Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. április 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A az alább látható mátrix. Adjuk meg az n egész paraméter azon értékeit, melyekre az A mátrix invertálható és $\det A^{-1}$ pozitív egész szám. Ezen n értékekre határozzuk is meg az A^{-1} mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & n \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az A mátrix determinánsa a harmadik oszlop szerint kifejtve $-1-n$. (1 pont)
A determinánsok szorzástétele szerint így $\det A^{-1} = \frac{-1}{n+1}$, ha az A^{-1} mátrix létezik. (3 pont)
Ez $n=0$ és $n=-2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. (1 pont)
Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét Gauss-eliminációval a szokásos módon meghatározva a $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk. (5 pont)

* * * * *

Második megoldás. Az A mátrix inverzét Gauss-eliminációval határozzuk meg. Az első fázis végén az egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ alakot ölti. (1 pont)
Ahhoz, hogy A invertálható legyen, n tehát nem lehet -1. (1 pont)
$0 \neq (n+1)$-gyel osztva, majd a Gauss-eliminációt folytatva, inverzként a

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{n+1}-3 & -\frac{6}{n+1}+2 & \frac{3}{n+1} \\ -\frac{2}{n+1}+2 & \frac{4}{n+1}-1 & -\frac{2}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. (4 pont)
A determináns kiszámításához a harmadik sor kétszeresét a második sorhoz adva, háromszorosát pedig

az első sorból levonva a

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk, (2 pont)
melynek determinánsa (ami egyenlő A^{-1} determinánsával) a harmadik oszlop szerint kifejtve $-\frac{1}{n+1}$. Ez $n = 0$ és $n = -2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. (1 pont)

Az inverz mátrix az $n = -2$ behelyettesítéssel: $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. (1 pont)

2. Legyen A 3×5-ös, B 5×3-as mátrix, melyekre teljesül, hogy AB a 3×3-as egységmátrix. Mutassuk meg, hogy A sorai függetlenek.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy A sorai nem függetlenek. Ekkor A rangja legfeljebb 2 lehet, (1 pont)
így semelyik 3 oszlopa sem lenne független, (1 pont)
más szóval A oszlopai legfeljebb 2 dimenziós teret generálnának. (1 pont)
Mivel az előadáson tanultak szerint az AB mátrix oszlopai előállnak az A oszlopainak lineáris kombinációiként, (3 pont)
AB oszlopai mind benne vannak az A oszlopai által generált térben, (1 pont)
így AB-nak legfeljebb 2 független oszlopa lehet, (1 pont)
hiszen k dimenziós térben legfeljebb k vektor alkothat független rendszert. (1 pont)
Ez ellentmondás, hiszen a 3×3-as egységmátrixnak 3 független oszlopa van. (1 pont)

3. Legyen az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa a szokásos bázisban az alább látható mátrix. Határozzuk meg $Im(\mathcal{A})$-t és $Ker(\mathcal{A})$-t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen a feladatban szereplő mátrix A. $Ker(\mathcal{A})$-ban azok az $(x, y, z)^T$ vektorok lesznek, melyeket A-val balról szorozva a $(0, 0, 0)^T$ vektort kapjuk. (1 pont)
Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, (2 pont)
melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x = y = z = 0$ adódik. (1 pont)
Így $Ker(\mathcal{A})$ egyedül a nullvektorból áll. (1 pont)
$Im(\mathcal{A})$-ban azok az $(a, b, c)^T$ vektorok lesznek, melyek előállnak úgy, hogy A-val balról szorzunk egy $(x, y, z)^T$ vektort. (1 pont)
Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, (2 pont)
melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x = a$, $y = b - a$, $z = c - b$ adódik. (1 pont)
Rögzített a, b, c értékekhez tehát mindig találtunk alkalmas x, y, z értékeket, így $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. A leképezés mátrixának oszlopai definíció szerint a bázisvektorok képeinek koordinátavektorai, így az $(1,1,1)^T$, $(0,1,1)^T$, $(0,0,1)^T$ vektorok mindhárman benne vannak $Im(\mathcal{A})$-ban. (3 pont)
Mivel ezek bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben és $Im(\mathcal{A})$ altere $\mathbb{R}^3$-nek, $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. (2 pont)
A dimenziótétel szerint $\dim Ker(\mathcal{A}) + \dim Im(\mathcal{A}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, (3 pont)
így $\dim Ker(\mathcal{A}) = 0$, (1 pont)
tehát $Ker(\mathcal{A})$ egyedül a nullvektorból áll. (1 pont)
Természetesen a dimenziótételt az első megoldás bármely felével együtt használva is teljesértékű megoldás kapható.

4. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az origóhoz az origót rendeli, minden más vektorhoz pedig az $(1,1),(2,2),(3,3)$ vektorok valamelyikét?

* * * * *

Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció és legyen $\underline{v}$ egy tetszőleges, nullvektortól különböző vektor a síkon. (1 pont)
Ekkor $\underline{v}$ képe $(1,1),(2,2)$ vagy $(3,3)$. (1 pont)
A $4\underline{v}$ vektor képe így $(4,4),(8,8),(12,12)$. (6 pont)
Mivel ezen vektorok egyike sem lehet semelyik vektor képe sem, ellentmondásra jutottunk, a kérdéses lineáris transzformáció nem létezik. (2 pont)

* * * * *

Második megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció, jelöljük $\mathcal{A}$-val. A feltétel szerint $Im(\mathcal{A})$ legalább 2 és legfeljebb 4 vektorból áll, (5 pont)
ami lehetetlen, hiszen $Im(\mathcal{A})$ altere a síknak, (2 pont)
az alterek pedig vagy 1 vagy végtelen sok vektort tartalmaznak, hiszen bármely (nullától különböző) altérbeli vektornak minden számszorosa is benne lesz az altérben. (3 pont)

5. A sík egy lineáris transzformációja az $(1,0)$ vektorhoz a $(4,2)$ vektort rendeli, a $(0,2)$ vektorhoz pedig az $(3,4)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait.

* * * * *

A lineáris transzformáció a $(0,1)$ vektorhoz a $(\frac{3}{2},2)$ vektort rendeli. (1 pont)
A transzformáció mátrixa tehát a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)
A karakterisztikus polinom ez alapján (a nevet nem kell feltétlen tudni)

$$\det \begin{pmatrix} 4-x & \frac{3}{2} \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} = (4-x)(2-x) - 3.$$

(1 pont)
Ennek gyökei 1 és 5, (1 pont)
ezek lesznek a mátrix, és így a lineáris transzformáció sajátértékei. (1 pont)
A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert és a $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert. (2 pont)
Az első esetben a $2x+y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként (egy ilyen pl. a $(-1,2)$), ezek tartoznak az 1 sajátértékhez, (1 pont)
a második esetben pedig a $2x-3y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok (egy ilyen pl. a $(3,2)$), ezek tartoznak az 5 sajátértékhez. (1 pont)
Elméletileg le kellene még írni, hogy a lineáris transzformáció sajátértékei és sajátvektorai(nak

koordinátavektorai) miért épp azok, mint a mátrix sajátértékei és sajátvektorai, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.

6. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós és a képzetes része is pozitív.

$$(5+\sqrt{3}i)z^5 = 8-4\sqrt{3}i$$

* * * * *

Mindkét oldalt $(5+\sqrt{3}i)$-vel osztva az (eredetivel ekvivalens) $z^5 = 1-\sqrt{3}i$ egyenletet kapjuk. (2 pont)
$1-\sqrt{3}i$ hossza 2, (1 pont)
az x tengellyel bezárt szöge pedig $300°$, (2 pont)
trigonometrikus alakja tehát $2\cdot(\cos 300° + i\sin 300°)$. (1 pont)
Így az ötödik gyökeinek hossza $\sqrt[5]{2}$, (0 pont)
az ötödik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig $60°, 132°, 204°, 276°, 348°$. (2 pont)
Ezek közül egyedül a $60°$ szögű gyöknek pozitív a valós és a képzetes része is, (1 pont)
ennek trigonometrikus alakja $\sqrt[5]{2}(\cos 60° + i\sin 60°)$, algebrai alakja tehát $\frac{\sqrt[5]{2}}{2} + \frac{\sqrt[5]{2}\sqrt{3}}{2}i$. (1 pont)