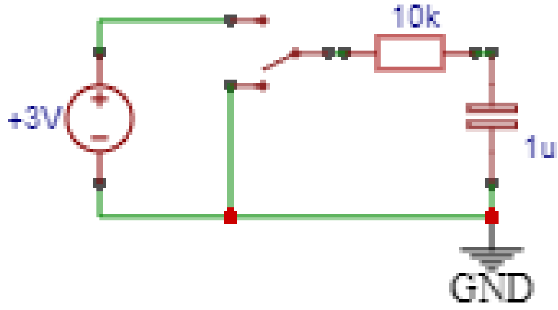
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elektronikus Eszközök Tanszéke

Elektronika alapjai

2. Gyakorlat – Kapacitás

Összeállította:
Ress Sándor, Jani Lázár, Krammer Olivér, Straubinger Dániel

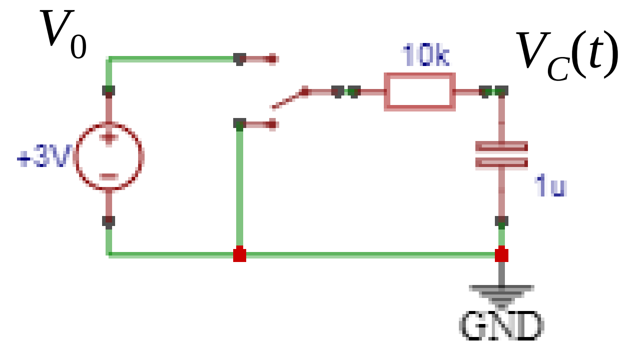
1. Feladat (A) *- Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik

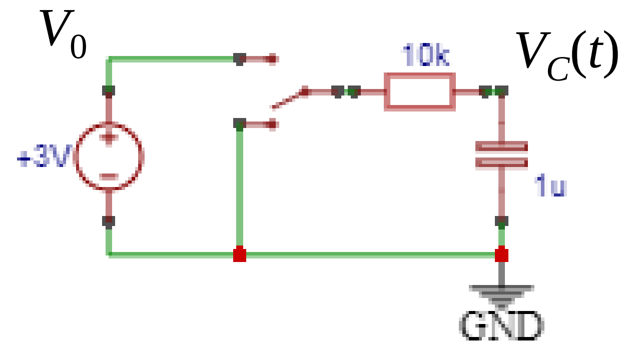
Kapacitás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

Ellenállás árama:

$$I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R}$$

1. Feladat (A) *- Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

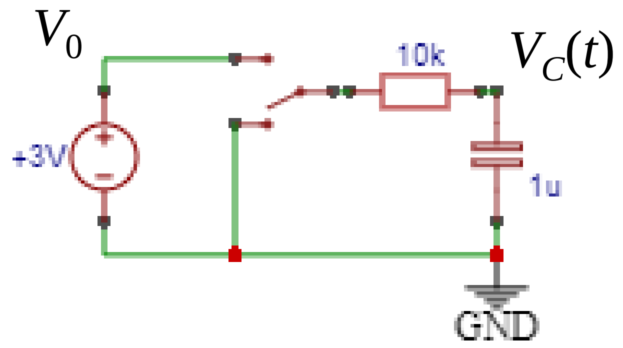
Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik

Kapacitás árama: Ellenállás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} = I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} \rightarrow C\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{V_0 - V_C(t)}{R}$$

***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

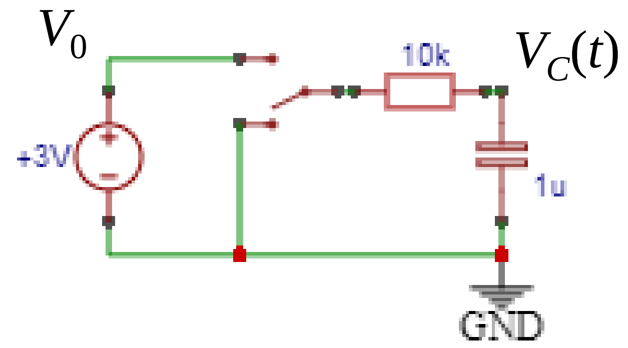
Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

<u>Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik</u>

Kapacitás árama: Ellenállás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} \quad = \quad I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} \quad -> \quad C\underbrace{\frac{dV_C(t)}{dt}}_{y'} = \frac{V_0 - \overbrace{V_C(t)}^{y}}{R}$$

