2)$-re csökken. Ekkor a válasz akkor és csak akkor *igen*, ha $M_1 \vee M_2^* = (E, 2^E)$.

13.2.1. Csonkolás

$M = (E, \mathcal{F})$ *csonkoltja* $M' = (E, \mathcal{F}')$ ahol $\mathcal{F}'$ az $\mathcal{F}$ elemeit tartalmazza a bázisokon kívül. A matroid rangja ettől eggyel csökken.

14. tétel

14.1. Matroidok megadása

Grafikus és lineáris matroidok polinom tárral megadhatók, de az általános matroid leírása exponenciális méretű lenne. Ezért feltételezzük, hogy létezik algoritmusunk, amely $X \subseteq E$ részhalmazra polinom időben kiszámolja M valamelyik tulajdonságát:

Függetlenségi orákulum megadja, X független-e

Kör orákulum megadja, X kör-e

Bázis orákulum megadja, X bázis-e

Rang orákulum megadja X rangját

Girth orákulum megadja X által tartalmazott legrövidebb kör hosszát, vagy ∞-t, ha $X \in \mathcal{F}$.

14.2. Orákulumok kapcsolata

Az A orákulum erősebb B orákulumnál, ha A polinom időben tudja szimulálni B-t.

- A rang és a függetlenségi orákulum egyforma erejű
  - Adott rang orákulum esetén X független ha $r(X) = |X|$
  - Adott függetlenségi orákulum esetén mohó algoritmussal számolható a rang
- A függetlenségi orákulum erősebb, mint a bázis orákulum
  - X akkor bázis, ha független és E-ből bármely x elemet hozzávéve már nem független.
  - Bázis orákulummal nem számolható függetlenség polinomidőben.
- A függetlenségi orákulum erősebb, mint a kör orákulum
  - X akkor kör, ha nem független, de bármely elemét elhagyva független lesz.
  - Kör orákulummal nem számolható függetlenségi orákulum polinomidőben.
- A girth orákulum erősebb, mint a függetlenségi orákulum
  - X akkor független, ha $g(X) = \infty$.
  - Függetlenségi orákulummal nem számolható girth orákulum polinomidőben.

14.3. k-polimatroid rangfüggvény

Általánosítása a matroid rangfüggvényének, amely a $k = 1$ eset.

1. $f(\varnothing) = 0$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$
3. $f(\{x\}) \leq k$
4. $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

14.4. 2-polimatroid-matching probléma

14.4.1. k-matching

Ha r egy k-polimatroid rangfüggvény, akkor $\forall X \subseteq E$-re $r(X) \leq k|X|$ teljesül. Amennyiben $r(X) = k|X|$, azt *k-matchingnak* nevezzük.

14.4.2. Probléma

Az E halmazon adott 2-polimatroid rangfüggvény és $p \in \mathbb{Z}$ szám. Létezik-e olyan $X \subseteq E$, amely 2-matching és legalább p elemű?

14.4.3. Bonyolultság

A matroidpárosítási probléma nem oldható meg polinom időben. Bármely $X \subseteq E$-re egységnyi idő alatt megtudható $r(X)$, de a 2-polimatroid rangfüggvényről semmit sem tudunk.

14.4.4. Lovász tétele

A matroidpárosítási probléma polinomidőben megoldható, ha a 2-polimatroid rangfüggvény egy adott valós elemű M mátrixból az alábbi módon nyerhető:

Az M egy $k \times 2n$ méretű valós mátrix, oszlopai $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. Definiálunk az $I = \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazon egy r függvényt úgy, hogy $X \subseteq I$ esetén legyen $r(X)$ az $\bigcup_{i \in X} \{a_i, b_i\}$ vektorhalmaz által kifeszített altér dimenziója.

15. tétel

15.1. Additív hibával közelítő algoritmus

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$. Egy algoritmusról akkor mondjuk, hogy *egy additív C hibától eltekintve jól oldja meg* a problémát, ha minden I inputra polinom idő alatt szolgáltat egy olyan $y_I \in X_I$ megoldást, amire

$$f_I(y_I) \leq \min_{x \in X_I} f_I(x) + C$$

ahol $f(x)$ célfüggvényt minimalizáljuk X_I halmazon adott I input esetén. C független az inputtól.

