Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zárthelyi — pontozási útmutató
2015. november 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az aláírás megszerzéséhez a zárthelyiken külön-külön legalább 18 pontot, a két zárthelyin összesen legalább 48 pontot kell elérni. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy gráf csúcsai az 1 és 100 közti egész számok, két különböző számot összekötünk, ha van egynél nagyobb közös osztójuk. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

* * * * *

A páros számok klikket alkotnak a gráfban, (2 pont)
hiszen bármelyik kettőnek a legnagyobb közös osztója legalább 2. (1 pont)
A gráf klikkszáma így legalább 50, tehát a kromatikus szám is legalább 50. (1 pont)
Megadunk egy színezést 50 színnel: színezzük a k. színnel a $2k-1$ és $2k$ számokat $k = 1, 2, \dots, 50$ esetén. (3 pont)
Megmutatjuk, hogy így csakugyan a gráf egy jó 50-színezését kaptuk. Minden csúcsot megszíneztünk, egy színosztályba pedig mindig két szomszédos szám kerül, amik nincsenek összekötve a gráfban, hiszen két szomszédos szám mindig relatív prím. (2 pont)
A kromatikus szám így legfeljebb 50, a korábbi becslés miatt tehát pontosan 50. (1 pont)

2. Létezik-e 5 csúcsú, 8 élű intervallumgráf? (A választ természetesen indokoljuk is.)

* * * * *

A válasz igen, megfelelő intervallumrendszerrel megadott gráf esetén jár a 10 pont. Kétféle 5 csúcsú, 8 élű egyszerű gráf létezik, ebből az egyik (amikor két csatlakozó él hiányzik a teljes gráfból) lesz intervallumgráf. Ha valaki rájön, hogy ehhez a gráfhoz kéne intervallumrendszert keresgélni, az 3 pontot kapjon, ha arra is rájön, hogy a másik nem jó, az további 2 pont. A sikertelen, de valamennyire célirányos próbálkozásokért is járhat pont, legfeljebb 2. A feladat megoldásában valójában nem előremutató, kontextus nélküli állításokért nem jár pont.

3. A VIK-es gólyabálon 10 lány és 158 fiú vesz részt. A szervezők ennek megfelelően 10 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz. Természetesen mindenki csak olyan partnerrel hajlandó táncolni, aki szimpatikus neki. A lányokról tudjuk, hogy mindegyiküknek legalább 9 fiú szimpatikus, a fiúkról csak annyit tudunk, hogy az egyiküknek pontosan 6 lány szimpatikus (a szimpátia minden esetben kölcsönös). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 10 párt?

* * * * *

Legyen L a lányok, F a fiúk halmaza és legyen G az a páros gráf, melynek L és F az osztályai, két csúcs között pedig akkor vezessen él, ha a megfelelő fiú és lány szimpatikusnak találja egymást. A feladat annak eldöntésével ekvivalens, hogy ebben a páros gráfban van-e L-et fedő párosítás. (1 pont)
A Hall-tétel szerint ehhez elég azt belátni, hogy minden $X \subseteq L$ esetén $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ha $|X| \leq 9$, akkor ez teljesül, hiszen minden L-beli csúcs foka legalább 9. (2 pont)
Az $|X| = 10$, vagyis $X = L$ esetet kell még ellenőriznünk. (1 pont)
Ha létezik L-ben legalább 10 fokú v csúcs, akkor persze $|N(X)| \geq 10 = |X|$. (1 pont)
Ha L-ben minden csúcs foka pontosan 9, akkor elképzelhető, hogy $|N(X)| = 9$, de csak akkor, ha mind a 10 L-beli csúcs ugyanazzal a 9 F-belivel van összekötve. (2 pont)
Ekkor azonban minden F-beli csúcs foka vagy 10 vagy 0 lenne, ez pedig lehetetlen, hiszen tudjuk, hogy van F-ven 6 fokú csúcs. (2 pont)

4. Egy páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg a gráfban egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_1, a_4, a_7, a_9, b_1, b_3, b_5, b_6$ lefogó ponthalmaz G-ben (a nem érintett sorok és oszlopok kereszteződésében ugyanis minden elem 0). (4 pont)
Az $(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_7, b_7), (a_8, b_6), (a_9, b_8)$ élhalmaz egy 8 elemű párosítás. (3 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 8$, illetve $\nu(G) \geq 8$, ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 8$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (3 pont)
A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből is látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges (bár az esetleges hibák miatt mégis célszerű) ennek a lépéseit dokumentálni. Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, akkor a párosítás maximalitása mellet érvelhet úgy is, hogy már nincs több javítóút a gráfban. Hasonlóan, a javítóutas algoritmus kimeneteként kapott lefogó ponthalmaz minimalitása mellett is lehet így érvelni. Ha valaki az algoritmust használja, de hibázik, akkor próbáljuk eldönteni, hogy elvi hibáról vagy egyébről (pl. elírás) van-e szó. Az előbbi esetben szigorúan járjunk el.

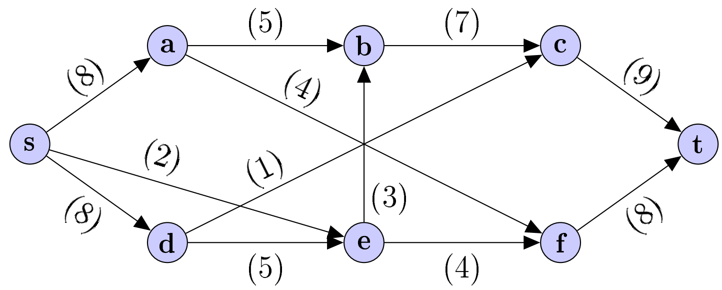
5. Egészítsük ki az előző feladat gráfját két nem csatlakozó éllel tetszőlegesen (a gráf tehát nem feltétlen marad páros vagy egyszerű). Mutassuk meg, hogy a kapott gráf élkromatikus száma legfeljebb 6.

* * * * *

Az eredeti gráf páros, így az élszínezésre vonatkozó Kőnig-tétel szerint az élkromatikus száma a maximális fokszám, vagyis 5 lesz, (4 pont)

vagyis létezik egy jó 5-élszínezése. (1 pont)
Színezzük az élek behúzása utáni gráfban az eredeti gráf éleit ennek az 5-színezésnek megfelelően, (2 pont)
az újonnan hozzávett élek pedig kapjanak egy 6. színt. (2 pont)
Ez jó élszínezés lesz, hiszen a két új él nem csatlakozó, vagyis a gráf éleit csakugyan meg tudjuk színezni jól 6 színnel. (1 pont)
Természetesen elképzelhető, hogy gráf 5 színnel is élszínezhető lesz, ezzel azonban nem kell foglalkoznunk.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 16: $f(sa) = 8, f(se) = 2, f(sd) = 6, f(ab) = 4, f(af) = 4, f(bc) = 7, f(ct) = 8, f(dc) = 1, f(de) = 5, f(eb) = 3, f(ef) = 4, f(ft) = 8$. (4 pont)
Az s, d csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az sa, se, dc, de élek összkapacitása, azaz szintén 16. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 16 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 16 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)
Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 16 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. A javítóutas algoritmus helyes alkalmazásáért akkor is komoly részpontszámok adhatók, ha a végeredmény nem helyes (persze győződjünk meg róla, hogy nem elvi hibáról van szó). Nem jár érdemi pontszám ugyanakkor találomra vett folyamok és/vagy vágások keresgéléséért, ha ez nem vezet eredményre.