***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

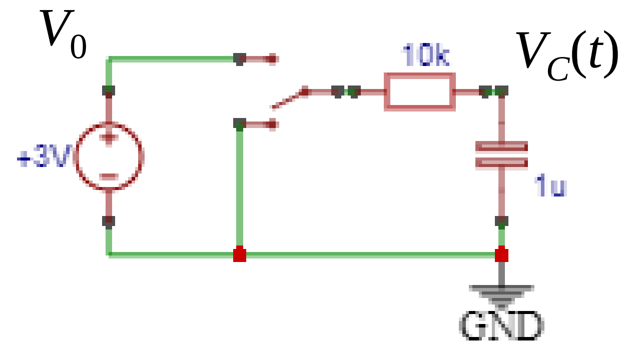
Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik

Kapacitás árama: Ellenállás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} = I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} \quad \text{->} \quad C\underbrace{\frac{dV_C(t)}{dt}}_{y'} = \frac{V_0 - \overbrace{V_C(t)}^{y}}{R}$$

$$C \cdot y' = \frac{V_0 - y}{R} \rightarrow RC \cdot y' + y = V_0$$

***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik

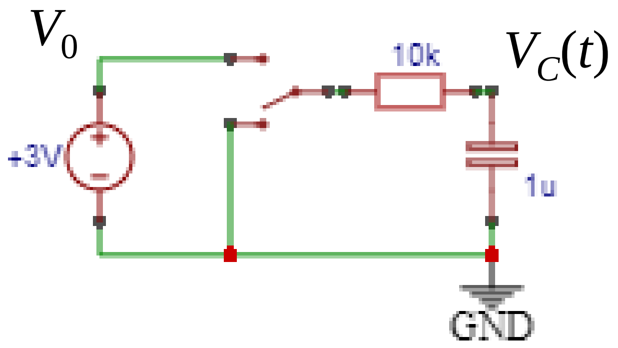
Kapacitás árama: Ellenállás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} = I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} \quad \rightarrow \quad C\underbrace{\frac{dV_C(t)}{dt}}_{y'} = \frac{V_0 - \overbrace{V_C(t)}^{y}}{R}$$

τ - időállandó

$$C \cdot y' = \frac{V_0 - y}{R} \rightarrow RC \cdot y' + y = V_0$$

***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Kapacitás definíciója: $C = Q / V$ -> $Q = C \cdot V$ $(Q = C \cdot U)$

Elektromos áramerősség: $I = Q / t$

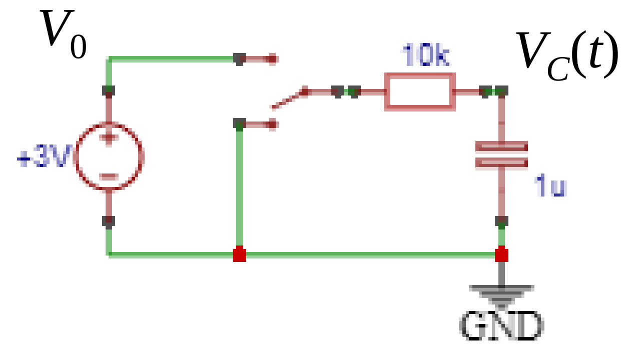
Kirchhoff áramtörvényből -> az ellenállás és a kapacitás árama megegyezik

Kapacitás árama: Ellenállás árama:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} = I_R = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} \quad \text{->} \quad C\underbrace{\frac{dV_C(t)}{dt}}_{y'} = \frac{V_0 - \underbrace{V_C(t)}_{y}}{R}$$

$\boxed{\tau \cdot y' + y = V_0}$ Lineáris, állandó-együtthatós, inhomogén differenciálegyenlet

1. Feladat (A) *- Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



Bekapcsolás:

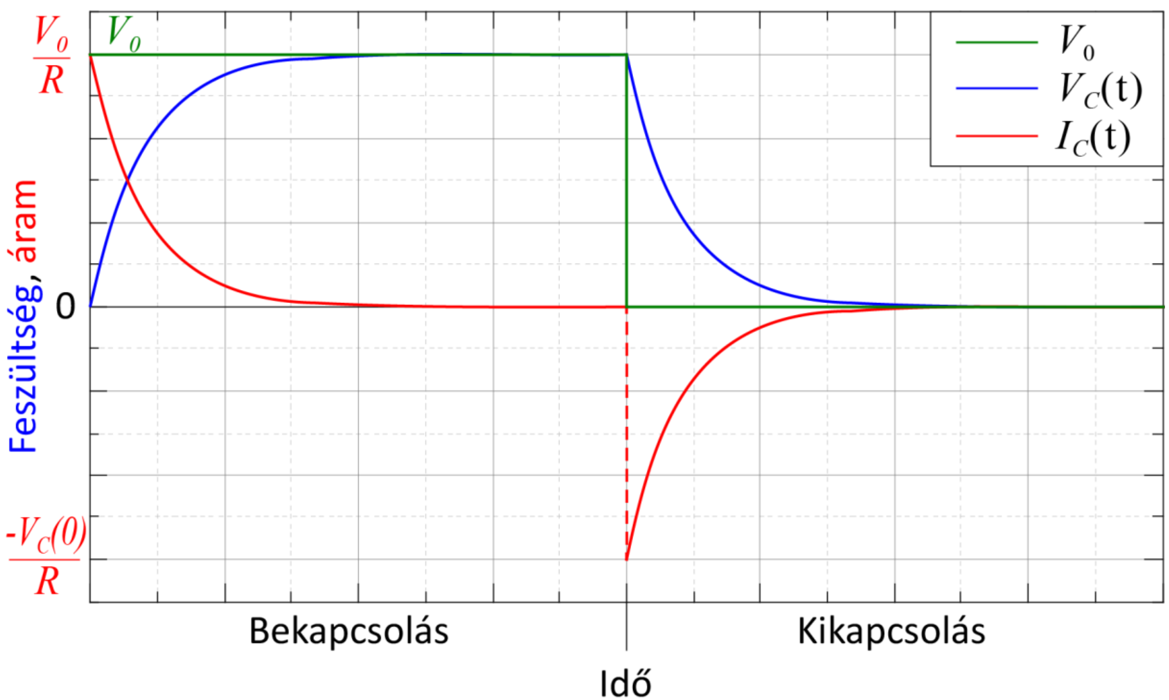
$$V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$I_C(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

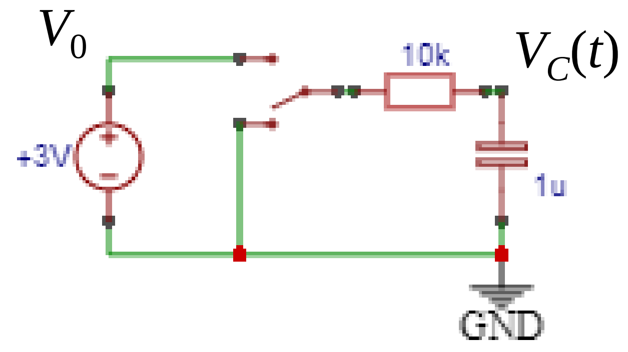
Kikapcsolás:

$$V_C(t) = V_C(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$I_C(t) = -\frac{V_C(0)}{R} e^{-t/\tau}$$



***1. Feladat (A)** - Adja meg az ábrán látható RC késleltető hálózat feszültségének és áramának időfüggését, ha t=0 időpontban a bemenetre egy 3V-os egyenfeszültséget kapcsolunk.*



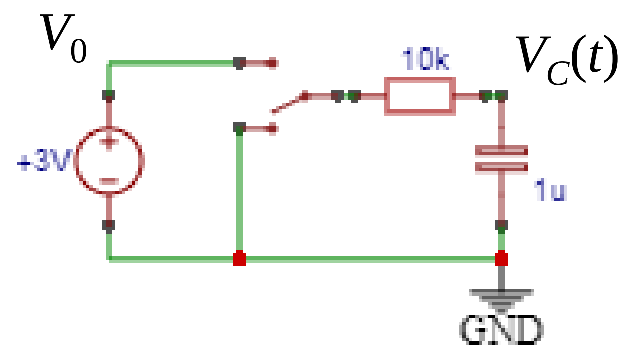
Megoldás:

$$V_0 = 3\,\mathrm{V};\ V_C(t=0) = 0\,\mathrm{V};\ \tau = RC = 10\,\mathrm{k\Omega}\cdot 1\,\mu\mathrm{F} = 10\,\mathrm{ms}$$

$$V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 3\left(1 - e^{-t/10\,\mathrm{ms}}\right)\mathrm{V}$$

$$I_C(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} = \frac{3\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{k\Omega}}\cdot e^{-t/10\,\mathrm{ms}} = 0{,}3\cdot e^{-t/10\,\mathrm{ms}}\ \mathrm{mA}$$

