Alkalmazott algebra - bevezető

Ivanyos Gábor

2011 ősz

A Pagerank-ről 2

- Sergey Brin, Larry Page (1998)
- eljárás weblapok rangsorolására
- a linkek alapján készült gráf elemzésével

Első megközelítés 3

- **Elv:** az a lap az értékes, amelyre sok értékes lap mutat.
- n weblap
- i. lap súlya (értéke) a t-edik időpontban: v_i^t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$
- kezdetben $v_i^0 = \frac{1}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $t \to t+1$ időpont:

$$v_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^t,$$

- ahol $a_{ij} = \frac{\#j \to i \text{ linkek}}{\#j \to \text{ linkek}}$
- $\sim$ milyen valószínűséggel merre jár a linkek mentén véletlenül továbblépő szörfölő

Első megközelítés 4

- vektor/mátrix segítségével: $v^t = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$,

$$v^{t+1} = Av^t$$

- az "ideális" weblap-súlyok vektora:

$$v^\infty = \lim_{t\to\infty} v^t, \qquad \text{ha létezik}$$

- Problémák:
  - vannak weblapok, ahonnan nincs egy link se
  - lehetnek weblapokból álló csoportok, ahonnan nincs kiút
  - lehet ilyen csoport pl. egy irányított kör
    ekkor csak kivételes v^0-kra van konvergencia!

Módosított modell - a türelmetlen szörfölő 5

- **Módosított mátrix:** A helyett

$$A' = (1-\alpha)A + \alpha\frac{1}{n}E,$$

ahol $E = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

- Szemléletesen: a türelmetlen szörfölő α valószínűséggel megunja a barangolást, és egy véletlenül választott lapra lép.
- Erre már létezik

$$\lim_{t\to\infty} v^t := \lim_{t\to\infty} A'^t v^0$$

- **Pagerank** rangsora $A'^K v_0$ súlyai szerint, ahol K elég nagy.

Test 6

- **Informálisan:** Egy négy alapművelettel $(+, -, \cdot, /)$ ellátott halmaz, amelyen a racionális számokon megszokott azonosságok teljesülnek.
- **Formálisan:** egy $\mathbb{F}$ halmaz két művelettel és két (különböző) kitüntetett elemmel: $+, \cdot$ illetve $0, 1$, amelyekre
  1. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})$ (*asszociativitás*)
  2. $x+y = y+x$, $x\cdot y = y\cdot x$ $(\forall x, y \in \mathbb{F})$ (*kommutativitás*)
  3. $0+x = x$, $0\cdot x = 0$, $1\cdot x = x$ $(\forall x \in \mathbb{F})$ (0 *neutrális elem*, 1 *egységelem*)
  4. $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})$ (*disztributivitás*)
  5. $\forall x \in \mathbb{F}$-re van $(-x) \in \mathbb{F}$, hogy $x+(-x) = 0$,
     $\forall 0 \neq x \in \mathbb{F}$-re van $x^{-1} \in \mathbb{F}$, hogy $x\cdot x^{-1} = 1$,
     ($+$-ra minden, $\cdot$-ra minden nem-nulla elemnek van inverze)
- **Kivonás, osztás:** Belátható, hogy $-x$ és x^{-1} egyértelmű. $x-y := x+(-y)$ és $x/y := x\cdot y^{-1}$.

Példák testekre 7

- $\mathbb{Q}$ racionális számok
- $\mathbb{R}$ valós számok
- $\mathbb{C}$ komplex számok
- $\mathbb{Z}_p$ vagy $\mathbb{F}_p$: egész számok modulo p prím
  $\mathbb{Z}_2$ másképpen: $\{1 = \text{"igaz"}, 0 = \text{"hamis"}\}$
  $+$ = "kizáró vagy", $\cdot$ = "és".
- $\mathbb{F}_q$, q elemű test, ahol $q = p^r$ (p prím). Lényegében (azaz: izomorfia erejéig) egyértelmű.
- **Feladat:** legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. Ekkor létezik egy (és csak egy) olyan p prímszám, hogy $1 + \ldots + 1(p\text{-szer}) = 0$.

Polinomok 8

- ***n*-ed fokú egyváltozós polinom:**
  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{F},\ a_n \neq 0)$.
- **gyök** olyan $\alpha \in \mathbb{F}$, amelyre $f(\alpha) = 0$.
- **Fontos tul.:** Egy n-ed fokú polinomnak legfeljebb n gyöke van.
- **Algebra alaptétele:** Minden komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben (multiplicitással számolva összesen fokszámnyi)

Vektortér $\mathbb{F}$ felett

- Egy V halmaz
  - $+ : V \times V \to V$ (*összeadás*) művelettel,
  - kitüntetett 0 elemmel,
  - $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ (skalárokkal való *szorzás* vagy *beszorzás*) művelettel,
- amelyekre:
  - $+$ kommutatív és asszociatív, 0 neutrális elemmel,
  - $\cdot$ asszociatív: $(x \cdot y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$ $(x, y \in \mathbb{F}, v \in V)$
  - $\cdot$ mindkét oldalról disztributív: $(x+y)\cdot(u+v) = x \cdot u + y \cdot u + x \cdot v + y \cdot v$ $(x, y \in \mathbb{F}, u, v \in V)$
- Megj.: Additív inverz V-ben: $-v := (-1) \cdot v$.
- **Fontos példa:** az n hosszú oszlopvektorok $\mathbb{F}^n$ tere

Példák

- S halmaz, $S \to \mathbb{F}$ függvények; értékek szerinti összeadással és beszorzással.
  $\sim$ S elemeivel indexelt táblázatok, $\mathbb{F}$–beli elemekkel kitöltve.
- Spec. eset: $n \times m$-es mátrixok $\mathbb{F}$–beli elemekkel. Műveletek elemenként.
- Speciális eset: $m = 1$, n hosszú **oszlopvektorok.**
- Polinomok. (Összeadás, beszorzás érték szerint ugyanazt adják, mintha az együtthatókon külön-külön hajtanánk végre.)
- n-nél alacsonyabb fokú polinomok.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.
- $\mathbb{C}$ az $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ felett.

Alterek

- **Lineáris kombináció:** $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, ahol $0 \neq v_i$ és $v_i \neq v_j$ ha $i \neq j$.
  Megj. Mindig véges sok tagból álló összeg! Az üres összeg is lin. komb., értéke 0.
- **Altér:** $U \subseteq V$ altere V-nek (jel. $U \leq V$), ha $0 \in U$ is zárt a műveletekre: $u, v \in U, \alpha \in \mathbb{F}$ esetén $u + v, \alpha u \in U$.
  Ekvivalens feltétel: U zárt a lineáris kombinációkra is.
- **Példák:**
  - A legszűkebb altér: $\{0\} = (0)$ (hanyagul: 0),
  - a legtágabb: V.
  - origón átmenő síkok, egyenesek $\mathbb{R}^3$-ben
  - polinomok, folytonos függvények, stb. altere a függvények terében
  - homogén lineáris n-változós egyenletrendszerek megoldásai $\mathbb{R}^n$-ben (Spec. eset: hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: egy nem-triviális n változós homogén lineáris egyenlet megoldásai)

Generált (kifeszített) altér

- $S \subseteq V$-re $\langle S \rangle$ a legszűkebb altér, amely tartalmazza S-t.

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S \right\}.$$

- $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, $\langle v \rangle = \langle \{v\} \rangle = \{\alpha v | \alpha \in \mathbb{F}\}$.
- **További példák:**
  - polinomok között az $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ monomok az n-nél alacsonyabb fokú polinomok alterét generálják
  - **Feladat:** Mely alteret feszítik ki a következő polinomok: $x^3 + x^2 + x$, $x^3 + 2x^2 + 3x$, $x^3 + x$, $x^3 + 3x^2$?

Lineáris függetlenség

- $S \subseteq V$ lineárisan független, ha $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, α_i, v_i $(i = 1, \ldots n)$ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ esetén az összes $\alpha_i = 0$.
- $\emptyset$ lineárisan független, $\{0\}$ lineárisan összefüggő.
- **Áll.:** Ha S lineárisan független, de $S \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő, akkor v (egyértelműen) előáll S–beli elemek lineáris kombinációjaként.
- **Példa:** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ lineárisan függetlenek:

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha+\beta\\ \alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}.$$

Lineáris függetlenség

- **Példa:** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ lineárisan összefüggenek:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0.$$

- **Kapcsolat a generált alterekkel:** $S \subseteq V$ lineárisan független $\iff$ S egy irredundáns (tartalmazásra minimális) generátorrendszere az $\langle S \rangle$ altérnek.
- **Feladat:** Lineárisan függetlenek-e a következő polinomok: $x^3 + x^2 + x$, $x^3 + 2x^2 + 3x$, $x^3 + x$, $x^3 + 3x^2$?

Bázis

- Olyan lineárisan független rendszer, amely generálja V-t.
- **Ekvivalens jellemzések:**
  - minimális generátorrendszere V-nek,
  - maximális lineárisan független rendszer V-ben,
  - minden v–beli elem **egyértelműen felírható** a rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként.
- **Megj.:** Sorba rendezzük a bázis elemeit, különböző sorrend $\to$ különböző bázis.
- **Példák:**
  - standard bázis $\mathbb{F}^n$-ben $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$
  - polinomok közt $1, x, x^2, \ldots$

Dimenzió

- $\dim V$, pontosabban $\dim_{\mathbb{F}} V = V$ egy bázisának elemszáma (számossága).
- független a bázis választásától
- **Példák:**
  - ha S véges, akkor $\dim\{S \to \mathbb{F}$ függvények$\} = |S|$
  - spec. eset: $\dim\{n \times m$-es mátrixok$\} = nm$
  - $\dim\{$polinomok$\} = \infty$ (megszámlálható)
  - $\dim\{n$-nél alacsonyabb fokú polinomok$\} = n$
  - $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$ (kontinuum)
  - Ha $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, akkor $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

Az órán általában **csak véges dimenziós** vektorterekkel foglalkozunk.

Lineáris leképezések
17

- V, W vektorterek $\mathbb{F}$ felett. A $\phi : V \to W$ lekép. **lineáris**, ha
$$\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2).$$
- **Konvenció:** elhagyjuk a zárójelet: $\phi v := \phi(v)$.
- **Fontos példa:** A $m \times n$-es mátrix $\mathbb{F}$-beli elemekkel.
$$\phi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \quad \phi_A v := Av.$$
- **Vektortér-műveletek:** $\phi, \phi' : U \to W$ esetén $(\alpha\phi + \phi')v := \alpha(\phi v) + (\phi' v)$.
- **Kiterjesztés bázisról:** Ha $v_1, \ldots, v_n$ egy bázis V-ben; $w_1, \ldots, w_n \in W$, $\exists! \phi : V \to W$ lin. lekép., hogy $\phi v_i = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$: $\phi \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.
- A $V \to W$ lin. lekép. terének dimenziója $\dim V \cdot \dim W$.

Lineáris leképezések
18

- **Speciális esetek:**
Lineáris függvény: $V \to \mathbb{F}$ lin. lekép.
Lineáris transzformáció: $V \to V$ lin. lekép.
- **Példák:**
  - $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ rögzített oszlopvektor.
    - A $v \mapsto u^T v$ egy lineáris függvény $\mathbb{R}^n$-en.
    - A $v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ egy lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-en: az u-ra merőleges hipersíkra történő vetítés.
    - A $v \mapsto v - 2\frac{u^T v}{u^T u} u$ pedig az u-ra merőleges hipersíkra való tükrözés
  - Az $I_V : v \mapsto v$ a V tér identikus lineáris transzformációja.
  - Rögzített $a \in \mathbb{F}$. Ekkor az $f(x) \mapsto f(a)$ egy $\mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}$ lineáris függvény.

Képtér, magtér
19

$\phi : V \to W$ lineáris leképezés
- ϕ **képtere** a
$$\phi V = \{\phi v | v \in V\}$$
halmaz. Ez altér W-ben.
(Szokásos még az $\operatorname{Im}\phi$ jelölés is.)
ϕ *szürjektív*, ha $\phi V = W$
- ϕ **magja** (magtere) a
$$\ker \phi := \{v \in V | \phi v = 0\}$$
halmaz. Ez altér V-ben.
ϕ *injektív*, ha $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ csak $v_1 = v_2$ esetén teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy $\ker \phi = (0)$.
- **Példa:** $u \in \mathbb{R}^n$, $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ vetítés. $\ker \pi = \mathbb{R}u$, $\pi\mathbb{R}^n = u^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | u^T v = 0\}$.

Dimenziótétel
20

$\phi : V \to W$ lineáris leképezés
- **Dimenziótétel:** $\dim \phi V = \dim V - \dim \ker \phi$.
- **Izomorfizmus:** A $\phi : V \to W$ lineáris lekép. izomorfizmus V és W között, ha ϕ bijektív, azaz egyszerre injektív és szürjektív.
Ekkor a $\phi^{-1} : W \to V$ **inverz** leképezés is lineáris (és így izomorfizmus).
$V \cong W$, ha létezik $\phi : V \to W$ izomorfizmus.
$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.
A dimenziótételből adódik:
- **Egy egyszerű izomorfizmus-kritérium:** $\phi : V \to W$ lin. lekép. izomorfizmus $\Leftrightarrow \ker \phi = (0)$ és $\dim V = \dim W$.

Alkalmazás: Lagrange-interpoláció
21

- $V = \{n\text{-nél} < \text{fokú } \mathbb{F} \text{ feletti polinomok}\}$
- rögzített $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ ($a_i \neq a_j$ ha $i \neq j$)
- **Behelyettesítés:** $\phi : V \to \mathbb{F}^n$ a következő lin. lekép. a köv.:
$$\phi f(x) := \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$$
- ϕ **lineáris**, mert minden összetevője az.
- $\ker \phi = (0)$
(n-nél alacsonyabb fokú nem 0 polinomnak nem lehet n kül. gyöke)
- $\dim V = n = \dim \mathbb{F}^n$
az előző kritérium miatt
- ϕ **izomorfizmus**, létezik tehát inverze.

Alkalmazás: Lagrange-interpoláció
22

- **Interpoláció:**
Tétel: ($a_1, \ldots, a_n$ páronként kül. $\in \mathbb{F}$), tetsz. $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ esetén $\exists!$ $f(x)$ n-nél $<$ fokú pol., amelyre:
$$f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n.$$
- **konkrétan:**
$$f(x) = \phi^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
- **Megj.:** Spec. eset: Diszkrét Fourier Transzformáció (**DFT**), ld. később
- **Megj.:** Ha $n + d$ helyen helyettesítünk be, akkor $f(x)$ rekonstruálható az $n + d$ közül bármely n helyen felvett értékéből. Fontos **hibajavító kódok** működnek ezen az elven.

Alkalmazás: A Shamir-féle titokmegosztás
23

- **A feladat:** n résztvevő között osszunk szét egy titkot, hogy
- semelyik $n - 1$ ne tudja együtt se kitalálni,
- de az n résztvevő együtt ki tudja találni
- **A titok:** egy $\mathbb{F}$ véges test egy eleme, ahol $|\mathbb{F}| > n$)
- **Előkészület:** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ($\alpha_i \neq \alpha_j$)
i-edik résztvevőé α_i (nyilvánosan)
- **Titokmegosztás:**
  - Tfh. a titok β.
  - $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ véletlen elemek $\mathbb{F}$-ből (függetlenül, egyenletes eloszlással)
  - $f(x) = f_{\beta,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}}(x) := \beta + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x^i$
  - i-edik résztvevő kapja $f(\alpha_i) - t$ (privát csatornán)

A Shamir-féle titokmegosztás
24

- **Együtt kitalálják:** $f(x)$ interpolálható az n helyen felvett értékből, $\beta = f(0)$.
- **Kevesebben nem találják ki:** (pl. az első $n - 1$ a véletlen tippnél jobbat nem tud)
$$\phi : \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$
- $\phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ bijekció. mert $\ker \phi = (0)$.

A Shamir-féle titokmegosztás 25

- Ezért minden rögzített β-ra

$$\phi_\beta : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$

- is bijekció $\mathbb{F}^{n-1}$ és $\mathbb{F}^{n-1}$ között.
- Így az $\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$ vektor egyenletesen véletlen $\mathbb{F}^{n-1}$-ből, β-tól teljesen függetlenül.
- Azaz: minden β-ra ugyanaz az $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{n-1})$ értékek eloszlása.

Kompozíció, inverz 26

- $\phi : V \to V', \phi' : V' \to V''$ lin. lekép.
- Ekkor $\phi'\phi : V \to V''$ is lin.

$$(\phi'\phi)v = \phi'(\phi v)$$

- Asszociatív:
  ha még $\phi'' : V'' \to W$ akkor $\phi''(\phi'\phi) = (\phi''\phi')\phi$
- Mindkét oldalról lineáris:
  $(\alpha_1\phi_1' + \alpha_2\phi_2')(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2) = \alpha_1\beta_1\phi_1'\phi_1 + \alpha_1\beta_2\phi_1'\phi_2 + \alpha_2\beta_1\phi_2'\phi_1 + \alpha_2\beta_2\phi_2'\phi_2.$
- **Inverz:** $\phi^{-1} : V' \to V$, ha ϕ bijektív.
- **Inverz tul.:** $(\phi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\phi^{-1}$ és $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$.
- **Hatványozás:** Tfh. $\phi : V \to V$. Ekkor $\phi^n = \phi \cdots \phi$ (n-szer).

Mátrixok, formális műveletek 27

- $m \times n$-es mátrixok $\sim$ $m \times n$-es táblázatok $\mathbb{F}$–beli elemekkel.
- $m \times n$ dimenziós vektortér (műveletek elemenként)
- **Mátrixszorzás:** Ha $A = (a_{ij})$ $m \times \ell$-es, $B = (b_{ij})$ $\ell \times n$-es, akkor $AB = (d_{ij})$ $m \times n$-es:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}, \ (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

- Azaz: AB i-edik sorának j-edik eleme az A i-edik sorának és a B j-edik oszlopának a "skaláris szorzata".
- **Szorzás tul.:** A szorzás asszociatív és mindkét változójában lineáris.
- **Vigyázat:** Nem kommutatív, sőt gyakran nem is végezhető el a szorzás a fordított sorrendben.

Mátrixok: példák 28

- **diagonális mátrixok:**

$$diag(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

- $diag(a_1, \ldots, a_n) diag(b_1, \ldots, b_n) = diag(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, zárt a szorzásra, felcserélhetőek
- **egységmátrix:** $I_n = diag(1, \ldots, 1)$ (n darab 1-es)
- **négyzetes felső háromszög-mátrixok**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Zárt a szorzásra

További felső háromszög-mátrixok 29

- "lapos" ($m < n$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * & * \\ & a_{22} & * & * & * & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{mm} & * & * \end{pmatrix}$$

- "magas" ($m > n$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Transzponált mátrix 30

- ha $A = (a_{ij})$ $m \times n$-es, akkor $A^T = (a'_{ij})$ $n \times m$-es, ahol

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

- **Tul.:** Ha A $m \times n$-es, B $n \times k$-as, akkor

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

- Felső háromszög transzponáltja alsó háromszög

Blokk-mátrixok szorzása 31

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\ell} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{12} & \ldots & A_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & \ldots & B_{2n} \\ B_{31} & \ldots & B_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & \ldots & B_{\ell n} \end{pmatrix},$$

ahol a blokkméretek kompatibilisek. Ekkor

$$AB = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{12} & \ldots & D_{mn} \end{pmatrix},$$

ahol

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} A_{ik} B_{kj}.$$

Vigyázat: a blokkok szorzása általában nem kommutatív!
Hasznos, ha 0-blokkok vannak, pl. blokk felső háromszög.