15.1.1. Példák

Egy G gráf élei k *színnel kiszínezhetők*, ha minden élet ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen. G *élkromatikus száma* $\chi_e(G) = k$, ha G élei k szín felhasználásával kiszínezhetők, de $k-1$-el nem.

Vizing-tétel: Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta + 1$. Ez egy $C = 1$ additív hibájú közelítés.

15.2. k-approximációs algoritmusok

Legyen $k > 1 \in \mathbb{R}$ adott szám. Egy algoritmus *egy multiplikatív k hibától eltekintve jól oldja meg* a problémát, ha minden I inputra polinom idő alatt szolgáltat olyan $y_I \in X_I$ megoldást, melyre

$$f_I(y_I) \leq k \min_{x \in X_I} f_I(x)$$

ahol $f(x)$ célfüggvényt minimalizáljuk X_I halmazon adott I input esetén. k független az inputtól.

15.2.1. Példák

Lefogó pontok száma. Lefogó pontok minimális számát, $\tau(G)$-t keressük. A düggetlen élek egy maximális rendszerét kiválasztva egy $2\nu(G)$ elemű ponthalmazhoz jutunk. Mivel $\nu \leq \tau$, ezért ez egy $k = 2$-approximációs algoritmus.

Halmazfedés. Adott n elemű U alaphalmaz, $S = \{S_1, S_2, \ldots, \S_k\}$ részhalmazok és $c : S \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Cél S-ből néhány elemet kiválasztani úgy, hogy lefedjék U-t minimális költséggel.

Tegyük fel, hogy néhány elemet már kiválasztottunk, és ezek uniója $C \subseteq U$. Ekkor legyen S_i *értéke* a $\frac{c(S_i)}{|S_i - C|}$ szám. Amíg van fedetlen elem, a minimális értékű S_i halmazt választjuk.

Az algoritmus által adott halmazfedés költsége legfeljebb az optimum H_n-szerese, ahol $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1$. Ez nem valódi k-approximációs algoritmus, mivel k függ az alaphalmaz méretétől.

16. tétel

16.1. Közelítő algoritmus a Steiner-fa problémára

Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $c : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. A csúcsok T terminálok és S steiner-pontok halmazára oszlik ($V = T \cup S$).

Minimális költségű fát keresünk G-ben, mely minden T-beli pontot tartalmaz, és esetleg néhány S-belit is.

A Steiner-fa probléma *metrikus esetében* a c költségfüggvény teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget és G teljes gráf. Az általános Steiner-fa probléma visszavezethető a metrikus Steiner-fa problémára úgy, hogy az utóbbi k-approximációs algoritmusa az előbbire is k-approximációs.

A metrikus Steiner-fa problémára 2-approximációs algoritmus a következő: legyen F a terminálok halmazán egy minimális költségű feszítőfa. Ekkor $c(F) \leq 2OPT$.

16.2. Utazó ügynök probléma

Élsúlyozott teljes gráfban keresünk minimális összsúlyú Hamilton-kört.

16.2.1. Metrikus eset

k=2 multiplikatív hibájú algoritmus.

1. Minimális összsúlyú F feszítőfát keresünk az n pontú teljes G gráfban.

2. Megduplázzuk F minden élét, majd Euler-kört keresünk.

3. Az Euler-körből elkészítjük G egy Hamilton-körét „útlevágásokkal". Tegyük fel, hogy $p_1, \ldots, p_t$ különböző pontok de p_{t+1} már nem az. Legyen p_{t+j} az első olyan pont, amely ismét különböző az eddigiektől. Ha van ilyen, akkor (p_t, p_{t+j}) útlevágással helyettesítünk, ha nincs, akkor (p_t, p_1)-el.

Christofides algoritmusa. Az előző algoritmus $k = \frac{3}{2}$-re javítható a második lépés átalakításával:

- Tekintsük G pontjait, melyek F-beli fokszáma páratlan. Jelöljük őket $q_1, \ldots, q_{2m}$-el. H legyen az a segédgráf, amelyet ez a ponthalmaz feszít ki G-ben, és súlyozzuk ugyan úgy mint G éleit.

- M legyen minimális összsúlyú teljes párosítás H-ban. Adjuk hozzá M éleit F-hez, és az így kapott gráfban keressünk Euler-kört.