***1. Feladat (B)** – Az (A)-val egyező paraméterek esetére számítsa ki a kikapcsolás időfüggvényét is!*



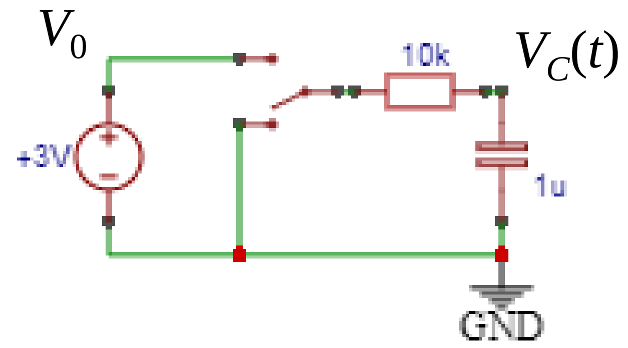
Megoldás:

$$V_0 = 0\,\mathrm{V};\ V_C(t=0) = 3\,\mathrm{V};\ \tau = RC = 10\,\mathrm{k\Omega}\cdot 1\,\mu\mathrm{F} = 10\,\mathrm{ms}$$

$$V_C(t) = V_C(0)\cdot e^{-t/\tau} = 3\cdot e^{-t/10\,\mathrm{ms}}\ \mathrm{V}$$

$$I_C(t) = -\frac{V_C(0)}{R}e^{-t/\tau} = -0,3\cdot e^{-t/10\,\mathrm{ms}}\ \mathrm{mA}$$

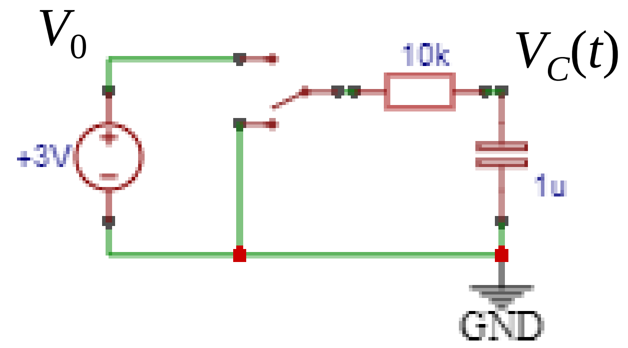
2. Feladat *- Mekkora lesz az állandósult állapottól történő eltérés, egy τ időállandóval rendelkező rendszer esetén, pontosan τ illetve 5τ idő múlva?*



Akár bekapcsolást, akár kikapcsolást nézünk, az eltérés az egyensúlyi helyzettől (abszolút értékben):

$$\Delta V = V_0 - V_C(t) = V_0 - V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_0\left(1 - 1 + e^{-t/\tau}\right) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

2. Feladat - *Mekkora lesz az állandósult állapottól történő eltérés, egy τ időállandóval rendelkező rendszer esetén, pontosan τ illetve 5τ idő múlva?*



Akár bekapcsolást, akár kikapcsolást nézünk, az eltérés az egyensúlyi helyzettől (abszolút értékben):

$$\Delta V = V_0 - V_C(t) = V_0 - V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_0\left(1 - 1 + e^{-t/\tau}\right) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

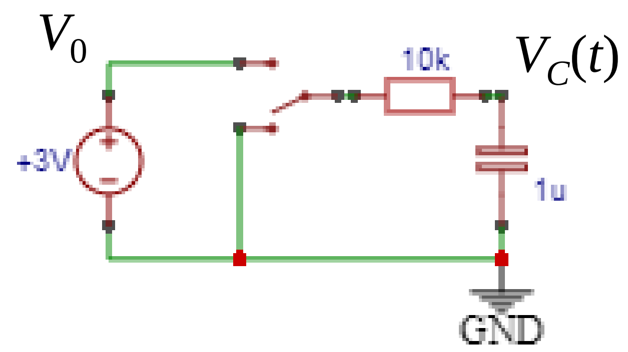
Ha az eltérést százalékban szeretnénk kifejezni:

$\frac{\Delta V}{V_0} = e^{-t/\tau}$, tehát a <u>megoldás:</u>

$$\frac{\Delta V_{|(t=\tau)}}{V_0} = e^{-\tau/\tau} = e^{-1} = 37\%$$

$$\frac{\Delta V_{|(t=5\tau)}}{V_0} = e^{-5\tau/\tau} = e^{-5} = 0{,}67\%$$

***2. Feladat** - Mekkora lesz az állandósult állapottól történő eltérés, egy τ időállandóval rendelkező rendszer esetén, pontosan τ illetve 5τ idő múlva?*



