Villamosmérnök A2X (2013 ősz) — 1. vizsga ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^n}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n^n}$

Megoldás. (a) Divergens, mert $\frac{1}{\ln n^n}$ monoton csökken, $\frac{2^k}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{k \ln 2} \sim \frac{1}{k}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergens.
(b) Konvergens a Leibniz-kritérium miatt, mert a sor váltakozó előjelű, és $|\frac{(-1)^n}{\ln n^n}| = \frac{1}{\ln n^n} \to 0$ monoton csökkenve.

2. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben az x-tengely körüli, (az x-tengely pozitív irányából nézve) pozitív irányú 90 fokos forgatás mátrixa $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában felírva $\underline{\underline{A}}$. Írja fel $\underline{\underline{A}}^{99}$-at!

Megoldás. Ha A a megfelelő lineáris transzformáció, akkor $A^{99} = A^{96} \cdot A^3 = I \cdot B = B$, ahol B a negatív irányú 90 fokos forgatás; tehát $\underline{\underline{A}}^{99} = \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Legyen $H = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$. $\iint_H xy \, dxdy = ?$

Megoldás.

$$\iint_H xy \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, dr d\varphi = \frac{3^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{3^4}{8} \sin^2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

4. Határozza meg deriválás nélkül $\sin x^2$ 102. deriváltját az origóban.

Megoldás. Legyen $f(x) = \sin x^2$. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightsquigarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, tehát f az origó körüli hatványsorba fejthető, következésképpen itt akárhányszor deriválható és a fenti az őt előállító hatványsor az ő origó körüli Taylor-sora, így a Taylor-sor definíciója szerint x^{102} együtthatója $\frac{-1}{51!} = \frac{f^{(102)}(0)}{102!}$, azaz $f^{(102)}(0) = -\frac{102!}{51!}$.

5. Keresse meg az $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y + 7$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és állapítsa meg ezek jellegét.

Megoldás. $f_x(x,y) = 6x - 2y$, $f_y(x,y) = -2x + 2y - 8$, és az $f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$ egyenletrendszer egyetlen megoldása a $(2,6)$ pont, f-nek tehát csak itt lehet szélsőértéke. És itt van is, mégpedig lokális minimuma, mert $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2$ és $f_{yy}(x,y) = 2$, tehát $f_{xx}(2,6) > 0$ és $f_{xx}(2,6) f_{yy}(2,6) - f_{xy}^2(2,6) = 8 > 0$.

6. Igazak-e az alábbi állítások?
(a) Ha V és W végesdimenziós lineáris terek és $A : V \to W$ lineáris operátor, akkor
(a1) ha A invertálható, akkor $0 \in \operatorname{Ker} A$
(a2) ha $0 \in \operatorname{Ker} A$, akkor A invertálható
(a3) $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim W$
(a4) $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$
(ahol $\operatorname{Ker} A$ és $\operatorname{Im} A$ jelöli A mag- ill. képterét).
(b) Ha $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f integrálható H-n.

Megoldás. (a1) Igen, mert $0 \in \operatorname{Ker} A$ minden A lineáris operátorra.
(a2) Nem, és ellenpéldának jó bármely nem invertálható lineáris operátor, pl. a 0-operátor $\mathbb{R}$-en.
(a3) Nem, pl. $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$, $Ax = (x, 0)$, mert akkor $\dim \operatorname{Ker} A = 0$, $\dim \operatorname{Im} A = 1$ és $\dim W = 2$.
(a4) Igen, ezt mondja a dimenzió-tétel.
(b) Nem, ellenpéldának jó egy nem-0 konstans-függvény egy nem Jordan-mérhető halmazon, pl. $f(x,y) = 1$, H a $[0,1] \times [0,1]$ racionális koordinátájú pontjai.