Strassen algoritmusa mátrixszorzásra 32

A, B $2^n \times 2^n$-es, felosztva $2^{n-1} \times 2^{n-1}$-es blokkokra:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B12 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

ahol
$D_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$,
$D_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$,
$D_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$,
$D_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$.

Strassen-mátrixszorzás - 7 szorzat

$T_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$,
$T_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$,
$T_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$,
$T_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$,
$T_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$,
$T_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$,
$T_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$.
Ezekkel:
$D_{11} = T_1 + T_4 - T_5 + T_7$,
$D_{12} = T_3 + T_5$,
$D_{21} = T_2 + T_4$,
$D_{22} = T_1 - T_2 + T_3 + T_6$.

Strassen-mátrixszorzás - rekurzió

- Költség: 7 db. 2^{n-1}-es mátrixszorzás, 18 db. összeadás - kivonás
- $K_n = 7K_{n-1} + c4^{n-1}$
- $K_n = O((7 + o(1))^n)$
- $N \times N$-es mátrixokra ($N \sim 2^n$):

$$O(N^{\log_2 7 + o(1)}) = O(N^{2.808})$$

Lineáris leképezés mátrixa

- $\phi : V \to W$ lin. lekép. $v_1, \dots v_n$ bázis V-ben, $w_1, \dots, w_m$ bázis W-ben. Ekkor minden $1 \le j \le n$-re

$$\phi v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_j$$

- ϕ mátrixa (a fenti bázispárra) $A = (\alpha_{ij})$.
- lin. transzformációra ($V = W$) egyetlen (közös) bázis a szokás ($w_i = v_i$).
- **Példa: permutációmátrix:** π permutáció, $\phi v_j = v_{\pi(j)}$.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = \pi(j) \\ 0, & \text{ha } i \neq \pi(j) \end{cases}$$

Minden sorban és oszlopban egyetlen 1-es, a többi 0.

Példa permutációmátrixra

- az $(12 \dots n)$ ciklus mátrixa

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Mátrixhoz tartozó lineáris leképezés:

- $v_1, \dots v_n$ bázis V-ben, $w_1, \dots, w_m$ bázis W-ben, A $m \times n$-es mátrix.
- Ekkor $\exists! \phi : V \to W$, aminek A a mátrixa (a fenti bázispárra).
- **Megj.:** $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

és $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, w_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ esetén ez a ϕ éppen a korábban már említett ϕ_A, az oszlopvektorok A-val balról szorzása. Ezután ϕ_A helyett gyakran A.

Műveletek leképezésekkel ill. mátrixaikkal

- összeadás $\leftrightarrow$ összeadás
- skalárral való szorzás $\leftrightarrow$ skalárral való szorzás (= skalármátrixszal való szorzás)
- kompozíció $\leftrightarrow$ mátrixszorzás
- **Inverz:** A $n \times n$-es. A **invertálható**, (**reguláris, nemelfajuló, nem-szinguláris**) ha a ϕ_A bijektív. Ekkor A^{-1} a $(\phi_A)^{-1}$ mátrixa a standard bázisban.
- Ha A invertálható, akkor $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- **Képtér:** A (azaz ϕ_A) képtere az A oszlopai által generált altér
- **Köv.:** A $n \times n$-es invertálható $\Leftrightarrow$ oszlopai lin. függetlenek

Példa: Vandermonde-mátrix

- $V = \{$az n-nél $<$ fokú polinomok$\}$, $W = \mathbb{F}^n$.
- Bázisok: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, ill. a standard.
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ páronként kül. $\phi : V \to \mathbb{F}^n$ behelyettesítés

$$\phi : f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$$

- ϕ mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Tudjuk: ϕ izomorfizmus, így M invertálható (és az inverze a Lagrange-interpoláció mátrixa).

Báziscsere, hasonló mátrixok

- $v_1, \dots, v_n$ ill. $v_1' \dots, v_n'$ bázisok
- **Báziscsere mátrixa** $C = (c_{ij})$

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i$$

(C a $v_j \mapsto v_j'$ lin. transzf. mátrixa $v_1, \dots, v_n$-ben)
- $\phi : V \to V$ lin. transzf. mátrixa $v_1, \dots, v_n$-ben A
- ϕ mátrixa $v_1', \dots, v_n'$-ben

$$C^{-1}AC.$$

- **Megj.:** különböző terek közti lin. leképezésekre két cserematrix van

Báziscsere - példa

- legyen
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$
- ahol A, B, C, D $n \times n$-es mátrixok.
- **Báziscsere:** $1. \leftrightarrow n+1., \ldots, n. \leftrightarrow 2n.$, mátrixa
$$T = \begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix}.$$
- Mivel $T^2 = I_{2n}$, $T^{-1} = T$.
- A blokk-mátrixok szorzását használva:
$$\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$
- Például a $B = 0$ esetben M alsó blokk-háromszög mátrix, amiből a báziscsere felső blokk-háromszög mátrixot csinál.

Hasonló mátrixok

- A, A' $n \times n$-es hasonlóak ($A \sim A'$), ha létezik C invertálható, hogy $A' = C^{-1}AC$.
- ugyanannak a lin. transzformációnak a mátrixai csak más-más bázisban
- Az A-val való balról szorzás mátrixa a standard bázisban A a C oszlopaiból álló bázisban $C^{-1}AC$.
- $A \mapsto C^{-1}AC$ leképezés kompatibilis a mátrixműveletekkel:
$$C^{-1}(\lambda A + \mu B)C = \lambda C^{-1}AC + \mu C^{-1}BC,$$
$$C^{-1}ABC = C^{-1}ACC^{-1}BC.$$

Determináns

- **Permutáció előjele:**
  - $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutáció (bijekció)
  - (i, j) inverzió π-re, ha $1 \leq i < j \leq n$ és $\pi(i) > \pi(j)$
  - $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{inverziók száma}}$
  - multiplikatív: $\operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)$.
- **Determináns:** $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es
$$\det A = \sum_{\pi \text{ perm}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$
- $n!$ tag van
- permutációmátrixra: Ha P π mátrixa, akkor $\det P = \operatorname{sgn}(\pi)$.

Példák

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-ra $\det A = ad - bc$.
- $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$
$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$
- Egy alsó vagy felső háromszögmátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata.
- Ha $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ahol A és C négyzetes, akkor $\det M = \det A \cdot \det C$.
- Ha $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, akkor
$$\det A = \det B = \det C = \det D = 0,$$
míg $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -abcd$, tehát $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ általában nem fejezhető ki pusztán $\det A$,$\det B$,$\det C$,$\det D$-vel.

Elemi tulajdonságok

- **Transzponált determinánsa:** $\det A^T = \det A$
- **Kifejtési tétel (Laplace):** $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es. Minden egyes (i, j)-re C_{ij} az az $(n-1) \times (n-1)$-es, amely A-ból az i-edik sor és a j oszlop elhagyásával adódik.

  Tetsz. i-re és j-re:
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det C_{ik}.$$
- **Linearitás oszlopok szerint:** Minden egyes $j$re és $v \in \mathbb{F}^n$ vektorra $A_j(v)$ az a mátrix, ami az A mátrixból j-edik oszlopának v-vel való helyettesítésével kapható.

  Ekkor $\det A_j(\lambda u + \mu v) = \lambda \det A_j(u) + \mu \det A_j(v)$.
- Linearitás sorok szerint…

Elemi tulajdonságok

- **Köv. (Nullákból álló oszlop (sor)):** Ha van ilyen, akkor a determináns 0.
- **Skalárszoros oszlopok** Ha A-nak van két olyan oszlopa (sora), hogy az egyik a másik skalárszorosa, akkor $\det A = 0$.
- **Sor- és oszlopműveletek hatása:** $\det A$
  - marad, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk egy másik oszlopának (sorának) skalárszorosát.
  - marad, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk néhány, tőle különböző indexű oszlopának (sorának) egy tetszőleges lineáris kombinációját.
  - α-vak szorzódik, ha A egy oszlopát (sorát) α-val beszorozzuk.
  - előjelet vált (-1-gyel szorzódik), ha A két oszlopát megcseréljük.
- $\Rightarrow$ **számolható Gauss-eliminációval**
- $\Rightarrow$ **Szinguláris mátrix determinánsa** 0

Szorzat determinánsa

- **Determinánsok szorzástétele:** Ha A és B $n \times n$-es mátrixok, akkor
$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$
- **Köv. (Inverz determinánsa):** Ha A invertálható, akkor $\det A \neq 0$ és
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
- **Köv. (Hasonló mátrixok determinánsa):** $\det(C^{-1}AC) = \det A$.
- **Lineáris transzformációk determinánsa:** Bármely bázis szerinti mátrix determinánsa.

Inverz mátrix előjeles aldeterminánsokkal

- $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es.
- C_{ij} az A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával adódó $n-1 \times n-1$-es mátrix
- (i, j)-edik előjeles aldetermináns $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$.
- Ha A invertálható és $A^{-1} = (a'_{ij})$, akkor
$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det C_{ji}}{\det A}.$$
- **Figyelem:** C_{ji}, nem C_{ij}!

Mátrixok rangja

- **Lin. független oszlopok max. száma** (A képtér dimenziója)
- **Max. méretű. invertálható négyzetes részmátrix**
- **Lin. független sorok max. száma**

Lineáris egyenletrendszer

- $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$
- másképpen: $Ax = b$,

  ahol $A = (a_{ij})$ $m \times n$-es, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.
- Az egyenletrendszer **mátrixa** A,
- a **kibővített mátrixa** az $(A|b)$ $m \times (n+1)$-es.

A Cramer-szabály

$m = n$ és tfh. A invertálható.

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

ahol $A_j(b)$: A j-edik oszlopát helyettesítjük a b oszlopvektorral.

nem praktikus

Megoldás Gauss-eliminációval

- Összetevők: Ekvivalens egyenletrendszert kapunk, ha
  - egy egyenlethez egy másik egyenlet skalárszorosát adjuk
  - egyenletet egy skalárral beszorozzuk
  - átrendezzük az egyenletek sorrendjét
  - átrendezzük a változók sorrendjét

  Az első három összetevő a determinánsnál már alkalmazott sorműveleteknek felel meg, az utolsó az oszlopok cseréjének.
- **Első iteráció**
  - Legelső lépés: cserékkel elérhető, hogy $a_{11} \neq 0$.
    Az első egyenlet segítségével x_1-et kiküszöböljük a többi egyenletből.
  - Folytatjuk a többi egyenlettel, a többi változóra
- Az üres egyenletekkel ($0 = 0$) nem törődünk
- Ha lett $0 = b_i$ egyenlet, ($b_i \neq 0$), nincs megoldás

Gauss-elimináció II.

- Az első menet után felső háromszög alakú:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- **Második iteráció:** A főátló feletti részt kiküszöböljük:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gauss-elimináció III.

- Majd leosztunk az átlós együtthatókkal:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- **Eredmény:** $x_{m+1}, \ldots, x_n$ szabad paraméterek,

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ x_2 &= b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_m &= b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Példa

Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

A kibővített mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Példa II

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Az első sort levonjuk másodikból

Példa III

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk a negyedikből

Példa IV

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk az ötödikből

Példa V

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A harmadik sort levonjuk a negyedikből

Példa VI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az utolsó sor a $0 = 1$ ellentmondásnak felel meg, ez az egyenletrendszer tehát **nem megoldható**.

Példa VII

Tfh. az $x_2 + x_5 = 1$ egyenlet helyett az $x_2 + x_5 = 0$ áll. Ekkor az eddigi lépések eredménye

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Levonjuk a második sort az elsőből:

Példa VIII

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A megoldás: x_4, x_5 tetszőleges és $x_1 = x_5 + 1$, $x_2 = x_5$, $x_3 = x_4 + 1$.

Gauss-elimináció további alkalmazásai

- Rang számolása
- Determináns számolása

  Ezekhez elegendő az első iterációs menet

Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek

- $\phi : V \to V$ lin. transzf.
- $0 \neq v \in V$ sajátvektora ϕ-nek $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátértékkel, ha $\phi v = \lambda v$.
- **Példa:** Legyen $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $v_{t+1} = \phi v_t$ (mint pl. Pagerank-nél.) Tfh. létezik
  $$v = \lim_{t\to\infty} v_t \text{ és } v \neq 0.$$
  Ekkor v sajátvektora ϕ-nek 1 sajátértékkel.
  - **Biz.** $v_{t+1} = \phi v_t$
  - $v \mapsto \phi v$ folytonos
  - $\lim_{t\to\infty} v_{t+1} = \phi \lim_{t\to\infty} v_t$
  - $v = \phi v$.
- **Sajátaltér:** a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a 0-val együtt.
- **Példa:** ϕ szinguláris $\Leftrightarrow$ 0 egy sajátértéke. Ekkor a magtér a megfelelő sajátaltér.

Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek -példa 65

$\mathbb{R}^n$-en $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ vetítés

- 1 egy sajátérték, ha $n > 0$. Ekkor a sajátaltér $u^\perp$
- 0 sajátérték, u egy sajátvektor
- $u^\perp$-en és $\langle u \rangle$-n kívül nincs más sajátvektor: Tfh. $v = \alpha u + w$ sajátvektor $0 \neq \lambda$ sajátértékkel. Ekkor

$$\lambda\alpha u + \lambda w = \lambda v = \pi v = \pi\alpha u + \pi w = w,$$

így $\alpha = 0$ és $\lambda = 1$.
- $n > 1$: két sajátérték: 1 és 0, a két sajátaltér $u^\perp$ és $\langle u \rangle$.

Sajátalterek együttesen 66

- **Alterek lineáris függetlensége:** $(0) \neq W_1, \ldots, W_s \leq V$ lin. függetlenek, ha $w_1 + \ldots + w_s = 0$ $(w_i \in W_i) \Rightarrow w_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$
- $v_1, \ldots, v_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow \langle v_1 \rangle, \ldots, \langle v_s \rangle$ lin. ftlenek
- **Áll.:** $(0) \neq W_1, \ldots, W_s \leq V$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow$ $\dim\langle W_1, \ldots, W_s \rangle = \dim W_1 + \ldots + \dim W_s$
- **Áll.: A sajátalterek lin. ftlenek.:** $\phi v_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $v_1 + \ldots + v_s = 0 \Rightarrow v_1 = \ldots = v_s = 0$.
  - **Biz.** indukció s szerint. $s = 1$-re triviális.
  - $s > 1$: $v_1 + \ldots + v_s = 0$. Ekkor
  - $0 = \phi(v_1 + \ldots + v_s) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$, ugyanakkor
  - $0 = \lambda_1(v_1 + \ldots + v_s) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_1 v_s$. Kivonva:
  - $(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_s - \lambda_1)v_s = 0$. Innen
  - az indukciós feltevés miatt $(\lambda_i - \lambda_1)v_i = 0$, így $v_i = 0$ $(i > 1)$.
  - marad a $v_1 = 0$

Alterek lin. függetlesége - pótlap 67

$(0) \neq W_1, \ldots, W_s \leq V$

- **Áll.:** $W_1, \ldots, W_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow \dim\langle W_1, \ldots, W_s \rangle = \dim W_1 + \ldots + \dim W_s$
- **konkrétabban:** Legyen $w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1$ bázis W_1-ben, ... $w_1^s, \ldots, w_{n_s}^s$ bázis W_1-ben. Ekkor: $W_1, \ldots, W_s$ lin. ftlenek $\Leftrightarrow$ $w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1$, ..., $w_1^s, \ldots, w_{n_s}^s$ lin. ftlen.

  Biz. $\Rightarrow$: Tfh.
  $\alpha_1^1 w_1^1 + \ldots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 + \ldots + \alpha_1^s w_1^s + \ldots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$. Ekkor $W_1, \ldots, W_s$ lin. ftlensége miatt $\alpha_1^1 w_1^1 + \ldots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 = 0$, ..., $\alpha_1^s w_1^s + \ldots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$. $w_1^i, \ldots, w_{n_i}^i$ lin. ftlensége miatt az összes $\alpha_j^i = 0$.
  $\Leftarrow$: Tfh. $u_i \in W_i$-vel $\sum_{i=1}^s u_i = 0$. Ekkor $u_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i w_j^i$ alakú és $\alpha_1^1 w_1^1 + \ldots + \alpha_{n_1}^1 w_{n_1}^1 + \ldots + \alpha_1^s w_1^s + \ldots + \alpha_{n_s}^s w_{n_s}^s = 0$, így $w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1$, ..., $w_1^s, \ldots, w_{n_s}^s$ lin ftlensége miatt az összes $\alpha_i^j = 0$, így mindegyik $w_i = 0$.

Sajátalterek együttesen, diagonalizálható mátrixok 68

Következmények ($\mathbb{C}$ felett)

- ϕ sajátaltereinek dimenzióinak összege $\leq \dim V$
- ϕ-nek legfeljebb $\dim V$ különböző sajátértéke van
- **Spektráltétel spec. esetre:** Ha ϕ-nek van $\dim V$ különböző sajátértéke, akkor V-nek van ϕ sajátvektoraiból álló bázisa, azaz olyan bázis, amiben ϕ mátrixa diagonális
- **Mátrixokra.: Def.:**az A $n \times n$-es komplex mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló agy diagonális mátrixhoz: azaz $\exists$ C invertálható, hogy $C^{-1}AC$ diag. azaz $\exists$ A-nak (az A-val való balról szorzásnak) sajátvektoraiból álló bázisa $\mathbb{C}^n$-nek
- Ha A-nak van n kül. sajátértéke $\mathbb{C}$-ben, akkor A diagonalizálható

Példák diagonalizálható és nem diagonalizálható mátrixra 69

- a λI skalármátrix diagonális, pedig csak 1 sajátértéke van
- $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékei 1 és -1, az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, illetve $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sajátvektorokkal.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nem diagonalizálható.
  - **Biz.**: Tfh. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$
  - Mivel $A^2 = 0$, $(C^{-1}AC)^2 = C^{-1}ACC^{-1}AC = C^{-1}A^2C = 0$,
  - tehát $\lambda_i^2 = 0$ $(i = 1, 2)$
  - ugyanakkor $A \neq 0 = \mathrm{diag}(0, 0)$.

Tanulság 70

- **Áll.:** Ha $f(x)$ egy polinom, hogy $f(A) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$ minden komplex sajátértékre
  Biz.:
  Legyen $0 \neq v$, hogy $Av = \lambda v$.
  Ekkor $A^i v = \lambda^i v$ $(i = 0, 1, \ldots)$
  Így $g(A)v = g(\lambda)v$ tetsz. g polinomra
  $0 = f(A)v = f(\lambda)v$,
  $v \neq 0$ miatt így $f(\lambda) = 0$.
- **fordítva ált. nem igaz**
- **diagonalizálhatóra fordítva is igaz**

Jordan-normálalak 71

Tétel: Minden négyzetes komplex mátrix hasonló egy alábbi alakúhoz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \mu & 1 & & \\ & \mu & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 \\ & & & & \mu \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \nu & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \nu & 1 \\ & & & \nu \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Jordan-normálalak 72

Tétel: Minden négyzetes A komplex mátrix hasonló blokk diagonálishoz, ahol a diagonális blokkok

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

alakúak.