Akár bekapcsolást, akár kikapcsolást nézünk, az eltérés az egyensúlyi helyzettől (abszolút értékben):

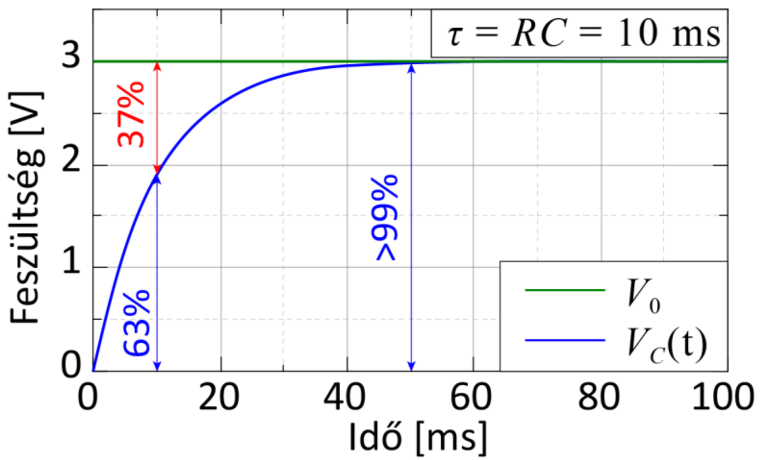
$$\Delta V = V_0 - V_C(t) = V_0 - V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_0\left(1 - 1 + e^{-t/\tau}\right) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Ha az eltérést százalékban szeretnénk kifejezni:

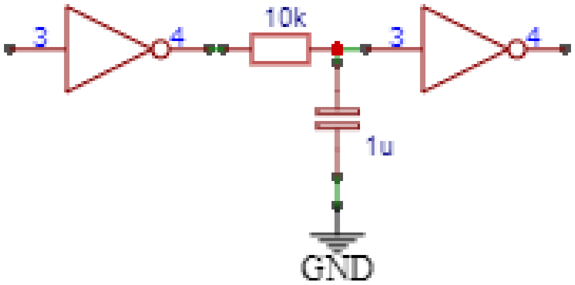
$\dfrac{\Delta V}{V_0} = e^{-t/\tau}$, tehát a <u>megoldás:</u>

$$\frac{\Delta V_{|(t=\tau)}}{V_0} = e^{-\tau/\tau} = e^{-1} = 37\%$$

$$\frac{\Delta V_{|(t=5\tau)}}{V_0} = e^{-5\tau/\tau} = e^{-5} = 0,67\%$$



***3. Feladat** - Tekintsük egy digitális logikai kaput, amelynek a kimenetére az 1. példa késleltető áramkörét kötjük. Hány ms-os késleltetést okoz az áramkör, ha a komparálási feszültség a tápfeszültség fele?*



Mivel a komparálási feszültség a tápfeszültség fele, mindegy, hogy melyik egyenletből számítunk (V_{DD} a tápfeszültség). $t = ?$, amikor $V_C(t) = V_{DD}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_{DD}/2$

Bekapcsolás egyenletéből:

$$V_{DD}/2 = V_{DD}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$0,5 = 1 - e^{-t/\tau} \xrightarrow{-1} 0,5 = e^{-t/\tau}$$

$$\ln 0,5 = -t/\tau$$

$$t = -\tau \cdot \ln 0,5$$

$$t_{|\tau=10\,\mathrm{ms}} = 6,93\,\mathrm{ms}$$

Kikapcsolás egyenletéből:

$$V_{DD}/2 = V_{DD} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$0,5 = e^{-t/\tau}$$

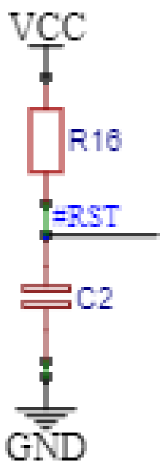
$$\ln 2 = t/\tau$$

$$t = \tau \cdot \ln 2$$

$$t_{|\tau=10\,\mathrm{ms}} = 6,93\,\mathrm{ms}$$

Valójában az ábrán jelzett tag a logika kapuk legegyszerűbb összeköttetési modellje.