16.2.2. Polinomiális approximációs séma

Egy probléma *polinomiális approximációs sémával* közelíthető, ha tetszőlegesen kis pozitív ε-hoz található polinom idejű algoritmus, mely a problémát egy multiplikatív $1 + \varepsilon$ hibától eltekintve jól közelítve oldja meg.

Ha ε közelít 0-hoz, az algoritmus lépésszámát az input egyre magasabb rendű polinomjával lehet csak felülről becsülni. Ezért ez sokkal gyengébb, mint egy polinomiális algoritmus.

A metrikus utazó ügynök probléma nem ilyen.

16.2.3. Általános eset

Általános esetben az utazó ügynök probléma nem közelíthető semmilyen nagy multiplikatív hibával sem.

17. tétel

17.1. Részletösszeg probléma

Legyen adott (S, t) pár, ahol S az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pozitív egész számok halmaza és $t \in \mathbb{Z}$. Létezik-e S olyan részhalmaza, amelyben az elemek összege pontosan t?

Ez a probléma NP-teljes.

Az optimalizációs problémában olyan $\{x_1, \ldots, x_n\}$ részhalmazt keresünk, amelynek összege a lehető legnagyobb, de nem nagyobb, mint t.

17.1.1. Exponenciális algoritmus

Ha L pozitív egészek listája vagy halmaza és x pozitív egész, akkor legyen $L + x$ minden elem x-el való megnövelésével nyert lista vagy halmaz.

A *PONTOS-RÉSZLETÖSSZEG(S,t)* eljárás:

1. Legyen $n = |S|$ és $L_0 = \{0\}$.
2. $\forall i : 1 \ldots n$-re legyen L_i az L_{i-1} és $L_{i-1} + x_i$ listák összefésüléséből adódó lista. Távolítsunk el L_i-ből minden olyan elemet, amely t-nél nagyobb.
3. Az eredmény az L_n-beli legnagyobb elem.

Ez egy exponenciális algoritmus.

17.1.2. Polinomiális approximációs séma

Polinomiális approximációs sémát kapunk, ha létrehozása után minden L_i listát „megritkítunk” $0 < \delta < 1$ ritkító paraméterrel.

Egy L lista δ-val való *ritkítása* azt jelenti, hogy a lehető legtöbb elemet eltávolítjuk úgy, hogy minden L-ből eltávolított y elemre még van egy $z \leq y$ elem L'-ben, amelyre $\frac{y-z}{y} \leq \delta$, vagyis

$$(1 - \delta)y \leq z \leq y$$

Ez a z y képviselője L' listában. Minden y-t képvisel egy z úgy, hogy a relatív hibája y-tól legfeljebb δ.

Egy ilyen ritkítást elvégezhetünk, ha L elemein növekvő sorrendben végigmegyünk, és L'-be akkor kerül egy elem, ha az L első eleme, vagy L'-höz utoljára hozzáadott szám nem képviselheti.

A *PONTOS-RÉSZLETÖSSZEG* problémát kiegészítve L_i létrehozása után egy $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$ ritkítással kapjuk a *KÖZ-RÉSZLETÖSSZEG(S,t,ε)* eljárást.

Ez az eljárás egy polinomiális approximációs séma a részletösszeg problémára.

18. tétel

18.1. Ütemezési feladatok típusai

Munkák elvégzését ütemezzük gépeken bizonyos feltételek mellett adott célfüggvényt optimalizálva.

- Elvégzendő munkák: $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$
- Megmunkálási idő: p_i
- Rendelkezésre állási idő: r_i (a legkorábbi időpont amikor az i. munka elkezdhető)
- Súlyozás: w_i
- Határidő: d_i
- Megkötés lehet például a munkák részben rendezettsége.

Célfüggvények lehetnek:

- Teljes átfutási idő: $C_{max}^S = \max_i C_i^S$, ahol C_i^S az S ütemezében J_i munka befejezési ideje.
- Átlagos átfutási idő: $\frac{\sum_{i=1}^n C_i^S}{n}$
- Maximális késés minimalizálása: $\max_i (C_i^S - d_i)$

Az ütemezési feladatokat $\alpha|\beta|\gamma$ formában írjuk le, ahol α a gépek száma és típusa, β az egyéb feltételek ($p_j = 1$, r_j, $prec$, stb.), γ pedig a célfüggvény (rövidített neve).