- λ-k: A sajátértékei
- egy sajátérték esetleg több blokkban is előfordulhat
- a blokkok sorrend erejéig egyértelműek
- *Nem bizonyítjuk.*

Karakterisztikus polinom

A $n \times n$-es mátrix

- **Észrevétel:** λ sajátértéke A-nak $\Leftrightarrow$ $\lambda I_n - A$ szinguláris $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
- **Karakterisztikus polinom:** $\det(xI - A) \in \mathbb{F}[x]$
- **Áll.:** hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja ugyanaz. $\rightarrow$ Lin. transzformáció karakterisztikus polinomja jól def.
- λ sajátértéke A-nak $\Leftrightarrow$ λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.
- **Köv.:** $\mathbb{C}$ felett minden négyzetes mátrixnak van legalább egy sajátértéke.
- **Feladat:** Mi $\det(xI_n - A)$ konstans tagja? Mi az $n-1$-ed fokú tag együtthatója?

Felső háromszög alak

Tétel: Minden $n \times n$-es A komplex mátrix hasonló egy felső háromszög alakú mátrixhoz.

- **Biz.:** Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.
- $n > 1$: λ A-nak egy sajátértéke, v megf. sajátvektor. Legyen C egy olyan $n \times n$-es invertálható mátrix, aminek v az első oszlopa. A C oszlopaiból álló bázisban az A-val való szorzás mátrixa $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}$.
- az indukciós feltevés miatt létezik C' $n-1 \times n-1$-es, hogy $C'^{-1}A'C'$ felső háromszög.
- legyen $C'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{C'} \end{pmatrix}$.
- Ekkor $(CC'')^{-1}A(CC'') = C''^{-1}C^{-1}ACC''$ felső háromszög.

Háromszögmátrixok karakterisztikus polinomja

- **Felső háromszögmátrix karakterisztikus polinomja:**
$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}),$$
ahol a_{ii} a főátló i-edik eleme.
- **Emlékeztető 1:** $C^{-1}AC$ karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint A-é
- **Emlékeztető 2:** $M \mapsto C^{-1}MC$ kompatibilis mátrixok szorzásával és lineáris is.
- **Köv.:** Tetszőleges $f(x)$ polinomra $f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$.

A Hamilton–Cayley-tétel

Tétel (Hamilton-Cayley): A gyöke a karakterisztikus polinomjának

- **Biz.:** Elég felső háromszögre. Ilyenekre indukció.
- Legyen $g(x) = (x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$. Ekkor A karakterisztikus polinomja $f(x) = (x - a_{11})g(x)$, és $g(x)$ A bal alsó $n-1 \times n-1$-es blokkjának karakterisztikus polinomja.
- $f(A) = (A - a_{11}I_n)g(A)$ alakú. Az első tényező $\begin{pmatrix} 0 & * \\ & \boxed{*} \end{pmatrix}$, a második $\begin{pmatrix} * & * \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$ alakú az indukciós feltevés miatt. Két ilyen mátrix szorzata (ebben a sorrenben) 0.

Minimálpolinom

- Maradékos osztás polinomokra....
- A $n \times n$-es.
- Tfh. $0 \neq f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomok, hogy $f(A) = g(A) = 0$, továbbá $\deg f(x) \leq \deg g(x)$
- legyen $h(x) := g(x)$ maradéka modulo $f(x)$.
- ekkor $h(A) = 0$ is igaz.
- **Köv.:** $\exists!$ legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós $f(x)$ polinom, amire $f(A) = 0$, és minden olyan $g(x)$, amire $g(x) = 0$ többszöröse $f(x)$-nek.
- **Elnevezés:** minimálpolinom.
- A karakterisztikus polinom ennek többszöröse.

Példa: DFT

- Legyen P az $(12 \ldots n)$ ciklushoz tartozó permutációmátrix:
$$P = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$
- **Áll.:** P minimálpolinomja $x^n - 1$
Biz.: $P^n = I$ **és** $I, P, \ldots, P^{n-1}$ **lin. ftlenek.**
(mert az első oszlopaik lin. ftlenek).
- **Köv.:** P karakterisztikus polinomja $x^n - 1$
- **Köv.:** P sajátértékei $\omega^0, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$, ahol $\omega = e^{2\pi i/n}$.

Példa: DFT

- **Számolás mutatja:** $w_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$ sajátvektora P-nek ω^{-j} sajátértékkel
- a megfelelő báziscsere mátrixa
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$
az $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ számokhoz tartozó Vandermonde-mátrix.

Alkalmazott algebra - skalárszorzat

Ivanyos Gábor

2011 ősz

Skalárszorzat

Ebben a részben: a standard skalárszorzat:

$$u^T v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nu_i$$

és a kapcsolódó lineáris algebra absztrakt tárgyalással

$u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$

Miért:

- általánosítások is kezelhetők
- betekintés a mögöttes struktúrákba
- okos bizonyítások (számolás helyett)

Oddtown

- **Forrás:** L. Babai, P. Frankl: Linear algebra methods in combinatorics
- n lakos
- **Szabályok Oddtown klubjaira:**
  - Bármely klubnak csakis **páratlan** sok tagja lehet
  - Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet
- **Kérdés:** Max. hány klub lehet?

Oddtown

- Incidencia-mátrix:
  - sorok $\sim$ lakosok (n)
  - oszlopok $\sim$ klubok (k)
  - $A = (a_{ij})$ n-szer k-as

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i\text{. lakos tagja a } j\text{. klubnak} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- a szabályok:
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ páratlan $(1 \leq j \leq k)$
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'}$ páros $(1 \leq j \neq j' \leq k)$

Oddtown

- Modulo 2 (azaz a $\mathbb{Z}_2$ testben dolgozunk): $a_{ij} \in \mathbb{Z}_2$
- A szabályok:
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(1 \leq j \leq k)$
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'} = 0$ $(1 \leq j \neq j' \leq k)$
- "szimmetrikusabb" megfogalmazás:
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = 1$ $(1 \leq j \leq k)$
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'} = 0$ $(1 \leq j \neq j' \leq k)$
- mátrixosan:

$$A^T A = I_k$$

Oddtown

- $A^T A = I_k$
- $A^T A$ képtere k-dimenziós
- A^T képtere $\geq k$-dimenziós
  (mivel $A^T A$ képtere $\leq A^T$ képtere)
- A^T rangja $\geq k$,sőt, $= k$, mert k sora van
- A rangja k
- **konklúzió:** $k \leq n$
- ennyi klub lehet is (pl. az egyeleműek)

Oddtown

- mátrixosan: $A^T A = I_k$
- oszlopvektorokkal: $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$v_j^T v_{j'} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- szavakban: A oszlopvektorai **"ortonormált"** rendszert alkotnak $\mathbb{F}_2^n$-ben
  a standard "skalárszorzatra"

Eventown

- Bármely klubnak csakis **páros** sok tagja lehet
- Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet
- különböző klubok tagsága különböző halmazok
- Incidencia-mátrixszal (mod 2):

$$A^T A = 0$$

- oszlopvektorokkal

$$v_j^T v_{j'} = 0$$

  akár $j \neq j'$, akár $j = j'$.
- **Példa:** tfh. a város lakói házaspárok (esetleg +1 szingli)
  Legyenek a klubok a házaspárokból álló halmazok.
- **Köv.:** $k = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ lehetséges
- **Kérdés:** lehet-e több?

Szimmetrikus bilineáris függvény

olyan $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, ami

- **mindkét változójában lineáris**, azaz
  $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ és $\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$
  $(\forall u, u', v, v' \in V)$; továbbá
  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ és $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\quad (\forall u, v, \in V, \lambda \in \mathbb{F})$
- és **szimmetrikus**, azaz $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ $\quad (\forall u, v \in V)$.
- **Példa (standard skalárszorzat $\mathbb{F}^n$-en):**

$$(u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- **Végtelen dimenziós példa:** négyzetesen integrálható $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvények

$$\langle f, g \rangle := \int f(x) g(x) dx$$

Merőlegesség 89

- u és v **merőlegesek** ($u \perp v$), ha $\langle u, v \rangle = 0$.
- szimmetrikus reláció
- **Def.:** $v_1, \dots, v_\ell$ rendszer **ortogonális**, ha $v_i \perp v_j$ ($i \neq j$)

  ortonormált rendszer: ha még $\langle v_i, v_i \rangle = 1$
- Ha $v_1, \dots, v_\ell$ ortogonális, de semelyik v_j nem merőleges önmagára, akkor $v_1, \dots, v_\ell$ lineárisan függetlenek.
  - **Biz.**: Tfh. $0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i$.
  - Ekkor bármely j-re: $0 = \langle 0, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$
  - Azaz bármely j-re $\alpha_j = 0$.
- Innen: Oddtown vektorai lin. függetlenek

Merőlegesség 90

- **Def.:** A $v_1, \dots, v_n$ bázis **ortogonális**, ha $v_i \perp v_j$ ($i \neq j$)

  ortonormált bázis: ha még $\langle v_i, v_i \rangle = 1$
- **Példa:** $\mathbb{F}^n$-ben a standard skalárszorzatra a standard bázis.
- **Példa:** $\mathbb{R}^2$-ben $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- **Def. (merőleges altér):** $S \subseteq V$-re

$$S^\perp := \{v \in V | u \perp v \text{ minden } u \in S\text{-re}\}$$

  altér. $S^{\perp\perp} \geq \langle S \rangle$.

  $u^\perp := \{u\}^\perp$
- lehetséges $u \in u^\perp$ (ilyen u: *izotróp* vektor)
- **rendezésfordító:** $U \leq W$-re $U^\perp \geq W^\perp$

Merőlegesség 91

Áll.: Ha $V^\perp = (0)$, akkor $U \leq V$-re $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.
Biz.: Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis V-ben, $u_1, \dots, u_k$ bázis U-ban. Legyen $A = (a_{ij})$ $k \times n$-es, ahol $a_{ij} = \langle u_i v_j \rangle$:

$$A = \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \dots & \langle u_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k, v_1 \rangle & \dots & \langle u_k, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Legyen $\phi : V \mapsto \mathbb{F}^k$ a $v \mapsto \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_k, v \rangle \end{pmatrix}$, $\psi : U \mapsto \mathbb{F}^n$ az $u \mapsto \begin{pmatrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, v_n \rangle \end{pmatrix}$ lin. lekép.
Ezekre: $\ker \phi = U^\perp$, $\ker \psi = V^\perp \cap U = (0)$. A ϕ mátrixa A, a ψ mátrixa A^T.

$$\dim \phi V = A \text{ rangja} = \dim \psi U.$$

A dimenziótétel miatt $\dim \phi V = \dim V - \dim \ker \phi = \dim V - \dim U^\perp$, míg $\dim \psi U = \dim U - \dim \ker \psi = \dim U$. Összeolvasva $\dim V - \dim U^\perp = \dim U$.

Merőlegesség 92

- **Köv.:** Ha $V^\perp = (0)$, akkor $U \leq V$-re $U^{\perp\perp} = U$.

  Biz.: A definícióból $U^{\perp\perp} \geq U$ nyilvánvaló.
  Az előző állításból

$$\dim U^{\perp\perp} = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - \dim V + \dim U = \dim U,$$

  így $U^{\perp\perp} > U$ kizárt.
- **Áll.:** $V = \mathbb{F}^n$ standard skalárszorzatára $V^\perp = (0)$

  Biz.: Legyen $v_1, \dots, v_n$ a standard bázis. Ekkor $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$-ra

$$(u, v_i) = \alpha_i,$$

  innen $V^\perp = (0)$.

Alkalmazás: Eventown 93

- **Köv.:** Ha $V^\perp = (0)$ és $U \leq V$, hogy $U \leq U^\perp$, akkor $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.

  Biz.: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp \geq \dim U + \dim U$

  Eventown szabályai:
- Bármely klubnak csakis **páros** sok tagja lehet
- Bármely két klubnak csakis **páros** sok közös tagja lehet

  oszlopvektorokkal:

$$v_j v_{j'}' = 0$$

  akár $j \neq j'$, akár $j = j'$.
- Legyen $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ekkor $U \leq U^\perp$.
- **Köv.:** $k = 2^{[n/2]}$ a lehető legnagyobb klubszám

Lineáris kódok 94

- $\mathbb{F}$ véges test $\sim$ ábécé v. jegyhalmaz (pl. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$)
- **lineáris kód:** U altér $\mathbb{F}^n$-ben
- **kódszavak:** U-beli vektorok
- **Hamming-távolság** $\mathbb{F}^n$-en: $d(u, v) = |\{i : \mu_i \neq \nu_i\}|$, ahol $u = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, $v = (\nu_1, \dots, \nu_n)^T$
- **Hamming-súly:** $s(u) := d(u, 0)$ (nem 0 helyek száma)
- $d(u, v) = s(u - v)$

Lin. kódok paraméterei: 95

- **kódhossz:** n - ilyen hosszú egy kódszó
- **dimenzió:** $k = \dim U$ - ilyen hosszú sorozatot kódol egy kódszó
- **kódtávolság:** $d = \min_{u \neq v \in U} d(u, v) = \min_{0 \neq u \in U} s(u)$
- $[(d-1)/2]$ hibát ki tudunk javítani
- **Megj.:** A kódtávolság értelmes nemlin. kódra ($\mathbb{F}^n$ részhalmazaira, és itt az se kell, hogy $\mathbb{F}$ test legyen), csak nem feltétlenül azonos a min. súllyal.

Példák kódokra 96

- Kódolás: $\mathbb{F}^k \to U$ bijekció (nem feltétlenül lin.)
- **triviális** kódok - a teljes: $v \mapsto v$ (nincs redundancia)
  $U = \mathbb{F}^n$, $k = n$, $d = 1$

  triviális kódok - a nulla: (nulla információ)
  $U = (0)$, $k = 0$, $d = \infty$
- **Ismétlő** kód: $a \mapsto (a, a, \dots, a)^T$
  $U = \{(a, \dots, a)^T\}$, $k = 1$, $d = n$
- **Paritás**-kód:
  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1})^T$
  $U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T | \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}$, $k = n - 1$, $d = 2$:
  egy hibát tud jelezni

Hadamard-kódok (elsőrendű Reed–Muller-kódok) 97

- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, $n = 2^m$.
- $k = m + 1$: Egy $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta)^T$ vektorra
  $$f_v(x_1, \ldots, x_m) := \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta$$
  a kódszó-vektor: az f_v értékei a lehetséges 2^m helyen
- $d = 2^{m-1}$:
  - Ha $\beta = 0$ akkor f_v egy lineáris függvény $\mathbb{Z}_2^m$-en, a magja vagy m dimenziós ($f_v \equiv 0$) vagy $m-1$ dimenziós. Utóbbi esetben f_v a maradék 2^{m-1} helyen lesz 1.
  - Ha $\beta = 1$, akkor $f_v - 1$ egy lineáris függvény. A magja vagy m dimenziós ($f_v \equiv 1$) vagy $m-1$. Tehát f_v vagy 2^m vagy 2^{m-1} helyen lesz 1.
- Mariner 9 Mars-szonda (1971): $m = 5$: $n = 32$, $k = 6$, $d = 16$.
- ugyanilyen távolságú ismétlő kód ($n = 16$, $k = 1$, $d = 16$), a "sebessége" (k/n) 3-szor lassabb.

Két kézenfekvő mód lin. kódok megadására 98

- Bázissal **(Generátormátrix):** olyan G $n \times k$-as, hogy
  $$G \text{ oszlopai } U \text{ egy bázisa}$$
  azaz
  $$U = G\mathbb{F}^k$$
  Lehetséges kódolás: $v \mapsto Gv$.
- Lin. egyenletekkel **(Ellenőrző mátrix):** olyan H $n \times (n-k)$-as, hogy H^T sorai lin. egyenletek U meghatározására azaz $u \in U \Leftrightarrow H^T u = 0$, azaz
  $$U = \ker H^T$$
- **Feladat:** Ismétlő és paritás-kódok mátrixai

Duális kód 99

- **A duális kód:** $U^\perp$ (a standard skalárszorzásra)
- **Tudjuk:** $\dim U^\perp = n - k = n - \dim U$, $U^{\perp\perp} = U$
- U bármely ellenőrző mátrixa $U^\perp$ egy generátormátrixa
  - **Biz.:** Ha H egy ell. mátrixa U-nak, akkor
  - $H^T u = 0$ minden $u \in U$-ra, így $(Hv)^T u = v^T H^T u = 0$ minden $u \in U, v \in \mathbb{F}^{n-k}$-ra. Tehát $H\mathbb{F}^{n-k} \leq U^\perp$, így
    $$U \leq (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp.$$
  - Ha $u \in (H\mathbb{F}^{n-1})^\perp$ azaz minden $v \in \mathbb{F}^{n-k}$-ra $0 = (Hv)^T u = v^T H^T u = v^T (H^T u)$, tehát $H^T u \in {\mathbb{F}^{n-k}}^\perp = (0)$, így $H^T u = 0$, azaz $u \in U$. Tehát
    $$U \geq (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp.$$
  - együtt: $U = (H\mathbb{F}^{n-k})^\perp$, és így $U^\perp = H\mathbb{F}^{n-k}$ is igaz.
- U bármely generátormátrixa $U^\perp$ egy ellenőrző mátrixa

Az Hadamard-kód fele és annak duálisa 100

- **Köv.:** Ismétlő és paritás-kódok egymás duálisai.
- **Hadamard-kód:** a legf. elsőfokú m-változós polinomok értékei $\mathbb{F}_2^m$-en
- **Hadamard-kód fele:** a homogén lineáris m-vált. polinomok azaz a lineáris függvények értékei $\mathbb{F}_2^m$-en
- kidobjuk a 0 helyet: ott minden lin. fvény értéke 0.
- paraméterek: $n = 2^m - 1$, $k = m$, $d = 2^{m-1}$.
- lin. fvények standard bázisa: $f_1, \ldots, f_m$, ahol $f_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_i$:
  f_1 mátrixa $(1, 0, \ldots, 0)$,..., f_m mátrixa $(0, \ldots, 0, 1)$.
- egy gen. mátrix: (sorai $\mathbb{F}_2^m$ nem nulla vektoraival indexelve): $G = (g_{vj})$, ahol $g_{vj} = f_j v$, ami v-nek j-edik komp.
- **Konklúzió:** G sorai: $\mathbb{F}_2^m$ nem 0 vektorai

Az Hadamard-kód fele és annak duálisa 101

- G gen. mátrix sorai: $\mathbb{F}_2^m$ nem 0 vektorai
- **Hamming-kód:** a duális kód, paraméterek: $n = 2^m - 1, k = 2^m - m - 1, d = ?$
- Hamming-kód (egyik) ellenőrző mátrixa G
- **Áll.:** A Hamming-kód távolsága 3:

Biz: Tfh. 2: létezik $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ hogy $\alpha_\ell = 0$, ha $\ell \notin \{i, j\}$, de $\alpha_i = \alpha_j = 1$.
$v \in$ Hamming, azaz $G^T v = 0$. De $G^T v$ a G i-edik és j-edik sorának az összege. Ez nem lehet 0, mert G sorai kül. nem 0 vektorok. Ellentmondás.

A Hamming-kód távolsága 102

- **Áll.:** A Hamming-kód távolsága 3:

Biz (folyt): Tfh. 1: ekkor olyan $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ kódszó van, amelyre $\alpha_\ell = 0$, hacsak nem $\ell = i$ és $G^T v$ a G i-edik sora, ezek közt nem szerepel a 0. Ellentmondás.

≤ 3: G-nek van 3 sora, amelyek összege 0.

- **Tanulság:** Ha egy U lin. kód (egyik) ellenőrző mátrixa H, akkor U kódtávolsága $\leq \ell \Leftrightarrow H$-nak van ℓ lin. összefüggő sora
  kódtáv. = ell. mátrix min. lin. összefüggő sorainak a száma
- **Megj.:** A kódtávolság kiszámítása NP-nehéz.