***4. Feladat** - Egy RC hálózat segítségével készítünk bekapcsoláskori (Power on reset) áramkört. Mekkora legyen az ellenállás és a kondenzátor, hogy a 3,3V-os tápfeszültség ráadása után 100ms-ig még logikai alacsony szinten maradjon? A komparálási feszültség a tápfeszültség fele.*



$\tau = ?$, amikor $V_C(t) = V_{CC}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_{CC}/2$ és $t = 100\,\text{ms}$

Az előző példa eredményét felhasználva:

$$t = \tau \cdot \ln 2 = 100\,\text{ms}$$

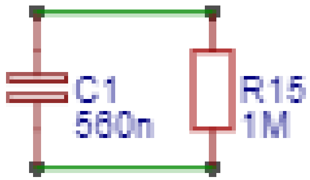
$$\tau = t / \ln 2 = 100\,\text{ms} / \ln 2 \rightarrow \ \tau = 144\,\text{ms}$$

Tehát pl. $C = 1\ \mu\text{F}$, $R = 145\ \text{k}\Omega$, de ezek nem szabványos értékek.

Szabványos értékekkel pl. $C = 680\ \text{nF}$, $R = 220\ \text{k}\Omega$, amivel kicsit túl is méreteztünk, mert:

$$\tau = RC = 220 \cdot 10^3 \cdot 680 \cdot 10^{-9} = 150\,\text{ms}, \text{ és } t = \tau \cdot \ln 2 = 104\,\text{ms}$$

5. Feladat *- Egy retrofit LED "villanykörte" kapcsolásában az 560nF kondenzátorral párhuzamosan kötnek egy 1MΩ-os ellenállást, hogy az esetlegesen csúcsfeszültségre feltöltött kondenzátor töltése kicsavarás után eltűnjön. Legrosszabb esetben mennyi idő alatt csökken a feszültség a veszélytelennek ítélt 48V-ra?*



$$\tau = RC =$$

$$= 10^{6} \cdot 560 \cdot 10^{-9} = 0{,}56\,\mathrm{s}$$

$$V_C(t) = V_C(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$48 = 325 \cdot e^{-t/\tau}$$

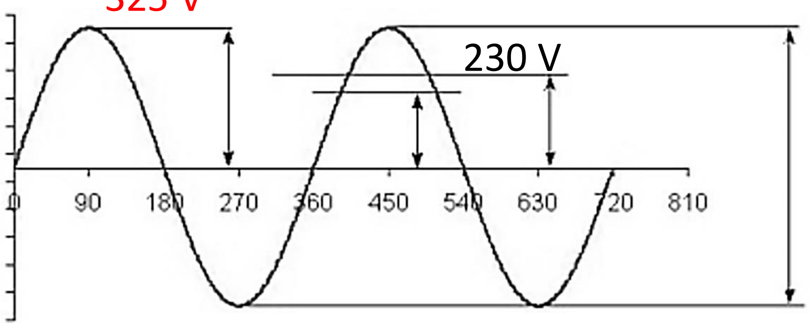
$$325/48 = e^{t/\tau}$$

$$\ln\left(325/48\right) = t/\tau$$

$$t = \tau \cdot \ln\left(325/48\right) = 1{,}07\,\mathrm{s}$$

Ennyi idő alatt kicsavarni sem tudjuk ☺

Legrosszabb esetben a kondenzátor a 230 V-os, váltakozóáramú hálózati feszültség csúcsértékére van feltöltve:



$$V_{MAX} = 230 \cdot \sqrt{2} = 325\,\mathrm{V}$$

6. Feladat *- Bizonyítsuk be, hogy egy kapacitást egy ellenálláson keresztül tetszőleges időfüggő árammal tápfeszültségre töltjük, a feltöltés hatásfoka 50%, azaz az energia felét az ellenálláson mindenféleképp eldisszipáljuk!*

A feszültségforrás által végzett munka, definíció szerint, az elektromos teljesítmény integrálja:

$$W_G = \int_0^\infty I(t)V(t)dt$$

Ha a töltőfeszültség konstans:

$W_G = V\int_0^\infty I(t)dt = V \cdot Q$ és $Q = C \cdot V$, tehát $W_G = V^2 \cdot C$

A kapacitásban tárolt energia pedig:

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

A logikai kapuk kimenetének megváltoztatása egy kapacitás feltöltését, vagy kisütését jelenti. Ez pedig energiabefektetés nélkül nem fog menni, a logikai kapuk tehát szükségszerűen fogyasztanak.