18.2. $1|prec|C_{max}$

Adott D irányított gráf, amely a precedenciát írja le. Az optimális ütemezés D topologikus sorrendje, amely lineáris időben megkapható.

18.3. $1||C_j$

Az SPT (shortest processing time) sorrend optimális megoldást ad.

18.4. 2-approximációs algoritmus $P||C_{max}$-ra

Rögzítjük a munkák egy sorrendjét. Amint egy gép felszabadul kezdje meg a sorban legelöl álló munkát ami még nincs géphez rendelve. Ez a *listás ütemezés*.

A listás ütemezés $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-approximációs a $P||C_{max}$ feladatra.

19. tétel

19.1. Graham közelítő algoritmusai

$P||C_{max}$. Ha listás ütemezést alkalmazunk és a rögzített sorrend LPT (longest processing time), akkor az algoritmus $\frac{4}{3}$-approximációs.

$P|prec|C_{max}$. A listás ütemezés, ha figyelembe veszi az adott pillanatban rendelkezésre álló munkákat (csak azokból választ), akkor $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-approximációs algoritmus a $P|prec|C_{max}$ feladatra.

19.2. $P|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladat

Ha a $D = (\mathcal{J}, A)$ gráf egy s gyökerű *be-fenyő* (az s-en kívül minden pont *be-foka* 1), akkor az alábbi algoritmus optimális:

Hu algoritmusa.

1. Meghatározzuk $\forall j \in \mathcal{J}$-hez D-ben a j-től s-ig vezető út $l(j)$ hosszát. Rendezzük a munkákat $l(j)$ szerint nem növekvő sorrendbe.
2. Ütemezzük a munkákat listás ütemezéssel.

19.3. $P2|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladat

Optimális megoldást ad a problémára a következő algoritmus:

Coffman és Graham algoritmusa.

1. Tranzitív redukciót végzünk a D gráfon
2. Csoportokba osztjuk a pontokat: első csoportba azok a pontok kerülnek, amelyek *ki-foka* 0, a második csoportba amelynek ki-foka az első csoport elhagyásával 0-vá válik, stb.
3. A $p + 1$-edik csoport pontjait a következőképp számozzuk:
   - Minden ilyen pont mellé odaírjuk csökkenő sorrendben azon pontok sorszámát, amelyekbe belőle él vezet
   - A számsorozatok lexikografikus sorrendje jelöli ki a $k_p + 1 \ldots k_{p+1}$ sorszámokat.
4. A sorszámok szerint csökkenő sorrendbe rendezzük a munkákat, és listás ütemezést alkalmazunk.

20. tétel

20.1. Lokális élösszefüggőség

Legyen $G = (V, E)$ gráf és $u, v \in V$. Az u és v közötti *él-összefüggőség*, melyet $\lambda(u, v)$-vel jelölünk az u és v közti éldiszjunkt utak maximális száma.

Menger tétele szerint:

$$\lambda(u, v) = \min \{d(x) : X \subset V, u \in X, v \notin X\}$$

ahol $d(X)$ az X-ből $V \setminus X$-be lépő élek száma.

A G gráf *élösszefüggőségi száma*:

$$\lambda(G) = \min \{\lambda(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$$

20.1.1. Meghatározása összehúzásokkal

G 2 pontját összehúzva a minimális vágás nem csökkenhet, és csak akkor nőhet, ha minden minimális vágás elválasztja az összehúzott pontokat.

$$\lambda(G) = \min \{\lambda(u, v), \lambda(G_{uv})\}$$

ahol G_{uv} az u és v csúcsok összehúzásával kapott gráfot jelenti. Ezt $n - 1$-szer kiszámolva megkapjuk $\lambda(G)$-t.

A $G = (V, E)$ pontjainak $v_1, \ldots, v_n$ sorrendje „max-vissza” sorrend, ha $\forall 2 \leq i \leq j \leq n$-re $d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_j, V_{i-1})$ ahol $V_l = \{v_1, \ldots, v_l\}$. Ilyen sorrendet úgy készíthetünk, ha a következő hozzáadott pont mindig olyan, amelyből a már sorba rakottakhoz a lehető legtöbb él vezet.