A Hamming-korlát 103

- **Tétel:** Legyen C egy nem feltétlenül lineáris kód a q elemű A ábécé felett. Tfh. C szavainak távolsága $\geq 2t + 1$. Ekkor
  $$|C| \sum_{s=0}^{t} \binom{n}{s} (q-1)^s \leq q^n.$$

Biz.: A^m minden v szavához legyen
$$B(v, t) = \{w \in A^n | d(v, w) \leq t\}.$$
ún. Hamming-gömb, "térfogat": $|B(v, t)| = \sum_{s=0}^{t} \binom{n}{s} (q-1)^s$
Ha $u, v \in C$, akkor $d(u, v) > 2t$ miatt $B(u, t) \cap B(v, t) = \emptyset$, így
$$\sum_{v \in C} B(v, t) \leq q^n.$$

- **Perfekt kódok:** ahol a Hamming-korlát egyenlőséggel telj.
- a Hamming-kódok perfektek.

Perfekt kódokról: 104

- **Hamming-kódok tetsz. $\mathbb{F}_q$ felett:** paraméterek: $n = \frac{q^m - 1}{q - 1}, k = \frac{q^m - 1}{q - 1} - m, d = 3$.
- Az összes nem-triviális perfekt lineáris kód vagy páratlan hosszú ismétlő kód, vagy Hamming-kód, vagy Golay-kód.
- A perfekt Golay-kódok paraméterai: $\mathbb{F}_2$ felett: $n = 23, k = 12, d = 7$; $\mathbb{F}_3$ felett: $n = 11, k = 6, d = 5$.
- vannak **kiegészített** Hamming-kódok és kiegészített Golay-kódok
  Paritás-kódhoz hasonló konstrukció: kiegészítjük a kódszavakat egy új jeggyel, hogy a jegyek összege 0 legyen. Hamming és Golay kódokra a hossz és a kódtáv 1-gyel nő.
- **példa:** A teljes Hadamard-kód duálisa a kiegészített bináris Hamming-kód. Paraméterek: $n = 2^m, k = 2^m - m - 1, d = 4$.

Gram-mátrix

Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis V-ben. Ebben a bázisban

- $\langle , \rangle$ Gram-mátrixa $A = (a_{ij})$, ahol $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
- A szimmetrikus: $A^T = A$
- $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$-re

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j a_{ij}$$

- rögz. bázisra: szimm. bilin. fvények$\leftrightarrow$szimm. mátrixok
- Ortogonális bázisban a Gram-mátrix diagonális, ortonormáltban az egységmátrix.

Gram-mátrixok $\mathbb{F}^n$ standard bázisában

- Ha A szimm. $n \times n$-es mátrix, akkor $\langle u, v \rangle := u^T A v$ szimm. bilin. fvény $\mathbb{F}^n$-en,
- ennek a Gram-mátrixa A.
- a $(,)$ standard skalárszorzat Gram-mátrixa I
- **Tul.:** $u^T A v = (u, Av) = (A^T u, v)$

Báziscsere hatása a Gram-mátrixra:

Legyen $v_1, \dots, v_n$ és $v_1', \dots, v_n'$ két bázis, a $v_i \to v_i'$ báziscsere mátrixa $C = (c_{ij})$: $v_j' = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$.

Áll.: Ha $\langle , \rangle$ Gram-mátrixa az első bázisban A, akkor a másodikban

$$C^T A C.$$

Biz.: Jel.: $A = (a_{ij})$. A másik bázisban a Gram-mátrix $A' = (a_{ij}')$.

$$\begin{aligned} a_{ij}' &= \langle v_i', v_j' \rangle = \langle \sum_{k=1}^n c_{ki} v_k, \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} v_\ell \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n c_{ki} \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} a_{k\ell} = \sum_{k=1}^n c_{ki} \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} c_{\ell j} \end{aligned}$$

Belső összegek vektora AC j-edik oszlopa. Ez van skalárszorozva C i-edik oszlopával, azaz C^T i-edik sorával.

Euklideszi terek

$\mathbb{R}^n$ standard skalárszorzatáról

Definitség

V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\langle , \rangle$ szimm. bilin. fvény V-n

- pozitív definit, ha $\forall\, 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, ha $\forall\, v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle \geq 0$
- negatív definit, negatív szemidefinit hasonlóan
- indefinit, ha $\exists\, u, v \in V$, amelyekre $\langle u, u \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$
- Példa: $\mathbb{R}^2$-en $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$ és $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$ indefinitek. **Feladat:** mik a Gram-mátrixok a standard bázisban?

Néhány feladat

$V = \mathbb{R}^n$, tfh. $\langle u, v \rangle = u^T A v$, azaz a Gram-mátrix a standard bázisban A.

- Mutassuk meg, hogy $\ker A = V^\perp$.
- **Köv:** A szing. $\Leftrightarrow V^\perp \neq (0)$
- **Megj.:** szokásos elnevezés: $\langle , \rangle$ nemelfajuló, ha $V^\perp = (0)$.
- Tfh. $\langle , \rangle$ poz. szemidef. Mutassuk meg, hogy ekkor: A szinguláris $\Leftrightarrow \exists\, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, hogy $v \in v^\perp$.
- Mut. meg, hogy indefinit $\langle , \rangle$ esetén a fenti ekvivalenciából csak $\Rightarrow$ igaz.

Euklideszi tér

- Valós vektortér pozitív definit $\langle , \rangle$ bilineáris függvénnyel
- **Példa:** $\mathbb{R}^n$, a standard skalárszorzattal
- **Fontos tul.:** Euklideszi tér altere is euklideszi tér
- $\langle f, g \rangle : \int f(x) g(x) dx$ is poz. def., a négyzetesen integrálható fvények tere ∞ dimenziós, véges sok fvény által generált altér euklideszi tér
- **hossz:** $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
- **távolság:** $|u - v|$

A Gram–Schmidt-Ortogonalizáció

$\langle , \rangle$ poz. def. V-n

- $v_1, \dots, v_n$ bázis V-ben
- $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$, azaz $v_1 \notin v_1^\perp$.
- $\pi : w \mapsto w - \frac{\langle v_1, w \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$ lin. transzf. (πw a w-nek a v_1-re merőleges komponense)
- $\ker \pi = \langle v_1 \rangle$, $\pi V = v_1^\perp$
- $v_2, \dots, v_n \leftarrow \pi v_2, \dots, \pi v_n$ bázis $v_1^\perp$-ben (**Miért?**)
- folytassuk $v_1^\perp$-ben
- $\vdots$
- eredmény: **ortogonális bázis**
- **normáló lépés:** $v_i \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\langle v_i, v_i \rangle}} v_i$
- végeredmény: **ortonormált bázis**

Gram-Schmidt: megjegyzések — 113

- A normáló lépés előttig a báziscsere mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ & 1 & * & \dots & * \\ & & 1 & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

  alakú
- a normálást is tartalmazó báziscsere mátrixa is felső háromszög alakú, pozitív elemekkel a főátlóban.
- Az utolsó normáló lépés kivételével a más alaptestekre, nem poz. def. $\langle , \rangle$-re is alkalmazható, hacsak nem találunk $v \in v^{\perp}$ vektort.
- **Feladat:** tehetünk-e valamit, ha $v_1 \in v_1^{\perp}$?

Gram-Schmidt: megjegyzések — 114

- Alkalmas egy adott szimmetrikus bilineáris függvény pozitív definitségének eldöntésére:
  Az eljárás nyilván végigmegy, ha annak során nem jön elő olyan v vektor, amelyre $\langle v, v \rangle \leq 0$.
  Ha nem jön ilyesmi elő: a végső $v_1, \dots, v_n$ bázis ortogonális és $(v_i, v_i) > 0$, ezért $\langle , \rangle$ poz. def.
- A Gram-mátrix alakulásának követésénél értelmes interpretáció: sorok és oszlopok szerinti Gauss-elimináció:
  Pl. a $v_2 \leftarrow v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$ helyettesítésnél
  1. a második sorból elimináljuk az első elemet az első sor segítségével
  2. az így kapott mátrix második oszlopának első elemét elimináljuk az első oszlopának a segítségével

Gram-Schmidt példa — 115

- Tfh. a v_1, v_2, v_3 bázisban $\langle , \rangle$ Gram-mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
- A második sorból levonjuk az első sor kétszeresét:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
- A második oszlopból levonjuk az első oszlop kétszeresét:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Gram-Schmidt példa — 116

- A $v_2 \leftarrow \pi v_2$ után:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
- A harmadik sorból levonjuk az elsőt
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
- A harmadik oszlopból levonjuk az elsőt
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Innentől a változtatások a jobb alsó blokkot érintik.

Gram-Schmidt példa — 117

- A $v_1^{\perp}$-re való vetítések után:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
- kivonjuk a második sort a harmadikból:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
- kivonjuk a második oszlopot a harmadikból:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Keletkezett egy -1 a főátlóban, tehát $\langle , \rangle$ indefinit.

Gram-Schmidt megj. — 118

- **Megj:** A Gram-Schmidt eljárás segítségével igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$-en $\langle , \rangle$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha valamely (bármely) bázisban felírt A Gram-mátrixára igaz az hogy minden $1 \leq j \leq n$-re A bal felső $j \times j$-es blokkjának a determinánsa pozitív.

Izometria — 119

- $V_1, \langle , \rangle$ és $V_2, \langle , \rangle_2$ euklideszi terek. A $\phi : V_1 \to V_2$ lin. bijekció **izometria** V_1 és V_2 között, ha
$$\langle v, w \rangle = \langle \phi v, \phi w \rangle_2$$
  minden $v, w \in V_1$-re.
- $V_1, \langle , \rangle$ és $V_2, \langle , \rangle_2$ izometrikusak, ha létezik köztük izometria.
- azaz léteznek olyan bázisok a két térben, amelyekben a Gram-mátrixok megegyeznek.
- **Köv.:** Bármely n-dimenziós eukl. tér izometrikus $\mathbb{R}^n$-nel.
  Gram-Schmidt: létezik ortonormált bázis
- **Megj.:** Az izometria jelentése: távolságtartó .... Eukl. terek közötti távolságot tartó és 0-t 0-ba vivő leképezések automatikusan lineárisak.

Komplex euklideszi terek — 120

- AKA véges dimenziós Hilbert-terek, unitér terek, Hermite–féle terek, hermitikus terek.
- **Probléma** $n \geq 2$-re $\mathbb{C}^n$-ben az $u^T v$-vel:
  - $\exists\, 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, amelyre $v \in v^{\perp}$
  - **Feladat:** mutassunk ilyen v-t.
- $\mathbb{C}^n$-en $u^T v$ helyett jobb $u^* v$-t használni.
  Def.: u^* az alábbi $m = 1$-gyel:
- **adjungált mátrix**: A $n \times m$-es komplex mátrixra
$$A^* := \overline{A^T},$$
  a transzponált mátrix elemenkénti komplex konjugáltja.
- Ha A valós, akkor $A^* = A^T$.

Hermitikus függvények

V komplex vektortér, $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitikus (vagy Hermite-féle), ha

- a második változójában lineáris, azaz
  - $\langle u, \lambda v + v' \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$ $(\forall u, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{C})$,
- és konjugált-szimmetrikus:
  - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ $(\forall u, v \in V)$
- **Megj.:** Egy hermitikus függvény az első változóban konjugált-lineáris (avagy antilin.):
  - $\langle \lambda u + u', v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ $(\forall u, u', v \in V, \lambda \in \mathbb{C})$,

Analógiák a valós esettel:

- **standard skalárszorzat** $\mathbb{C}^n$-en: $(u, v) = u^* v$
- **Gram-mátrix:** ugyanúgy $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$
- Hermitikus fvény Gram-mátrixa **önadjungált** (avagy hermitikus):
$$A^* = A$$
- $(u, Av) = u^* Av = (A^* u)^* v = (A^* u, v)$
- $u, v \mapsto u^* A v$ hermitikus $\Leftrightarrow$ A önadjungált
- Báziscsere hatása a Gram-mátrixra
$$A \to C^* A C$$

Definitség

$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitikus fvény

- **Észrevétel:** $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$, tehát $\langle u, u \rangle$ mindig valós.
- $\langle , \rangle$ pozitív definit, ha $\forall 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, indefinit, stb. hasonlóan

Komplex euklideszi tér

- **Def.:** komplex vektortér poz. def. $\langle , \rangle$ hermitikus fvénnyel ellátva
- eukl. tér altere is eukl.
- n-dim. komplex eukl. tér izometrikus $\mathbb{C}^n$-nel

  Biz.: (Gram-Schmidt átmegy)
- **Ezután:** euklideszi terekben a $(,)$ jelölést használjuk.
- **hossz:** $\sqrt{(v, v)}$
- **Pythagorasz-tétel:** ha $u \perp v$, akkor $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

Pótlap: A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

- Cauchy (1821):
$$\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \overline{y_i} \right).$$
- Bunyakovszkij (1859), Schwartz (1888):
$$\left| \int f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 \, dx \int |g(x)|^2 \, dx.$$

Alkalmazás: a Cauchy-Schwarz–egyenlőtlenség

Komplex (vagy valós) euklideszi térben (Weyl 1918?):
$$|(u, v)| \leq |u||v|.$$

- **Biz.:** ekvivalens megfogalmazás: $|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v)$
- Feltehető $u \neq 0$ (különben akkor mindkét oldal 0)
- v felboml. u-val $\parallel$ és u-ra $\perp$ összetevőkre:

  $v = \mu u + v'$, ahol $\mu = \frac{(u,v)}{(u,u)}$ és $v' = v - \mu u$.
- $(v, v) = |\mu|^2 (u, u) + (v', v')$ és $|(u, v)|^2 = |\mu|^2 (u, u)^2$.
- A bizonyítandó $\leq$-ség baloldala $|\mu|^2 (u, u)^2$
- jobboldala $|\mu|^2 (u, u)^2 + (u, u)(v', v')$.
- **Megj.** A bizonyítás során végül is az u és v vektorokat tartalmazó síkban (vagy egyenesen) dolgoztunk.

A Cauchy-Schwarz–egyenlőtlenség

- Komplex (vagy valós) euklideszi térben
$$|(u, v)| \leq |u||v|.$$
- Kifejtett alak:
$$\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \overline{y_i} \right).$$
- Négyzetesen integrálható függvényekre
$$\left| \int f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 \, dx \int |g(x)|^2 \, dx.$$

  (Itt $(h_1(x), h_2(x)) = \int \overline{h_1(x)} h_2(x)$ és a Cauchy-Schwarz–egyenlőtlenséget az $\overline{f(x)}, g(x)$ párra alkalmazzuk.)

Normális mátrixok

- diagonalizálható (diagonálishoz hasonló) komplex mátrixok fontos családja
- **Def.:** A $n \times n$-es komplex mátrix **normális**, ha
$$AA^* = A^* A$$
- valós A-ra: $A^T A = A A^T$
- **Példa:** $A = A^*$ önadjungált (valós esetben szimmetrikus)
- **Példa:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ normális (szimmetrikus), de $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nem normális. **Miért?**

  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ normális (ferdén szimmetrikus: $C^T = -C$), de $A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nem normális. **Miért?**

Normális mátrixok
129

- **Áll.:** Legyen $M = \begin{pmatrix} a & v \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{C}$, $v^T \in \mathbb{C}^{n-1}$, C pedig $n-1 \times n-1$-es. Ekkor
M normális $\Leftrightarrow$ $v = 0$ és C normális.
  - **Biz.:**
  - $MM^* - M^*M$ bal felső eleme $a\overline{a} + vv^* - \overline{a}a = vv^*$.
  - tehát ha M normális akkor $vv^* = 0$, így $v = 0$.
  - Ha $v = 0$, akkor M blokk diagonális és $MM^* - M^*M$ is. Utóbbi diag. blokkjai 0, illetve $CC^* - C^*C$.
- **Köv:** Felső (vagy alsó) háromszögmátrix normális $\Leftrightarrow$ diagonális

Unitér mátrixok
130

U $n \times n$-es.

- **Def.:** Az U $n \times n$-es mátrix **unitér**, ha $U^*U = I$.
Minden unitér mátrix normális.
- **Áll.:** U unitér $\Leftrightarrow$ U^* unitér. Ekkor $U^* = U^{-1}$.
- **Áll.:** U, U' unitér $\Rightarrow$ I, U^{-1} és UU' unitérek.
- **Áll.:** U unitér $\Leftrightarrow$ U oszlopai egy ortonormált rendszert alkotnak $\Leftrightarrow$ U sorai ortonormált rendszert alkotnak.
- **Átfogalmazva.:** Ekvivalensek:
  - U unitér
  - U a standard bázist egy ortonormált bázisba viszi
  - $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ izometria
  - U $\mathbb{C}^n$ valamely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi
  - U $\mathbb{C}^n$ bármely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi
- valós unitér = ortogonális ($UU^T = I$)

Unitér/ortogonális mátrixok: példák
131

- tetszőleges permutációs mátrix
- $v \mapsto v - 2\frac{u^Tv}{u^Tu}u$ az $u^\perp$ hipersíkra való tükrözés
- **Hadamard-kód fele:**
  - A $\mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ lineáris függvények, mint 2^m hosszú $0-1$ vektorok.
  - Ezek közül bármely két különböző 2^{m-1} helyen egyezik, 2^{m-1} helyen különbözik
  (Egy nem 0 lin. fvény 2^{m-1} helyen 0, 2^{m-1} helyen 1)
  - $0 \to 1$, $1 \to -1$
  - 2^m darab 2^m hosszú páronként merőleges ± 1-vektor
  - $2^{m/2}$-vel normálva ortogonális mátrixot alkotnak.
- Hadamard-mátrixok $n \times n$-es ± 1-mátrixok, páronként merőleges oszlopokkal (sorokkal).
- **Feladat:** van $n \times n$-es Hadamard-mátrix $\Rightarrow$ $n = 2$ vagy $4|n$
- **Sejtés:** Ha $4|n$, akkor van $n \times n$-es Hadamard-mátrix.

A Schur-felbontás
132

Tétel: Tetszőleges A $n \times n$-es komplex mátrixhoz létezik olyan U $n \times n$-es unitér mátrix, amelyre U^*AU felső háromszög alakú.

- **Biz.:** Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.
- $n > 1$: λ A-nak egy sajátértéke, v megf. 1 hosszú sajátvektor. Legyen U egy olyan $n \times n$-es unitér mátrix, aminek v az első oszlopa. (U további oszlopai $v^\perp$ egy ortonormált bázisa.) A U oszlopaiból álló bázisban az A-val való szorzás mátrixa $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}$.
- az indukciós feltevés miatt létezik U' $n-1 \times n-1$-es unitér, hogy $U'^*A'U'$ felső háromszög.
- legyen $U'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{U'} \end{pmatrix}$. Ekkor UU'' unitér és
- $(UU'')^*A(UU'') = U''^*U^*AUU''$ felső háromszög.

Schur-felbontás - megjegyzések
133

- általában nem egyértelmű, de
- a diagonális elemek az eredeti mátrix sajátértékei.
- a bal felső eleme az eredeti mátrix tetszőleges sajátértéke lehet.

Spektráltétel normális mátrixokra
134

- **Észrevétel:** U $n \times n$-es unitér, A $n \times n$-es. Ekkor
A normális $\Leftrightarrow$ U^*AU normális
Biz.:
$\Rightarrow$: $(U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = U^*AU(U^*AU)^*$
$\Leftarrow$: Ha $A' = U^*AU$, akkor $A = (U^*)^*A(U^*)$, így alkalmazható a másik irányú.
- **Köv.:** A normális $\Leftrightarrow$ van U unitér, hogy U^*AU diagonális
(azaz valamely Schur-felbontására U^*AU diagonális)
($\Leftrightarrow$ bármely Schur-felbontására U^*AU diagonális)
- **Átfogalmazva.:** A normális
$\Leftrightarrow$ van A sajátvektoraiból álló ortonormált bázis
(fenti U oszlopai)

Alkalmazás: DFT és inverze
135

- Az $(12\ldots n)$ permutáció mátrixa ortog. ,így normális
- n kül. sajátérték $\Rightarrow$ a megf. sajátvektorok merőlegesek.
- Az ω^{-j} sajátértékhez tartozó 1 hosszú sajátvektor
$w_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$
- Tehát $M = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$ unitér: $M^{-1} = M^*$
- Itt $M^* = \overline{M}$: M-ből $\omega \leftrightarrow \overline{\omega}$ cserével kapható
- Ezen csere erejéig az inverz DFT ugyanolyan, mint a DFT.

Mátrixok definitsége
136

- **Def.:** az A **önadjungált** mátrix pozitív szemidefinit (pozitív definit), ha $v^*Av \geq 0$ ($v^*Av \geq 0$) minden $v \in \mathbb{C}^n$ vektorra.
Megj.: Ekvivalens a $\langle u, v \rangle := u^*Av$ hermitikus függvény megfelelő definitségével.
- **Példa:** A tetszőleges $m \times n$-esre A^*A poz. szemidef. A^*A pontosan akkor poz. def., ha A oszlopai lineárisan függetlenek.
Biz.: $v^*A^*Av = (Av)^*(Av)$ miatt $v^*A^*Av \geq 0$ és $v^*A^*Av = 0$ pont akkor, ha $Av = 0$.

Pótlap: fontos típusú diagonális mátrixok 137

A komplex diagonális. Ekkor:

- A unitér $\Leftrightarrow$ A diag. elemei 1 abszolút értékűek
- A önadjungált $\Leftrightarrow$ A diag. elemei valósak
- A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow$ A diag. elemei nemnegatív valósak
- A pozitív definit $\Leftrightarrow$ A diag. elemei pozitív valósak
- A ferdén hermitikus $\Leftrightarrow$ A diag. elemei tiszta képzetesek (Az $a + bi$ komplex szám tiszta képzetes, ha $a = 0$.)

Fontos típusú normális mátrixok spektruma 138

- **Áll.:** Legyen U unitér. Ekkor A önadjungált $\Leftrightarrow$ U^*AU önadj. Hasonló ekvivalenciák unitér, pozitív definit, pozitív szemidefinit, ferdén hermitikus ($A^* = -A$) mátrixokra.
- **Jellemzés:** A komplex normális. Ekkor:
  - A unitér $\Leftrightarrow$ A sajátértékei 1 abszolút értékűek
  - A önadjungált $\Leftrightarrow$ A sajátértékei valósak
  - A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow$ A sajátértékei nemnegatív valós számok
  - A pozitív definit $\Leftrightarrow$ A sajátértékei pozitív valós számok
  - A ferdén hermitikus $\Leftrightarrow$ A sajátértékei tiszta képzetesek

Schur-felbontás valós sajátértékekre 139

- **Tétel.:** Tfh. A $n \times n$-es valós, és A sajátértékei valósak. Ekkor létezik olyan U $n \times n$-es valós ortogonális, amelyre U^TAU felső háromszög.
  Biz.: A Schur-felbontás bizonyítása átmegy.
- **Köv.:** A valós szimmetrikusra létezik U valós ortog., hogy U^TAU diagonális.

Pótlap: valós Schur-felbontás biz. I 140

Áll.: Ha A valós és A kar. polinomjának λ egy valós gyöke, akkor létezik A-nak valós sajátvektora λ sajátértékkel.

Biz.: $\det(\lambda I - A) = 0$ miatt $\lambda I - A$ mint $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. transzf. szing., azaz a magja $\neq (0)$. Egy nemnulla elem a magból egy sajátvektor λ sajátértékkel.

Pótlap: valós Schur-felbontás biz. II. 141

Tétel.: Tfh. A $n \times n$-es valós, és A sajátértékei valósak. Ekkor létezik olyan U $n \times n$-es valós ortogonális, amelyre U^TAU felső háromszög.

Biz.: Indukció n szerint. $n = 1$: triviális.
$n > 1$: λ A-nak egy sajátértéke, v megf. 1 hosszú sajátvektor. Legyen U egy olyan $n \times n$-es ortog., aminek v az első oszlopa. (U további oszlopai $v^\perp$ egy ortonormált bázisa.) A U oszlopaiból álló bázisban az A-val való szorzás mátrixa

$$U^TAU = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}.$$

Az ind. felt. miatt $\exists$ U' $n-1 \times n-1$-es ortog., hogy $U'^TA'U'$ felső háromszög.

$$\text{Legyen } U'' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{U'} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $(UU'')^TA(UU'') = U''^TU^TAUU''$ felső háromszög. (És persze UU'' ortog.).

Projekció (vetítés) 142

- **Def.:** $\pi : V \to V$ lin. transzf. projekció, ha $\pi^2 = \pi$.
- **Áll.:** π projekció $\Leftrightarrow$ π megszorítása πV-re az identitás.
  $\pi^2 x = \pi x \Leftrightarrow \pi(\pi x) = (\pi x)$
- projekciók sajátértékei $\in \{0, 1\}$.
- **Ortogonális projekciók (merőleges vetítések):** Euklideszi térben egy olyan projekció, aminek mátrixa normális egy ortonormált bázisban.
- Ortog. proj. mátrixa önadjungált (valósra szimmetrikus).
- Egy normális mátrix projekció $\Leftrightarrow$ (komplex) sajátértékei a $\{0, 1\}$ halmazból kerülnek ki.

Merőleges vetítés altérre 143

- Legyen P ortogonális projekció mátrixa. Legyen U unitér, hogy $U^*PU = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Ekkor U első néhány oszlopa P képterének egy ortonormált bázisa, a többi pedig P magjáé, ami éppen a képtér $\perp$-komplementuma.
- **Köv.:** Egy ortogonális projekciót egyért meghatároz a képtere.
- Elnevezés: az altérre való merőleges vetítés.
  - létezés/konstrukció $W \leq V$-re:
  - $w_1, \ldots, w_r$ ortonormált bázis W-ben
  - kiegészítjük $w_{r+1}, \ldots, w_n$-nel V ortonormált bázisává
  - $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i w_i$
  - elő rész: vetület W-re, második rész: vetület $W^\perp$-re
- Példa: $v \mapsto v - \frac{u^*v}{u^*u}u$ merőleges vetítés az $u^\perp$ hipersíkra
  $v \mapsto \frac{u^*v}{u^*u}u$ merőleges vetítés az $\langle u \rangle$ egyenesre.

Merőleges vetítések további tul. 144

- **Áll.:** A vetület az altér legközelebbi vektora:
  Legyen $v \in V$, $w \in W$ v merőleges vetülete W-n
  $u \in W$-re
  a $W \leq V$-re való merőleges vetítés és $v \in V$, akkor tetsz. $u \in W$-re
  $$|v - u| \geq |v - w|,$$
  egyenlőség csakis $u = w$-re.
  - **Biz.:** $v = w + w'$, itt $w' \in W^\perp$.
  - Legyen $u \in W$. Ekkor $v - u = (v - w) + (w - u) = w' + (w - u)$.
  - $w' \perp (w - u) \in W$, így $|v - u|^2 = |w'|^2 + |w - u|^2 \geq |w'|^2$
  - $u \neq w$-re a különbség $|w - u| > 0$

Példák ortog. projekciókra — 145

- Az $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\\ \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\\ \vdots\\ \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\end{pmatrix}$ leképezés merőleges vetítés az $\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ irányú egyenesre. Mátrixa

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}\\ \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}$$

Példák ortog. projekciókra — 146

- az első néhány standard bázisvektor által feszített altérre való merőleges vetítés: $\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} =$
$(1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)^T (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0) + (0 \quad 1 \quad \ldots \quad 0)^T (0 \quad 1 \quad \ldots \quad 0) + \ldots$
- Általában, ha $W \le \mathbb{R}^N$-nek $w_1, \ldots, w_r$ egy ortonormált bázisa, akkor a W-re való merőleges vetítés mátrixa $w_1 w_1^T + \ldots + w_r w_r^T$.
- Ha π egy ortogonális projekció a W altérre, akkor $I - \pi$ egy ortogonális projekció a $W^\perp$ altérre. Például ha $u \in \mathbb{C}^n$ egy egységvektor, akkor uu^* az $\langle u \rangle$ altérre való merőleges vetítés, míg $I_n - uu^*$ az $u^\perp$ altérre vetít merőlegesen.

Ortogonális projekciók főátlója — 147

- **Négyzetes mátrix nyoma:** tr$A$ az A mátrix főátlójában levő elemeinek összege. A karakterisztikus polinom $n-1$-ed fokú tagjának az együtthatója, $-$ előjellel.
- Ezért $\mathrm{tr}\, C^{-1}AC = \mathrm{tr}A$.
- **Ortogonális projekciók főátlója:** Legyen $A = (a_{ij})$ egy ortog. proj. mátrixa (a standard bázisban).
  - $\mathrm{tr}A = A$ rangja,
    Biz.: A diag. alakjában az 1-ek száma, azaz a képtér dim.
  - $a_{ii} \ge 0$
    Biz.: Legyen $v_1, \ldots, v_n$ a standard bázis. $A^2 = A^*A = A$, így $a_{ii} = (v_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i) = (Av_i, Av_i) \ge 0$.
  - $a_{ii} \le 1$:
    Biz.: $v_i - Av_i \in \ker A = (A\mathbb{C}^n)^\perp$, így $(Av_i, v_i - Av_i) = 0$, így

$$\begin{aligned} 1 &= (v_i, v_i) = (Av_i, Av_i) + (v_i - Av_i, v_i - Av_i) \\ &\ge (Av_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i) = (v_i, Av_i) = a_{ii}. \end{aligned}$$

Pótlap: Tükrözések — 148

- **Def.** τ lin. transzf. **involúció**, ha $\tau^2 = I$.
- **Áll.** π projekció $\Leftrightarrow$ $I - 2\pi$ involúció
  $(I-2\pi)^2 = I - 4\pi + 4\pi^2 = I + 4(\pi^2 - \pi)$
- **Áll.** τ involúció $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(I - \tau)$ projekció
- **Def.:** tükrözés = (standard bázsiban) normális mátrixú involúció
- **Áll.** π ortogt. proj. $\Leftrightarrow$ $I - 2\pi$ tükrözés
- **Áll.** τ tükr. $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(I - \tau)$ ortog. proj.
- **Áll.:** T normális mátrix egy tükr. $\Leftrightarrow$ T sajátértékei ± 1
- **Köv.:** tükrözés egyszerre unitér és önadj. (valósra egyszerre ortog. és szimm.)
- **Példa:** $u^\perp$-re tükr: $v \mapsto v - 2\frac{u^*v}{u^*u}u$

Gyakorló feladaok: — 149

Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek és miért?

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$,

$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2×2-es valós normális mátrixok — 150

- A 2×2-es valós
- másodfokú valós kar. pol
- a sajátértékek: vagy egy/két valós, vagy egy konjugált pár
- egy/két valós sajátérték: Ekkor A normális $\Leftrightarrow$ A szimmetrikus.
- konjugált pár: $a + bi, a - bi$. Ekkor A normális $\Leftrightarrow$ $A - aI$ normális $\Leftrightarrow$ $A - aI$ ferdén szimmetrikus:

$$A = \begin{pmatrix}a & c\\ -c & a\end{pmatrix}$$

alakú.

Alkalmazott algebra - SVD

Ivanyos Gábor

2011 ősz

SVD - szinguláris értékek szerinti felbontás — 152

Poz. szemidefinit mátrixok spektrálfelbontásának általánosítása nem feltétlenül négyzetes mátrixokra

"Közelítő" webkeresés egy modellje

- dokumentumok (weblapok) $\sim$ vektorok,
- a koordináták a (lényeges) szavaknak felelnek meg:
- A koordináták kiszámítására példák:
  - egyszerű incidencia: 0 vagy 1
  - fontosság szerinti súlyok
    Pl. relatív említési gyakoriságból kalkulált
    Számíthat az említés módja is: címben, hivatkozásban, szövegben
- keresőkérdés $\sim$ dokumentum-vektor
- Feladat: a kérdés vektorához minél jobban illeszkedő: "hasonló", "közeli" dokumentum-vektor keresése
- Nem pontos illeszkedés: lehet, hogy a legjobb találat nem is tartalmazza a kérdés egy szavát se, inkább
- A kérdés "jelentéséhez" van köze

LSI - mögöttes szemantikájú indexelés

- Latent Semantic Indexing
- m dokumentum (pl. weblap), n szó
- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-es, $\alpha_{ij} \sim j$. szó az i. dok-ban
- A sorai $\sim$ dokumentumok
- A oszlopai: szavak "profilja"
- **Feltevés:**
  - a háttérben (általunk nem ismert) fogalmak, jelentések állnak
  - a szavak jól közelíthetők fontosabb jelentések **elegyével**
  - a jelentéseket a dokumentumokból "tanulhatjuk" meg
  - a közelítés hibája: "zaj", "lényegtelen", "esetleges" dolgok

LSI

- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-es, $\alpha_{ij} \sim j$. szó az i. dok-ban
- **Formálisan:**
  - léteznek $f_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{m1} \end{pmatrix}, \dots, f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektorok
    (a jelentések profiljai), hogy
  - A oszlopai jól közelíthetők $f_1, \dots, f_k$ **lineáris kombinációival**, azaz létezik olyan B $m \times k$-as mátrix, hogy
    $$A \approx FB,$$
    ahol $F = (f_{ij})$.
    B i-edik sora az A-nak az i-edik oszlopát közelítő kombináció együtthatóiból áll

Alacsony rangú közelítés

- **Áll.:** Legyen A' egy $m \times n$-es mátrix. Ekkor A' rangja $\le k \Leftrightarrow$ léteznek olyan B $k \times n$-es és F $m \times k$-as mátrixok, amelyekre
  $$A' = FB.$$
  Biz.: A' rangja $\le k \Leftrightarrow$ létezik olyan F $m \times k$-as, hogy A' oszlopai megkaphatók F oszlopainak lineáris kombinációiként
  Emellett B i-edik sora az A' i-edik oszlopát előállító kombináció együtthatóiból áll.
- **Tehát:** a "lényeg" $\sim$ A alacsony rangú közelítése

Eredet: főkomponensanalízis

- K. Pearson 1901
- $A = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-es, $\alpha_{ij} \sim j$. adat értéke az i. mérés során
  Pl. kérdőív kérdéseire adott válaszok, skálázva
- Oszlopok: $\sim$ val. változók mért adatai $a^j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$
- Sorok: egy-egy mérésre az adatok sora $a_i = (\alpha_{i1} \quad \dots \quad \alpha_{in})$
- Feltesszük: $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 0 \sim$ 0-ra normált empirikus átlagok
- $|a_j|^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}^2$: $\sim$ empirikus szórásnégyzet
- a legfontosabb "rejtett összetevő": abban az irányban vett adatok, amerre a leginkább szórnak.

Főkomponensanalízis

- u **irányú adatok:** Legyen $u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ egységvektor ($u^T u = 1$).
  Az i-edik mérés u irányú adata a_i^T vektor u irányú (u-val párhuzamos) komponensének az együtthatója, azaz $a_i u = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\mu_j$. Az m darab u irányú adat együtt: Au.
- fő irány: az az u, amelyre $|Au|^2 = \sum_{i=1}^m (a_i u)^2$ maximális
- a megfelelő "rejtett változó" $\sim$ az Au oszlopvektor
- a következő fő irány: az u-ra merőlegesek közül a legnagyobb vetületet adó irány, stb...

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek

- $A = (\alpha_{ij})$ tetszőleges $m \times n$-es mátrix ($\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 0$ nem kell.)
- $u_1 \in \mathbb{R}^n$ olyan egységvektor, amelyre
  $|Au_1|^2$ a lehető legnagyobb
- Ha $u_1, \dots, u_s$ már megvan, u_{s+1} egy olyan egységvektor $\{u_1, \dots, u_s\}^\perp$-ből, amelyre
  $|Au_{s+1}|^2$ a lehető legnagyobb
- Mi lehet $u_1, \dots, u_n$?

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek

- **Észrevétel:** $|Au|^2 = u^T A^T A u$, és $A^T A$ poz. szemidefinit
  utóbbi biz.: $(A^T A)^T = A^T A$, tehát $A^T A$ szimm.
  $v^T (A^T A) v = (Av)^T (Av) \ge 0$. (Egyenlőség v ker A-ra).
- **Köv.:** $\exists$ M ortog., hogy $M^T A^T A M = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$.
  Feltehető, hogy $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge \sigma_n \ge 0$.
- (Elnevezés: **szinguláris értékek**)
- **Áll.:** $|u| = 1$ esetén $|Au| \le \sigma_1$ és ha $|Au| = \sigma_1$, akkor u sajátvektora $A^T A$-nak σ_1^2 sajátértékkel. (zh091030, 5. fa.)
  Biz.: Legyen M mit fent és $v := M^T u = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$. Ekkor $u = Mv$ és
  $|Au|^2 = |AMv|^2 = v^T M^T A^T A M v = \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \sigma_i^2 \le \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \sigma_1^2 = \sigma_1^2$, és ha $\nu_i \ne 0$ olyan i-re, amelyre $\sigma_i < \sigma_1$, akkor $<$ áll. Különben $u = Mv$ az M olyan oszlopainak lineáris kombinációja, amelyek sajátvektorok σ_1^2 sajátértékkel.

Főkomponensanalízis és szinguláris értékek — 161

- **Áll.:** Tfh. $|u| = 1$ és $u \perp M$ első k oszlopára. Ekkor $|Au| \leq \sigma_{k+1}$ és ha $|Au| = \sigma_k$, akkor u sajátvektora A^TA-nak σ_k^2 sajátértékkel.

  Biz.: Legyen $v = M^Tu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$. A merőlegességi feltétel miatt $\nu_1 = \ldots = \nu_k = 0$, Ekkor $Au = AMv$ és

  $|Au|^2 = \sum_{i=k+1}^n \nu_i^2\sigma_i^2 \leq \sum_{i=k+1}^n \nu_i^2\sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+1}^2$. Az egyenlőség vizsgálata is hasonló a $k = 1$ esethez.
- **Köv.:** A fő irányok A^TA sajátvektorai, azaz (lényegében) M oszlopai.

Szinguláris értékek — 162

A $m \times n$-es **valós** mátrix **Megj:** (a komplex eset hasonlóan működik)

- **Def.:** A **szinguláris értékei** A^TA (nem nulla) sajátértékeinek $\sqrt{\ }$-e
- **Áll.:** A^TA rangja $= A$ rangja

  Biz.:

  Észrevétel: $\ker A^T \cap A\mathbb{R}^n = 0$.

  Észrv. biz.: Tfh. $v \in \ker A^T \cap A\mathbb{R}^n$: $A^Tv = 0$ és $v = Au$. Ekkor $u^TA^TAu = u^TA^Tv = 0$, így $Au = 0$.