Ha $u = v_{n-1}$ és $v = v_n$ az utolsó 2 pont G egy max-vissza sorrendjében, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$.

Nagamochi és Ibaraki algoritmusa.

1. $\lambda := \infty$
2. Elkészítjük g egy max-vissza sorrendjét. Ha ebben $d(v_n) < \lambda$, akkor $\lambda := d(v_n)$.
3. Ha még legalább 3 pontú a gráf, húzzuk össze az utolsó 2 pontot és folytassuk a 2. ponttól. Különben készen vagyunk és $\lambda(G) = \lambda$.

21. tétel

21.1. Minimális méretű 2-élösszefüggő részgráf keresése

Ez egy NP-nehéz probléma.

Adott $G = (V, E)$ 2-élösszefüggő irányítatlan gráf, amelyben minden él költsége 1, és $r(u, v) \equiv 2$ uniform élösszefüggőségi követelmény. A feladat egy minimális élszámú 2-élösszefüggő feszítőgráf keresése.

21.1.1. Khuller és Vishkin algoritmusa

Tetszőleges pontból indulva DFS keresést hajtunk végre, és közben kijelöljük E' élhalmazt, ami a megoldás lesz. Minden olyan él, ami a felépítendő T mélységi fa éle, belekerül E'-be.

Minden olyan pillanatban, amikor a keresés visszalép v-ből T $\{u, v\}$ éle mentén, ellenőrizzük, hogy ez elvágó él-e az eddigi E' élei által kifeszített gráfban. (Ekkor $T(v)$ a T v-gyökerű részfája, melyet már teljesen bejártunk). Ha igen, egy $T(v)$-ből kilépő élt adunk E'-höz, amely nincs T-ben és a $T(v)$-n kívüli pontját a keresés legelőször érte el.

Ez az algoritmus $\frac{3}{2}$-approximációs.

21.2. Minimális méretű 2-összefüggő részgráf keresése

Egy 2-összefüggő gráf egy él illetve egy pont törlése esetén összefüggő marad.

A következő algoritmus $\frac{3}{2}$-approximációs:

21.2.1. Cherigan és Thurimella algoritmusa

1. Keresünk egy minimális F lefogó élhalmazt G-ben Ehhez egy M maximális párosítást keresünk G-ben, majd további éleket adunk hozzá lefedve azokat a pontokat, amelyeket M nem fed le.

2. Hagyjuk el G-ből F-hez nem tartozó éleket amíg lehet úgy, hogy a gráf 2-összefüggő maradjon. Egy $\{u, v\}$ él elhagyható, ha u és v között vezet minimum 3 pontdiszjunkt út. Ennek eldöntésére maximális folyam algoritmust alkalmazhatunk.

22. tétel

22.1. Az összefüggőség növelése

Adott $G = (V, E)$ gráfot minimális számú új él hozzáadásával 2-élösszefüggővé akarjuk tenni.

G gráf maximális élszámú 2-élösszefüggő részgráfai *2-komponensek*.

A gráf egy 2-komponense *levél*, ha pontosan egy elvágó él illeszkedik rá. Ha egy sem, akkor *izolált levél*. Ha legalább 3 elvágó él illeszkedik rá, akkor *belső komponens*. Két levél távolsága az őket összekötő utak által érintett belső komponensek száma.

Az alábbi algoritmus optimális megoldást ad:

22.1.1. Plesnik-algoritmus

Amíg a gráf nem 2-összefüggő válasszunk olyan 2 L_1, L_2 levelet, melyek távolsága maximális. Új élet adunk a gráfhoz, amely L_1 és L_2 két tetszőleges pontját köti össze.

Legyen $l(G) = l'(G) + 2l''(G)$, ahol $l'(G)$ a levelek száma, $l''(G)$ pedig az izolált levelek száma. A fenti algoritmus minden él hozzáadásával az $l(G)$ értéket 2-vel csökkenti, kivéve, ha $l(G) = 3$.

A G gráf 2-élösszefüggővé növeléséhez szükséges új élek minimális száma $\left\lceil \frac{l(G)}{2} \right\rceil$.