  Dimenziótétel A^T-nek $A\mathbb{R}^n$-re való megszorítására+Észrv.: $\dim A^TA\mathbb{R}^n = \dim A\mathbb{R}^n - 0 = \dim A\mathbb{R}^n$, azaz

  A^TA rangja $= A$ rangja.
- **Köv.:** (poz.) szinguláris értékek száma $=$ rang

A és A^T szing. értékei — 163

- **Áll.:** Ha σ (poz.) szing. értéke A-nak, akkor A^T-nak is (és viszont).
- **Részletesebben:** Ha v sajátvektora A^TA-nak $\sigma^2 \neq 0$ sajátértékkel, akkor Av sajátvektora AA^T-nak szintén σ^2 sajátértékkel.

  Biz.: Tfh. $0 \neq v$ és $A^TAv = \sigma^2 v$. Ekkor $(AA^T)(Av) = A(A^TA)v = A\sigma^2 v = \sigma^2 Av$.

  $v = \frac{1}{\sigma^2}A^TAv$, így $Av \neq 0$.
- **Megj.** A (poz.) szing. értékek multiplicitásai is ugyanazok.

  Biz.: A $\frac{1}{\sigma}A$ az A^TA σ^2-sajátalterét az AA^T σ^2-sajátalterébe viszi. A $\frac{1}{\sigma}A^T$ pedig fordítva.

  A két leképezés megszorítása a σ^2-sajátalterekre inverzei egymásnak.

SVD - A fő lemma — 164

Lemma: Tetsz. A $m \times n$-es valós mátrixhoz léteznek M $n \times n$-es és M' $m \times m$-es ortogonális mátrixok, hogy:

$$M'^TAM = \Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_n & & \end{pmatrix}$$

Az első az $m > n$ esetet, a második az $m < n$ esetet ábrázolja

$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$: A^TA sajátértékeinek nemnegatív $\sqrt{\ }$-e

SVD - a fő lemma bizonyítása — 165

- Legyen M olyan ortog., amelyre
  $$M^TA^TAM = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$$
- **Megj:** főkomponensanalízisnél M oszlopai: a fő irányok, AM oszlopai: a fő irányok mentén vett értékek vektorai
- Legyenek AM oszlopai $w_1, \ldots, w_n$.
- $(AM)^T(AM) = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$ miatt
- $w_i^Tw_j = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

SVD - a fő lemma bizonyítása II — 166

- $w_i^Tw_j = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$
- Tfh. $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, de $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$.
- **Megj.:** $i > r$-re $w_i = 0$ (mert $w_i^Tw_i = \sigma_i^2 = 0$)
- Legyenek $i \leq r$-re $v_i = \frac{1}{\sigma_i}w_i$
- Ha $m > r$, egészítsük ki $v_{r+1}, \ldots, v_m$-mel $\mathbb{R}^m$ ortonormált bázisává.
- $v_i^Tw_j = \begin{cases} \sigma_i, & \text{ha } i = j < r \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$
- Legyenek M' oszlopai: $v_1, \ldots, v_m$. Ekkor M' ortog. és $M'^TAM = \Sigma'$

Teljes SVD — 167

Tétel: Tetsz. A $m \times n$-es valós mátrixhoz léteznek M $n \times n$-es és M' $m \times m$-es ortogonális mátrixok, hogy

$$A = M'\Sigma'M^T, \quad \text{ahol}$$

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_n & & \end{pmatrix}$$

Biz.: a fő lemma egyenlőségét M'-vel ill. M^T-vel szorozzuk balról-jobbról.

Redukált SVD — 168

Tétel: Tetsz. A $m \times n$-es valós, r rangú mátrixhoz vannak U' $m \times r$-es, U $n \times r$-es mátrixok, hogy

- $U^TU = U'^TU' = I_r$, azaz U, ill. U' oszlopai ortonormált rendszerek
- $A = U'\Sigma U^T$, ahol
  $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$
- $\sigma_1 > \ldots > \sigma_r > 0$ A (poz.) szing. értékei.

Megj. (a komplex eset): $U^*U = U'^*U' = I_r$, $A = U'\Sigma U^*$. (Ekkor A^*A lesz poz. szemidef. önadj.)

Redukált SVD - bizonyítás

- Teljes SVD: $A = M'\Sigma' M^T$
- Legyenek $M = (U|T)$, $M' = (U'|T')$.
  U ill. U' az M ill. M' első r oszlopa. Nyilván $U^TU = U'^TU' = I_r$.
- $\Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A = (U'|T')\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^T \\ T^T \end{pmatrix} = (U'\Sigma|0)\begin{pmatrix} U^T \\ T^T \end{pmatrix} = U'\Sigma U^T$.

SVD: "Egyértelműség" kérdése

- Tfh. $A = U'\Sigma U^T$, ahol $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, U' $m \times r$-es U $n \times r$-es, $U'^TU' = I_r$, $U^TU = I_r$.
- Ekkor $A^TA = U\Sigma U'^TU'\Sigma U^T = U\Sigma^2U^T$, így $\Sigma^2 = U^TA^TAU$.
- Innen: U oszlopai az A^TA mátrix nem 0 sajátértékeihez tartozó sajátaltereinek ortonormált bázisait adják.
  Egészítsük ki U-t egy $n \times n$-es M ortog. mátrixszá ker A^TA-ból vett oszlopvektorokkal. Erre $M^TA^TAM = \Sigma'^2$.
- U': fenti érvelés, $A \leftrightarrow A^T$ cserével.
- **Köv:** ha A pozitív szinguláris értékei páronként kül, akkor U és U' az oszlopok egységszerese (± 1) erejéig egyértelmű.

SVD - példa

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $M^TA^TAM = \Sigma'^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma' = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $M = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,
- $AM = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
- $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{12} & c_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{22} & c_{23} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$
- $\Sigma = \sqrt{6}$, $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, tehát $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

SVD szimmetrikus mátrixokra

$A^T = A$

- a szinguláris értékek A sajátértékeinek abszolút értékei (multiplicitással).
- Tfh. $A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$,
  ahol U $n \times n$-es ortogonális; $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
- Ekkor A egy lehetséges teljes SVD-je

$$A = U' \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & & \\ & |\lambda_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n| \end{pmatrix} U^T,$$

ahol U' i-edik oszlopa U i-edik oszlopának ± 1-szerese, aszerint, hogy $\lambda_i \geq 0$ vagy $\lambda_i < 0$.

A Frobenius-norma

A $m \times n$-es valós

- **Def. (Frobenius-norma-négyzet):** ($=$ eukl. hossznégyzet)

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

- **Ugyanaz, mint:** sorok v. oszlopok hossznégyzet-összege
- **Elegáns alak:** $\|A\|^2 = \mathrm{tr}\, A^TA = \mathrm{tr}\, AA^T$, ahol
- **Emlék. (nyom, trace):** $B = (b_{ij})$ $n \times n$-esre $\mathrm{tr}\, B = \sum_{i=1}^n b_{ii}$
- **Megj. (komplex mátrixokra):**
  $\|A\|^2 = \sum\sum |a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}\, A^*A = \mathrm{tr}\, AA^*$
- **Nyom tulajdonsága:** A $m \times n$-es, B $n \times m$-esre:
  $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$.

Normatartó szorzások:

Áll.: Tfh. A $m \times n$-es, B olyan $m' \times m$-es amelynek az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $B^TB = I_m$), C olyan $n \times n'$-es, amelynek a sorai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $CC^T = I_n$). Ekkor

$$\|BA\|^2 = \|A\|^2 = \|AC\|^2.$$

Biz.: A oszlopai $a^1, \ldots, a^n$, BA oszlopai $Ba^1, \ldots, Ba^n$. B az $\mathbb{R}^m$ standard bázisát B képterének egy ortonormált bázisába viszi, tehát B egy izometria $\mathbb{R}^m$ és B képtere között.
Így $|Ba^j|^2 = |a^j|^2$ és $\|BA\|^2 = \sum |Ba^j|^2 = \sum |a^j|^2 = \|A\|$.
A másik $=$-ség innen $A \leftarrow A^T$, $B \leftarrow C^T$ helyettesítéssel.
Másik biz.:

$$\|BA\|^2 = \mathrm{tr}\, A^TB^TBA = \mathrm{tr}\, A^TI_mA = \mathrm{tr}\, A^TA = \|A\|^2.$$

Az Eckart–Young-tétel

- Eckart–Young 1936 (Psychometrika)
- Korábban: Schmidt approximációs tétele 1907 (függvények kontextusában)
- **Redukált SVD:** $A = U'\Sigma U^T$.
- $k \leq r$-re legyenek
  - $U^{(k)}$: U első k oszlopa
  - $U'^{(k)}$: U' első k oszlopa
  - $\Sigma^{(k)} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$: Σ bal felső $k \times k$-as része
  - $A^{(k)} := U'^{(k)}\Sigma^{(k)}U^{(k)T}$
- **Tétel:** A-nal $A^{(k)}$ az (egyik) legjobb $\leq k$ rangú közelítése a Frobenius-normában
  (A hiba: $\|A - A^{(k)}\|^2 = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2$)
- **Megj.:** Mirsky 1960: és még sok más fontos normában is ez a legjobb

Eckart–Young teljes SVD-vel

- **Teljes SVD:** $A = M'\Sigma' M^T$, ahol
- Σ' $m \times n$-es diagonális, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ nemnulla átlós elemekkel
- $\Sigma'^{(k)}$: írjunk Σ'-ben $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$ helyébe 0-t
- $A^{(k)} = M'\Sigma'^{(k)}M^T$

Eckart–Young bizonyítása 177

- Az U'^T-vel való balról, U-val jobbról szorzás tartja a Frobenius-normát:
- $\left\|A - A^{(k)}\right\|^2 = \left\|U'^T(A - A^{(k)})U\right\|^2 = \left\|\Sigma - \widetilde{\Sigma^{(k)}}\right\|^2 =$ $\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2$,
  ahol $\widetilde{\Sigma^{(k)}} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$ $r \times r$-es
- Legyen A' egy $\leq k$ rangú $m \times n$-es
- $\|A - A'\|^2 = \left\|U'^T(A - A')U\right\|^2 = \left\|U'^T AU - U'^T A'U\right\|^2 =$ $\|\Sigma - C\|^2$,
  ahol $C := U'^T A'U \leq k$ rangú $r \times r$-es
- Elég tehát a következő spec. esetet igazolni:
- **Spec. eset:** tetsz. $C \leq k$ rangú $r \times r$-esre:

$$\|\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) - C\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2.$$

Eckart–Young spec. eset bizonyítása 178

Spec. eset: tetsz. $C \leq k$ rangú $r \times r$-esre:

$$\|\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) - C\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2.$$

- Legyen $W = \ker C$ egy $r - k$ dimenziós altere
- U_1 $r \times (r - k)$-as oszlopai: W egy ortonormált bázisa
- U_2 $r \times k$-as oszlopai: $W^\perp$ egy ortonormált bázisa
- $(U_1|U_2)$ $r \times r$-es ortogonális
- $D := \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$

Eckart–Young spec eset bizonyítása II 179

$$\begin{aligned}\|D - C\|^2 &= \left\|(U_1|U_2)^T(D - C)(U_1|U_2)\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix}(D - C)(U_1|U_2)\right\|^2 \\ &= \left\|\begin{pmatrix} U_1^T(D - C) \\ U_2^T(D - C) \end{pmatrix}(U_1|U_2)\right\|^2 = \left\|\left(\begin{array}{c|c} U_1^T(D - C)U_1 & U_1^T(D - C)U_2 \\ \hline U_2^T(D - C)U_1 & U_2^T(D - C)U_2^T \end{array}\right)\right\|^2 \\ &\geq \left\|U_1^T(D - C)U_1\right\|^2 = \left\|U_1^T DU_1 - U_1^T CU_1\right\|^2 = \left\|U_1^T DU_1\right\|^2\end{aligned}$$

$\geq$: a mátrix normája $\geq$ a mátrix bal felső blokkjának a normája
utolsó $=$: $U_1^T CU_1 = 0$ mert $CU_1 = 0$ (U_1 oszlopai C magjából)
Elég tehát: $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$-re és tetsz olyan U_1 $r \times (r - k)$-asra, amelyre $U_1^T U_1 = I_{r-k}$, teljesül

$$\left\|U_1^T DU_1\right\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2$$

Eckart–Young spec eset bizonyítása III 180

Utolsó lépés $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, U_1 $r \times (r - k)$-as, amelyre $U_1^T U_1 = I_{r-k}$.

$$\begin{aligned}\left\|U_1^T DU_1\right\|^2 &= \mathrm{tr}\,(U_1^T DU_1)^T U_1^T DU_1 = \mathrm{tr}\,U_1^T D^T DU_1 = \mathrm{tr}\,U_1 U_1^T D^T D = \mathrm{tr}\,U_1 U_1^T D^2 \\ &= \sum_{i=1}^r \beta_{ii}\sigma_i^2,\end{aligned}$$

ahol $U_1 U_1^T = (\beta_{ij})$.

- **Áll.:** $U_1 U_1^T$ egy $r - k$ rangú merőleges vetítés
  $(U_1 U_1^T)^T = U_1 U_1^T$ és $(U_1 U_1^T)^2 = U_1 U_1^T U_1 U_1^T = U_1 I_{n-k} U_1^T = U_1 U_1^T$
- **Innen:** $0 \leq \beta_{ii} \leq 1$ és $\sum_{i=1}^r \beta_{ii} = r - k$.
- Fenti feltételek mellett: $\sum_{i=1}^r \beta_{ii}\sigma_i^2 \to \min$, ha a legkisebb σ_i^2-eket vesszük a lehető legnagyobb súllyal:
- $\left\|U_1^T DU_1\right\|^2 = \sum_{i=1}^r \beta_{ii}\sigma_i^2 \geq \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2$, épp ez kellett.

LSI - keresés záró megj. 181

- **Észrevétel:** Ha w A egy sora, az $A^{(k)}$ mátrixnak a megfelelő sora éppen w vetülete az $A^{(k)}$ sorai által generált altérre.
  Biz.: Ha nem az lenne, kicserélve a sort w vetületével jobb közelítést kapnánk
- Keresőkérdés $\sim$ dokumentum-vektor $\sim$ A sorai.
- **Eljárás:** A keresőkérdés vektorát levetítjük $A^{(k)}$ sorai által gen. altérre.

Az SVD kiszámításáról 182

- **Naiv módszer:** $A^T A$ sajátértékei a kar. pol.-ból, majd a sajátalterek homogén lin. egyenletrendszerekkel
  Gauss-elimináció
- **Gond:** a Gauss-elimináció numerikus hibákra instabil
- Hatékony **numerikus módszerek** vannak (később tárgyaljuk)

Négyzetgyök 183

Áll.: Ha A $n \times n$-es valós poz. szemidef., akkor $\exists!$ olyan B $n \times n$-es poz. szemidef., hogy $A = B^2$ (jel.: $B = \sqrt{A}$).
Biz.: Legyen U ortog., hogy $D = U^T AU$ diag. (≥ 0 elemekkel),
$B' = \sqrt{D}$ (elemenként).
B' valós, poz. szemidef. és $B'^2 = D$.
$B = UB'U^T$ is poz. szemidef, továbbá

$$B^2 = UB'U^T UB'U^T = UB'^2 U^T = UDU^T = A.$$

Egyértelműség: Tfh $A = B^2$. Legyen U olyan ortog., hogy $U^T BU = B'$ diag. Ekkor $U^T AU = U^T B^2 U = B'^2$ diag.
Innen: $U^T AU$ és B' sajátalterei ugyanazok: $U^T AUv = \lambda v \Leftrightarrow B'v = \sqrt{\lambda}v$
Innen: ($v = Uu$): $Au = \lambda u \Leftrightarrow UB'U^T u = \sqrt{\lambda}u \Leftrightarrow Bu = \sqrt{\lambda}u$. Így B nem lehet más, mint fenti konstrukció.

Poláris felbontás 184

Tétel: Tetsz. A $n \times n$-es valós mátrixra $A = PM$, ahol

- M $n \times n$-es ortog.
- P $n \times n$-es poz. szemidef.
- P egyértelmű, és ha A nemszing., akkor M is.
  Biz. Létezés: A teljes SVD-je: $A = U'\Sigma' U^T$, ahol U és U' $n \times n$-es ortog., Σ' pedig egy $n \times n$-es diag. nemneg. Legyen $P = U'\Sigma U'^T$ és $M = U'U^T$.
  P egyért.: $AA^T = PMM^T P = P^2$, így $P = \sqrt{AA^T}$. Ha A invertálható, akkor P is az és $M = P^{-1}A$.

Megj.: hasonlóan, $A = M'P'$, ahol M' unitér és P' poz. szemidef. $P' = P$ akkor és csak akkor, ha $A^T A = AA^T$, azaz ha A normális.
Megj: Komplex $A = PM$, ahol M unitér, P poz. szemidef önadj.
1-dim. komplex eset: komplex számok felbontása $re^{i\phi}$ alakban.

(teljes) SVD a poláris felbontásból — 185

Négyzetes mátrixokra

- $A = PM$
- M ortog.
- P poz. szemidef: $M'^T PM' = \Sigma$ diag,
- $A = U'\Sigma U^T$, ahol $U' = M'^T$, $U = M^T M'^T$.

Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása SVD-vel — 186

- **A feladat:** $Ax = 0$ megoldása, azaz ker A számítása.
- **Emlékeztető:** $A^T A$ rangja $= A$ rangja, így (pl. a dimenziótételből)

$$\ker A^T A = \ker A.$$

- **Teljes SVD:** $A = M'\Sigma' M^T$
  $\Sigma' = M'^T AM$, innen
  $\Sigma'^2 = \Sigma'^T \Sigma' = M^T A^T M' M'^T AM = M^T A^T AM$
- $\Sigma'^2 = M^T A^T AM$, azaz M oszlopai $A^T A$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis
- **Köv.:** M utolsó $n - r$ oszlopa: $\ker A^T A = \ker A$ egy ortonormált bázisa

Homogén lin. egyenletrendszerek megoldása legkisebb négyzetes hibával — 187

- Elnevezés: "total least squares"
- $Ax = 0$ közelítő megoldása a legkisebb négyzetes hibával $|x| = 1$ mellett:

$$|Ax|^2 \longrightarrow \min, \text{feltéve } |x| = 1.$$

Feltehető: $\ker A = 0$, így n poz. szing. érték van.

- SVD: $A = U'\Sigma U^T$ így $\Sigma^2 = U^T A^T AU$.
- legyenek $v_1, \ldots, v_n$ U oszlopai. Ortonormált bázis, $A^T Av_i = \sigma_i^2 v_i$.
- Legyen $x = \sum \alpha_i v_i$, ahol $|x|^2 = \sum |\alpha_i|^2 = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= (Ax, Ax) = (x, A^T Ax) = (\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i \sigma_i^2 v_i) = \sum \sigma_i^2 |\alpha_i|^2 \\ &\geq \sum |\alpha_i|^2 \sigma_n^2 = \sigma_n^2, \qquad \text{(ez, a másik irányban volt a főkomp-nél)} \end{aligned}$$

- az optimum σ_n^2, $x = v_n$-nel el is érhető
- $\sigma_{n-1} > \sigma_n$ esetén az optimális x ± 1-szeres erejéig egyértelmű.

Inhomogén egyenletrendszerek megoldása legkisebb négyzetes hibával — 188

- $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer. A $m \times n$-es valós, $b \in \mathbb{R}^n$
- nem mindig van **pontos megoldás:** olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $Ax - b = 0$
- **Közelítő megoldás:** olyan x, amelyre $|Ax - b|^2 \rightarrow \min$
- Ilyen x-re Ax éppen b-nek $A\mathbb{R}^n$-re való $\perp$ vetülete
  Tudjuk: altér legközelebbi pontja a vetület
- **Fogjuk látni:** létezik A^+ $n \times m$-es, amelyre AA^+ éppen az $A\mathbb{R}^n$-re való $\perp$ vetítés
- (az egyik) **legkisebb négyzetes hibájú magoldás**: $x = A^+ b$.
  (mert $Ax = AA^+ b$=a vetület)
- az összes mo.: a $\ker A + A^+ b$ eltolt altér

A Moore–Penrose-féle pszeudoinverz — 189

- **Def.:** A $m \times n$-es valós mátrixnak egy pszeudoinverze egy olyan A^+ $n \times m$-es valós mátrix, amelyre
  - $AA^+ A = A$,
  - $A^+ AA^+ = A^+$,
  - AA^+ szimmetrikus,
  - $A^+ A$ szimmetrikus.
  (Megj.: komplex A-ra szimm. helyett önadj.)
- **Pszeudoinverz az SVD-ből:** Ha A red. SVD-je $A = U'\Sigma U^T$, akkor $A' = U\Sigma^{-1} U'^T$ (egy) pszeudoinverze A-nak.
  Biz.: $U^T U = U'^T U' = I_r$-ből $AA' = U'\Sigma U^T U \Sigma^{-1} U'^T = U'U'^T$ és $A'A = U\Sigma^{-1} U'^T U'\Sigma U^T = UU^T$.
  Az $AA' = U'U'^T$ és $A'A = UU^T$ a segítségével:
  - $AA'A = U'U'^T A = U'U'^T U'\Sigma U^T = U'\Sigma U^T = A$.
  - $A'AA' = A'U'U'^T = U\Sigma^{-1} U'^T U'U'^T = U\Sigma^{-1} U'^T = A'$
  - $(AA')^T = (U'U'^T)^T = U'U'^T = AA'$.
  - $(A'A)^T = (UU^T)^T = UU^T = A'A$.

Pszeudoinverz és vetítés — 190

Lemma: Tfh. A^+ egy pszeudoinverze A-nak. Ekkor AA^+ az $\mathbb{R}^m$ tér merőleges vetítése A képterére, $A^+ A$ pedig az $\mathbb{R}^n$ tér merőleges vetítése A^T képterére.

Biz.:

- AA^+ szimm. és $(AA^+)^2 = AA^+$, azaz egy merőleges vetítés.
  AA^+ képtere nyilván $\subseteq A$ képtere. $A = (AA^+)A$ képtere nyilván $\subseteq AA^+$ képtere.
  Tehát AA^+ merőleges vetítés A képterére.
- $A^+ A$ is merőleges vetítés (hasonló biz.).
  $A^+ A$ szimm., így $A^+ A = A^T A^{+T}$, ezért
  $A^+ A$ képtere $\subseteq A^T$ képtere.
  $A = AA^+ A$ miatt $A^+ A$ rangja $\geq A$ rangja, ami egyben A^T rangja. Ezért a két képtér megegyezik.
  Tehát $A^+ A$ merőleges vetítés A^T képterére.

Pszeudoinverz - egyértelműség — 191

- **Áll.:** A^+ és A' két pszeudoinverze A-nak $\Rightarrow A' = A^+$.
  - **Biz.:** A lemma miatt AA^+ is és AA' az ortogonális projekció A képterére, így
  - $AA' = AA^+$.
  - Hasonlóan, $A'A = A^+ A$.
  - Ezekből $A' = A'AA' = A'AA^+ = A^+ AA^+ = A^+$.
- **Köv.:** Ha $A = U'\Sigma U^T$ az A mátrix red. SVD-je, akkor A pszeudoinverze $A^+ = U\Sigma^{-1} U'^T$.

Pszeudoinverz - példa I. — 192

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- SVD: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} A^T$

Pszeudoinverz - példa II. 193

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- SVD: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T$.

Pszeudoinverz - feladatok 194

- $(A^+)^+ = A$.
- $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
- A^+ rangja $= A$ rangja.
- Ha A invertálható négyzetes mátrix, akkor $A^+ = A^{-1}$.
- Ha A egy merőleges vetítés (négyzetes) mátrixa, akkor $A^+ = A$.

Pszeudoinverz - példa III. 195

- Legyen $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- A és B merőleges vetítések, így $A^+ = A$, $B^+ = B$.
- $(AB)(BA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A$
- $(AB)(BA)$ nem vetítés, de $(AB)(AB)^+$ az kell legyen, így
- $(AB)^+ \neq BA = B^+A^+$.
- AB SVD-je $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2BA$.

A pszeudoinverz és a magtér 196

A $m \times n$-es valós

- **Áll.:** A^T képtere $= (\ker A)^\perp$
  - **Biz.:**
  - $\subseteq$: Ha $x \in \ker A$ és $y \in \mathbb{R}^m$, akkor $(A^Ty)^Tx = y^TAx = 0$, azaz $x \perp Ay$. Tehát $A^T\mathbb{R}^m \leq (\ker A)^\perp$.
  - dimenziók $=$:
    $\dim A^T = A^T$ rangja $= A$ rangja $= \dim A\mathbb{R}^n =$
    $n - \dim\ker A = \dim(\ker A)^\perp$.
- **Köv.:** $I - A^+A$ merőleges vetítés A magterére
  - **Biz.:** A^+A merőleges vetítés $A^T\mathbb{R}^m$-re
  - $I - A^+A$ merőleges vetítés $(A^T\mathbb{R}^m)^\perp$-re
  - $(A^T\mathbb{R}^m)^\perp = (\ker A)^{\perp\perp} = \ker A$

SVD - feladatok 197

- **számpéldák önálló gyakorlásra** zh101029, 3. és 4. feladatok; pzh101108, 3. és 4. feladatok; pzh091106 2.feladat
- (zh091030, 6. feladat) Legyen A egy $m \times n$-es valós. Legyen B a következő

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right).$$

Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?

Alkalmazott algebra - Nemnegatív mátrixok

Ivanyos Gábor

2011 ősz

Markov-láncok 199

- **Pontosabban:** véges állapotú, **homogén** (AKA stacionárius átmenet-valószínűségű) **Markov-láncok**
- **Állapotok:** $\{1, \ldots, n\}$
- Állapot-értékű val. változók: $X_0, X_1, X_2, \ldots,$,
- **Átmenet-valószínűségek:** a_{ij} : az $j \to i$ átmenet valsz:

$$\Pr(X_{k+1} = i | X_k = j) = a_{ij}$$

- X_k **eloszlása:** $\sim v^k = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix}$ **sztochasztikus** vektor:

$\gamma_j^k \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \gamma_j^k = 1$

Markov-láncok 200

- **Kezdeti eloszlás:** v^0.
- $v^{k+1} = Av^k$
- $A = (a_{ij})$ átmenet-mátrix
  (oszlop-)sztochasztikus
  (sztochasztikus vektort sztochasztikusba képez):
  - $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
  - $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $v^k = A^kv^0$
- **kérdés:** v^k aszimptotikus viselkedése
  v^k konvergál-e és hova?
  ha konvergál, milyen gyorsan?

Szörfölő: 201

- állapotok: weblapok
- átment-valószínűség: $a_{ij} = \frac{\#j \to i \text{ linkek}}{\#j \to ? \text{ linkek}}$
- feltesszük, hogy minden j-re van $j \to ?$ link
  (pl. szükség esetén beiktatható saját magára mutató virtuális link)
- Korábban említett problémák:
  - több erős komponens: **reducibilitás**
  - "körbemutató linkek": **periodicitás/imprimitivitás**
- **Majd látjuk:** Több fontos sajátosság megfogható a link-gráffal (egyszeres irányított élek, lehetnek hurkok)
- **Markov-láncra,** (v. tetsz. mátrixra) a gráf
  - $j \to i$, ha $a_{ij} > 0$ és
  - a türelmetlen szörfölőre ez a teljes gráf

A spektrálsugár 202

- A $n \times n$-es **komplex vagy valós** mátrix
- A **spektrálsugara:**

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}.$$

- **Tudjuk:** ha $\exists \lim_{k\to\infty} A^k v^0 = v$, akkor $Av = v$
  Ha ez a $v \neq 0$, akkor v sajátvektora A-nak 1 sajátértékkel
- **Tétel:**
  (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  (2) Ha $\rho(A) > 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = \infty$.
  Biz.: Schur-felb.: $A = U^*BU$: U unitér, B felső háromszög.
  (2).: $\|A^k\|^2 = \operatorname{tr} {A^k}^* A^k = \operatorname{tr} U{B^k}^* U^* U B^k U^* =$
  $\operatorname{tr} U{B^k}^* B^k U^* = \operatorname{tr} {B^k}^* B^k U^* U = \operatorname{tr} {B^k}^* B^k = \|B^k\|^2$, elég
  tehát B-re belátni. Tfh. $B = (b_{ij})$-ben $|b_{ii}| > 1$. Ekkor B^k-nak
  az i-edik átlós eleme b_{ii}^k és $\|B^k\| \geq |b_{ii}|^k \to \infty$.
  (1).:-hez a köv. lemma.

A spektrálsugár II. 203

- **Lemma:** $C = (c_{ij})$, $C' = (c'_{ij})$ komplex $n \times n$-es mátrixok, $D = (d_{ij})$, $D' = (d'_{ij})$ nemnegatív elemű valós mátrixok, hogy $|c_{ij}| \leq d_{ij}$, $|c'_{ij}| \leq d'_{ij}$. Ekkor $|c''_{ij}| \leq d''_{ij}$, ahol $CC' = (c''_{ij})$, $DD' = (d''_{ij})$.
  Biz.:
  $|c''_{ij}| = |\sum_{k=1}^n c_{ik}c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |c_{ik}c'_{kj}| = \sum_{k=1}^n |c_{ik}||c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n d_{ik}d'_{kj} = d''_{ij}$
- **Tétel:** (1)Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  Biz.: Schur-felb.: $A = U^*BU$: U unitér, B felső háromszög. Mivel $A^k = U^*B^kU$, elég B-re.
  Legyen $D = (d_{ij})$ egy olyan nemneg. elemű $|b_{ij}| \leq d_{ij}$, továbbá D mindegyik átlós eleme < 1, de ezek páronként kül.
  Ha $B^k = (b_{ij}^k)$ és $D^k = (d_{ij}^k)$, akkor a lemma miatt $|b_{ij}^k| \leq d_{ij}^k$, így elég $\lim D^k = 0$.

A spektrálsugár III. 204

- **Tétel:** (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  Biz. (folyt):
  Eddigiek miatt elég arra az esetre, ha A-nak n kül. sajátértéke van. (Előbbi D ilyen lett.)
  Spektráltétel spec. esete: $\exists$ C, hogy

$$A = C^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)C.$$

$$A^k = C^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)C \longrightarrow C^{-1}\operatorname{diag}(0, \ldots, 0)C = 0.$$

- **Megj.:** belátható, hogy $\|A^k\| = O(\rho(A)^k)$,
  tehát $\rho(A) < 1$ esetén a konvergencia exponenciális
  $O()$-ban a konstans függ A-tól

A spektrálsugár IV. 205

- **Egy egyszerű konvergencia-tétel:** Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x - \lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(x - \mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Ekkor létezik $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\lambda}A)^k$, és az egy (nem felt. ortog.) vetítés A-nak a λ-hoz tartozó sajátalterére.
  Biz.: Legyen v egy sajátvektora A-nak λ sajátértékkel és legyen C egy olyan invertálható, aminek első oszlopa v, a többi pedig $(\lambda I - A)\mathbb{C}^n$ egy bázisát alkotja. Ekkor $C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, ahol $\rho(A') < 1$. Ezért $\lim A'^k = 0$ és
  emiatt létezik $\lim(C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vetítés az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ által gen. altérre.
  Így létezik $\lim(\frac{1}{\lambda}A)^k = C\lim(C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC)^k C^{-1}$, és az egy vetítés a $\langle v\rangle$ sajátaltérre.
- **Megj.:** A határérték-vetítés magtere $\lambda I - A$ képtere
- **Megj.:** A konvergencia $\frac{\rho_2(A)}{\rho(A)}$-ban exponenciális
  ($\rho_2(A)$ a második legnagyobb sajátérték-absz. érték)

A spektrálsugár V. 206

Egyszerű konvergencia-tétel - változat: Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x - \lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(x - \mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Legyen $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n$ és $v^k = A^k v^0$. Ekkor a $\langle v^k\rangle$ 1-dim altér "konvergens" és a "határérték" a λ-hoz tartozó sajátaltér.

Biz.: Legyen $w^k = \frac{1}{\lambda^k}v^k$. Ekkor (mivel $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n \supseteq \ker A^k$) $\langle w^k\rangle = \langle v^k\rangle$ és $\lim w^k = (\lim(\frac{1}{\lambda}A)^k)v^0$ egy sajátvektor a λ-sajátaltérből. ($\neq 0$, mert v^0 nem esik a vetítés magjába, ami $A - \lambda I$ képtere.)

a $\langle v^k\rangle$ "irány" konvergenciája helyett szokás:

- v^k koordinátáinak 1 összegűre normálása
  (bizonyos feltételek mellett, pl. minden koord. ≥ 0)
- v^k egységvektorra normálása: v^k helyett $\frac{1}{|v_k|}v^k$

  ekkor a v^k sorozatnak egy *részsorozata* konvergens
  de nagy k-ra v^k *közel van* egy sajátvektorhoz

Nemnegatív mátrixok - jelölések 207

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; A = (a_{ij}), \; A' = (a'_{ij}) \; n \times n\text{-es valós}$$

mátrixok.

- $v \geq 0$, ha $\gamma_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $v > 0$, ha $\gamma_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $A \geq 0$, ha $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $A > 0$, ha $a_{ij} > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $v \geq v'$ (illetve $v > v'$), ha $v - v' \geq 0$ $(v - v' > 0)$
- $A \geq A'$ (illetve $A > A'$), ha $A - A' \geq 0$ $(A - A' > 0)$
- **Megj.:** $0 \neq v \geq 0$-ból nem következik $v > 0$.

Nemnegatív mátrixok - elemi észrevételek 208

- $A \geq 0 \Leftrightarrow Av \geq 0$ minden $v \geq 0$ vektorra.
- $A > 0 \Leftrightarrow Av > 0$ minden $0 \neq v \geq 0$ vektorra.
- $A \geq A'$, $v \geq v' \Rightarrow Av \geq A'v'$.
- $A \geq A'$, $B \geq B' \Rightarrow A + B \geq A' + B'$.
- $A \geq A'$, $B \geq B' \Rightarrow AB \geq A'B'$.

  láttuk erősebb formában komplex mátrixokra

Nemnegatív mátrixok spektrálsugara ("max-min") 209

Ideiglenes def.: $A=(a_{ij})\ge 0$, $v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}\ge 0$-ra:

- $\rho'_v(A) := \max\{r\in\mathbb{R} \mid Av\ge rv\} = \min_i \frac{1}{\gamma_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}\gamma_j$
  (konvenció: 0 nevezőjű tört:= ∞).

  A mennyire tudja v-t az összes koordináta irányában megnyújtani.
- $\rho'(A) := \sup\{\rho'_v(A) \mid 0\ne v\ge 0\}$
- **Áll.:** $\rho'(A) = \sup\{\rho'_v(A)\mid v\ge 0, |v|=1\} = \max\{\rho'_v(A)\mid v\ge 0,|v|=1\}$.

  Biz.: első =-ség: $\rho'_v(A)$ nem vált a $v\leftarrow\frac{1}{|v|}v$ cserével

  második =-ség: a $\{v\mid v\ge 0,|v|=1\}$ halmaz korlátos és zárt, továbbá $v\mapsto\rho'_v(A)$ folytonos v-ben ezen a halmazon.

Egyenértékűség - előkészületek 210

- **Áll.:** $0\le A\le A'$ esetén $\rho'(A)\le\rho'(A')$.

  Biz.: Minden $v\ge 0$-ra $\rho'_v(A)\le\rho'_v(A')$.
- **Lemma:** $B=(b_{ij})$ komplex, $A=(a_{ij})$ nemnegatív valós, hogy $|b_{ij}|\le a_{ij}$ esetén: $\rho(B)\le\rho'(A)$. Speciálisan $\rho(A)\le\rho'(A)$.

  Biz.: Tfh. $v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$ sajátvektora B-nek λ sajátértékkel. A $Bv=\lambda v$-ben az i-edik koordinátát felírva: $\lambda\gamma_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j$, innen

  $|\lambda||\gamma_i| = |\sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j| \le \sum_{j=1}^n |b_{ij}||\gamma_j| \le \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j|$, így

  $|\lambda|\le\min_i\frac{1}{|\gamma_i|}\sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j| = \rho'_w(A)\le\rho'(A)$, ahol $w=\begin{pmatrix}|\gamma_1|\\ |\gamma_2|\\ \vdots\\ |\gamma_n|\end{pmatrix}$.

Spektrálsugár: egyenértékűség a pozitív esetre 211

- **Áll.:** Tfh. $A>0$ és $0\ne v\ge 0$, hogy $Av\ge\rho'(A)v$ (azaz $\rho'_v(A)=\rho'(A)$). Ekkor $Av=\rho'(A)v$.

  Biz.: $\rho:=\rho'(A)$ jelöléssel tfh. $Av\ne\rho v$. $0\ne w:=Av-\rho v\ge 0$, így ($A>0$ miatt) $Aw>0$. A-val szorozva:

  $0<Aw=A(Av)-\rho\cdot(Av)$, innen $A(Av)>\rho\cdot(Av)$. Ekkor $\rho'_{Av}(A)>\rho$, ellentmondás.
- Köv.: Ha $A>0$, akkor van olyan $0\ne v\ge 0$ vektor, amelyre $Av=\rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A)=\rho'(A)$.

  Biz.: Tudjuk, hogy $\rho'(A)=\rho'_v(A)$ valamely $0\ne v\ge 0$ vektorra. Az előző állítás alkalmazható.

Spektrálsugár: egyenértékűség 212

Áll.: Ha $A\ge 0$, akkor van olyan $v\ge 0$ vektor, amelyre $Av=\rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A)=\rho'(A)$.

Biz.: Legyen $k\ge 1$-re $A_k := A+\begin{pmatrix}\frac1k & \cdots & \frac1k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac1k & \cdots & \frac1k\end{pmatrix}$.

$A_k>0$, tetsz. $0\ne v\ge 0$-ra $\rho'_v(A)\le\rho'_v(A_k)\le\rho'_v(A_1)$. Így $\rho'(A)\le\rho'(A_k)\le\rho'(A_1)$.
Legyen $v_k\ge 0$ olyan (előző áll), hogy $|v_k|=1$ és $A_kv_k=\rho'(A_k)v_k$.
A $(v_k,\rho'(A_k))$ sorozat tagjai $\mathbb{R}^{n+1}$ egy korlátos részhalmazából vannak, így (Bolzano-Weirstrass) van konvergens részsorozat: $k_1<k_2<\ldots<k_\ell<\ldots$, hogy létezik $\lim_{\ell\to\infty}v_{k_\ell}=v$ és $\lim_{\ell\to\infty}\rho'(A_{k_\ell})=\rho'$.

Tudjuk: $0\le v$ és $|v|=1$, továbbá $\rho'(A)\le\lim\rho'(A_{k_\ell})=\rho'$, és

$Av=\lim A_{k_\ell}v_{k_\ell}=\lim\rho'(A_{k_\ell})v_{k_\ell}=\rho' v$. Utóbbi miatt $\rho'=|\rho'|\le\rho(A)\le\rho'(A)$ is igaz, így $\rho'=\rho'(A)$.

Spektrálsugár: "max-min" egy interpretációja (pótlap) 213

Gazdaság egy modellje: (Leontyev)

- egységnyi i termék előállításhoz a_{ij} mennyiségű j termék kell
- **készlet:** $v=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)^T$: j-ból γ_j-nyi van
- ezt felhasználva i-ből $\sum_j a_{ij}\gamma_j$-nyi lesz:
- **új készlet:** Av
- $\rho'_v(A)$: a legrosszabb i-ből a készlet bővülése (v. zsugorodása)
- $\rho'(A)$: $\rho'_v(A)$ **optimuma**
- $\rho'(A)=\rho(A)$ interpretációja: optimális esetben minden termékből ugyanaz ($\rho(A)$) a bővülés aránya

  a gazdaság minden szektorában ugyanakkora a növekedés

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra 214

Áll.: $A\ge 0$-ra

$$\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\le\rho(A)\le\max_i\sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Biz. (Felső korlát): Tfh. $0\ne v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}\ge 0$-ra $\rho'_v(A)=\rho(A)$.

i_0: az az index, amelyre a $\gamma_{i_0}\ge\gamma_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Ekkor

$$\rho(A)=\rho'_v(A)\le\sum_{j=1}^n a_{i_0j}\frac{\gamma_j}{\gamma_{i_0}}\le\sum_{j=1}^n a_{i_0j}\le\max_i\sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra 215

Áll.: $A\ge 0$-ra

$$\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\le\rho(A)\le\max_i\sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Biz. (alsó korlát): $v=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$-re

$$\rho'_v(A)=\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}=\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij},$$

ugyanakkor $\rho(A)=\rho'(A)\ge\rho'_v(A)$.

További egyenlőtlenségek 216

$A\ge 0$

- **Köv.:** $\min_j\sum_{i=1}^n a_{ij}\le\rho(A)\le\max_j\sum_{i=1}^n a_{ij}$.

  Biz.: $\rho(A^T)=\rho(A)$ (ugyanaz a karakterisztikus polinom).
- **Köv.:** Ha A sor- vagy oszlop-sztochasztikus, akkor $\rho(A)=1$.
- **Köv.:** Tetsz. $\gamma_1>0,\ldots,\gamma_n>0$-ra:

$$\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\le\rho(A)\le\max_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}.$$

Biz.: Legyen $D=\operatorname{diag}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ és $A'=D^{-1}AD=(a'_{ij})$. Ekkor $a'_{ij}=a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}$, továbbá, mivel A és A' hasonlóak, $\rho(A)=\rho(A')$. Alkalmazzuk a sorösszeg-becsléseket az A' mátrixra.

- **Köv.:** $\min_j\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\le\rho(A)\le\max_j\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}$.

Pozitív mátrixok - Perron elmélete 217

$A > 0$

- **Áll.:** $\rho(A) > 0$

  Biz.: $\rho(A) \geq$ a legkisebb sorösszeg
- **Áll:** A-nak van pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

  Biz.: Tudjuk már, hogy van nemneg. sajátvektor: $0 \neq v \geq 0$: $Av = \rho(A)v$.

  $A > 0$ miatt $Av > 0$, így $v = \frac{1}{\rho(A)}Av > 0$.
- **Áll.:** A-nak a $\rho(A)$ sajátértékhez tartozó pozitív sajátvektora skalárszoros erejéig egyértelmű.

  Biz.: Tfh. $v = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} > 0$ és $v' = \begin{pmatrix}\gamma'_1\\ \vdots\\ \gamma'_n\end{pmatrix} > 0$ két sajátvektor: $Av = \rho(A)v$ és $Av' = \rho(A)v'$. Legyen $\mu = \min_i \frac{\gamma'_i}{\gamma_i}$ és $w = (v' - \mu v) \geq 0$.

  $w = \frac{1}{\rho(A)}Aw$, így $A > 0$ miatt $w > 0$, ha $w \neq 0$. De w i-edik koordinátája 0, így csak $w = 0$ lehet, azaz $v' = \mu v$.

Perron II 218

$A > 0$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A-nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz.: Legyen $v = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$. Bármely $i = 1, \ldots, n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

így $w = \begin{pmatrix}|\gamma_1|\\ \vdots\\ |\gamma_n|\end{pmatrix}$ jelöléssel $0 \neq w \geq 0$ és $\rho(A)w \leq Aw$. Tudjuk, hogy $\rho(A) = \rho'(A)$ és volt korábban,hogy $Aw \geq \rho'(A)w$ esetén $Aw = \rho'(A)w$, azaz w egy nemneg. sajátvektor $\rho'(A)$ sajátértékkel. Így persze $w > 0$ is igaz és a fent az $\leq$ helyett $=$ teljesül:

Perron III 219

$A > 0$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A-nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz. (folyt):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Ez csak úgy lehet, ha az összes γ_j egy irányba mutat: a $c = \gamma_i/|\gamma_i|$ 1 absz. értékű komplex szám i-től ftlen és $v = cw$.

Perron IV. 220

Segédáll.: Tfh. B egy $n \times n$-es $n-1$ rangú valós mátrix. Legyen $v \in \ker B$, $u \in \ker B^T$. Ha $v^T u \neq 0$, akkor B-nek a $B\mathbb{R}^n$ képtérre vett megszorítása nemelfajuló.

Biz.: rang$= n-1$ miatt $\ker B = \langle v \rangle$, így elég $v \notin B\mathbb{R}^n$-t igazolni. Tfh, indirekte, hogy $v = Bw$. Ekkor $v^T u = (Bw)^T u = w^T B^T u = 0$, ellentmondás.

Áll.: $A > 0$ esetén A karakterisztikus polinomjának $\rho(A)$ egyszeres gyöke.

Biz.: Legyenek $v, u > 0$: $Av = \rho(A)v$ és $A^T u = \rho(A^T)u = \rho(A)u$. Ekkor $v^T u > 0$ és $B = A - \rho(A)I$-val segédáll miatt $B\mathbb{R}^n$ egy bázisát v-vel kiegészítve bázist kapunk. ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $\rho = \rho(A)$ és A' a $B + \rho I$-nek a $B\mathbb{R}^n$-re való megszorításának a mátrixa, ennek pedig nem sajátértéke ρ. A kar. polinomja $= (x - \rho)g(x)$, ahol $g(x)$ A' kar. pol.

Perron V 221

- **Köv.:** $A > 0$-ra $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\rho(A)}A)^k$ létezik és az egy projekció a $\rho(A)$-hoz tartozó 1-dim. sajátaltérre.
- **Pontosabban.:** Legyen $A > 0$ és legyenek $v > 0$, $u > 0$, amelyekre $Av = \rho(A)v$, $A^T u = \rho(A)u$ és $u^T v = 1$. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k = vu^T$$

Biz.: ld. a következőt.

Perron VI 222

Segédáll.: Legyen $u, v \in \mathbb{R}^n$, hogy $u^T v = 1$. Ekkor vu^T az egyetlen olyan P projekció-mátrix, amelyre P képtere $\langle v \rangle$ és P^T képtere $\langle u \rangle$.

Megj: $u = v$-re a $\langle v \rangle$-ra való merőleges vetítés

Biz.: vu^T rangja 1, $(vu^T)v = v(u^T v) = v1 = v$, és $(vu^T)(vu^T) = v(u^T v)u^T = v1u^T = vu^T$, így vu^T tényleg egy $\langle v \rangle$ képterű projekció. Ugyanígy, $(vu^T) = uv^T$ egy $\langle u \rangle$ képterű projekció.

Egyértelműség: Tfh. P telj. a feltételeket. Ekkor $P(vu^T) = (Pv)u^T = vu^T$ és $(vu^T)P = v(u^T P) = v(Pu)^T = vu^T$. Innen $(P - vu^T)^2 = P - Pvu^T - vu^T P + vu^T = P - vu^2$. Mivel $(P - vu^T)$ képtere $\subseteq \langle v \rangle$, $P - vu^T$ vagy 0 vagy egy projekció $\langle v \rangle$-re. Utóbbi $(P - vu^T)v = 0$ miatt nem lehet.

Perron és a türelmetlen szörfölő 223

- **Köv.:** Legyen $A > 0$ és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = \rho(A)v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen

$$w^{k+1} = Aw^k \text{ sztochasztikusra normálva}$$

(leosztva a koordináták összegével). Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} w^k = v.$$

- Tudjuk: sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1.
- **Köv.:** Legyen $A > 0$ sztoch. és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen

$$w^k = A^k w^0. \quad \text{Ekkor} \quad \lim_{k\to\infty} w^k = v.$$

Irreducibilis mátrixok - Frobenius elmélete 224

$A \geq 0$ $n \times n$-es

- **Def.:** A **reducibilis,** ha $\exists\, \emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$ (valódi részhalmaz), hogy $a_{ij} = 0$ $j \in J$, $i \notin J$ esetén.
- **Átfogalmazás:** A reducibilis, ha $\exists$ P permutációmátrix., hogy $P^{-1}AP$ valódi blokk felső háromszög: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} \end{pmatrix}$

  (A_{11} $\ell \times \ell$-es , A_{22} $(n-\ell) \times (n-\ell)$-es, A_{12} $\ell \times (n-\ell)$-es.)
- **Gráfos átfogalmazás.** Legyen G_A az az irányított (esetleg hurokéles) gráf $\{1, \ldots, n\}$-en, amelyben $j \to i$ akkor él, ha $a_{ij} > 0$.
- A reduciblis, ha a G_A csúcsai valódi módon feloszthatók két részre úgy, hogy az első részből a másodikba nem megy él (a második részből az elsőbe még mehet.)
- **Def.:** A **irreducibilis**, ha nem reducibilis, azaz ha G_A erősen összefüggő

Példák reducibilis/irreducibilis mátrixokra 225

- Reducibilisek: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Irreducibilisek: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **Megjegyzés:** Itt csak G_A számít, mindegy, hogy A pozitív elemeiben mi áll konkrétan.

Reducibilis/irreducibilis mátrixok: feladatok 226

- Mutassuk meg, hogy ha $A \geq 0$ irreducibilis, akkor A^T is irreducibilis.
- Ha egy $A \geq 0$ szimmetrikus mátrix reduciblis, akkor valamely P permutációs mátrixra $P^{-1}AP$ blokk-diagonális alakú.
- Minimum hány nulla eleme van egy $n \times n$-es reducibilis mátrixnak?
- Maximum hány nulla eleme van egy $n \times n$-es irreducibilis mátrixnak?

Irreducibilitás jellemzése 227

Áll: Legyen $A \geq 0$ $n \times n$-es. Ekkor A irreducibilis $\Leftrightarrow$ $(A+I)^n > 0$.

Biz. $\Leftarrow$:

$$\begin{pmatrix} A_{11}+I & * \\ 0 & A_{22}+I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (A_{11}+I)^n & * \\ 0 & (A_{22}+I)^n \end{pmatrix} \not> 0.$$

$\Rightarrow$: Legyen A irred. és $0 \neq v \geq 0$.
Legyen J azon koordináták halmaza, amelyekben v pozitív.
$(A+I)v = v + Av$ pozitív J-ben,
és még, ha $|J| < n$, akkor (mivel A irred.), i-ben is,
ahol $i \notin J, j \in J$, hogy $a_{ij} > 0$ (A irred.).
Ekkor $(A+I)v$ több helyen pozitív, mint v.
Indukcióval: ha $0 \neq v \geq 0$, akkor $(A+I)^k v$ legalább $\min(k+1, n)$ helyen pozitív.

Tehát $(A+I)^n v > 0$ (sőt, $(A+I)^{n-1} > 0$) bármely $v \geq 0$-ra.

Irreducibilitás jellemzése gráffal 228

- Észrevétel: $A, B \geq 0$ $n \times n$-es mátrixokra G_{AB} -ben $j \to i$ él, ha van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$ amelyre $k \to i$ él G_A-ban és $j \to k$ pár él G_B-ben.
- **Köv.:** $j \to i$ él G_{A^ℓ}-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő ℓ hosszú irányított séta.

  Biz.: $\ell = 1$-re G_A definíciója, $\ell > 1$-re indukciós lépés: észrevétel A-val és $B = A^{\ell-1}$-gyel.
- **Köv.:** $j \to i$ él $G_{(A+I)^\ell}$-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő $\leq \ell$ hosszú irányított út.
- **Köv.:** $\ell \geq n-1$ esetén $j \to i$ él $G_{(A+I)^\ell}$-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő irányított út.

Irreducibilis mátrixok spektrálsugara - Frobenius 229

- **Áll.:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis akkor $\rho(A) > 0$.

  Biz. A-ban nincs csupa 0 sor; a min. sorösszeg alsó korlát $\leq \rho(A)$.
- **Észrevétel:** Ha v sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $(\lambda+1)^n$ sajátértékkel.
- **Speciálisan:** ha v sajátvektora A-nak $\rho(A)$ sajátértékkel (tudjuk, hogy $A \geq 0$ esetén van ilyen $v \geq 0$), akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $\rho((A+I)^n) = (\rho(A)+1)^n$ sajátértékkel.

  Ha A irreducibilis, akkor tehát alkalmazható $(A+I)^n$-re a Perron-elmélet:
- **Tétel (Frobenius):** Tfh. $A \geq 0$ $n \times n$-es irred. Ekkor
  - $\rho(A)$ sajátértéke A-nak;
  - $\rho(A)$ egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának;
  - létezik A-nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

Példa: ciklus 230

- Legyen A az $(12 \ldots n)$ ciklus permutációmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

- A irreducibilis,
- $\rho(A) = 1$,
- A összes sajátértéke 1 absz. értékű,
- $A^k v$ csak kivételes v-re konvergens.

Primitív mátrixok 231

- **Def.:** Legyen $A \geq 0$ irred. A primitív, ha $\rho(A)$ az egyetlen $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke
- Primitív mátrixra telj. az egyszerű konvergenciatétel feltételei:
- **Tétel:** Tegyük fel, hogy az $A \geq 0$ irreducibilis mátrix primitív. Ekkor

$$\left(\frac{1}{\rho(A)} A\right)^k \longrightarrow vu^T,$$

  ahol v A-nak, u pedig A^T-nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel, amelyekre $u^T v = 1$.

  Változat: $w^0 \geq 0$, $w^{k+1} = Aw^k$, lenormálva (1 hosszúra vagy sztochasztikusra) konvergál előbbi v lenormáltjához
- **Példa:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor A primitív.

Alkalmazás: gyűjtőlapok és tekintélyek 232

- Kleinberg 1998
- **Modell:** kétféle lap:
  - értékes infot tartalmazó
  - linkgyűjtemény
- **Róka fogta csuka:**
  - tekintélyes lapra sok jó gyűjtemény mutat
  - jó gyűjtemény sok tekintélyes lapra mutat
- **Számszerűen:**

  lapok gyűjtő-értéke γ_i, tekintély-értéke τ_i
  - $\tau_i = c \cdot \sum_{j \to i} \gamma_j \quad (i = 1, \ldots, n)$
  - $\gamma_j = c' \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i \quad (j = 1, \ldots, n)$

  c és c' normáló tényezők
  hogy pl. $\sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1$ és $\sum_{i=1}^n \tau_i^2 = 1$ teljesüljön.

Gyűjtőlapok és tekintélyek II. — 233

- **Róka fogta csuka feloldása**

  k-adik időpontban a lapok gyűjtő-értéke γ_i^k, tekintély-értéke τ_i^k
  - $\tau_i^{k+1} = c' \cdot \sum_{j \to i} \gamma_j^k$
  - $\gamma_j^k = c \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i^k$
- **Mátrixosan-vektorosan**
  - $A = (a_{ij})$ adjacencia-mátrix: $a_{ij} = 1$, ha j mutat i-re, különben 0.
  - $\underline{g}^k = (\gamma_1^j, \dots, \gamma_n^k)^T$, $\underline{t}^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_m^k)^T$
  - kezdetben $\underline{g}^0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})^T$
  - $\underline{t}^k = c_k \cdot A\underline{g}^k \qquad k = 0, 1, 2 \dots$
  - $\underline{g}^{k+1} = c'_k \cdot A^T \underline{t}^k \qquad k = 0, 1, 2 \dots$

  - "jó" esetben: $\underline{g} = \lim_{k \to \infty} \underline{g}^k$, $\underline{t} = \lim_{k \to \infty} \underline{t}^k$
  - $\underline{t} = A\underline{g}$, lenormálva

Gyűjtőlapok és tekintélyek III. — 234

- Két sorozatú rekurzióból egy
  - $\underline{t}^k = c_k \cdot A\underline{g}^k$
  - $\underline{g}^{k+1} = c'_k \cdot A^T \underline{t}^k$

  helyett
  - $\underline{g}^{k+1} = c''_k \cdot A^T A \underline{g}^k \qquad k = 0, 1, 2 \dots$
- **Észrevétel:** $A^T A \geq 0$ poz. szemidef.: primitív, ha irred.
- **Reducibilitás:** Akkor, ha van a lapoknak egy G valódi és egy T része, hogy
  - G beli lap csak T belire mutat
  - G-n kívüli lap csak T-n kívülire mutat

Gyűjtőlapok és tekintélyek IV. — 235

- **Konvergenciatétel alk.:** Irred. esetben $\underline{g}^k$ konvergál a $\rho(A^T A)$-hoz tartozó pozitív 1 hosszú sajátvektorhoz.
- gyűjtő-értékek $\underline{g}$, tekintély-értékek $A\underline{g}$ alapján.
- Gyakorlatban: nem az egész WWW-re, hanem csak egy viszonylag kicsi, az adott témakörben releváns részére
- **Megj.:** Reducibilis esetben:
  - feltehető: $A^T A$ blokk diagonális

    (alk. P-re $P^{-1} A^T A P$ blokk diag.)
  - a blokkok $\sim G_{A^T A}$ összefüggő komponensei
  - a blokkok irreducibilisek
  - konvergencia blokkonként: $(D^{-1}A)^k = D^{-k} A^k$ konvergens,

    D A-val felcs. diag. mátrix: blokkonként a max. sajátérték
  - $\underline{g}^k$ ekkor is konvergál (valamelyik nemneg. $\rho(A)$-sajátvektorhoz)

Primitív mátrixok egyszerű jellemzései — 236

- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow$ $A^k > 0$ valamely k-ra.

  Biz.: $\Rightarrow$: $(\frac{1}{\rho(a)}A)^k \to vu^T > 0$, így $A^k > 0$, ha k elég nagy.

  $\Leftarrow$: Ha $A^k > 0$, akkor (Perron) A^k-nak $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ az egyetlen $\rho(A)^k$ absz. értékű sajátértéke, és az egyszeres gyöke A^k kar. pol.-jának de akkor A-nak is csak egyetlen $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van.
- **Megj.:** $A \geq 0$ esetén ha $A^k > 0$, akkor $A^\ell > 0$ $\ell > k$-ra is.
- **Áll.:** Ha $B \geq 0$ irred. és van B-nek pozitív diag. eleme, akkor $B^k > 0$ valamely $1 \leq k \leq 2(n-1)$-re.

  Biz.: Tfh. ℓ-edik diag. elem > 0. Ekkor, ha G_B-ben i-ből elérhető ℓ és ℓ-ből elérhető j legfeljebb k hosszú ir. úttal, akkor B^k-ban az ij-edik elem > 0.
- **Köv.:** $A \geq 0$ nem primitív $\Leftrightarrow$ A^k reducibilis valamely $0 < k \leq n$-re.
- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow$ $A^k > 0$ valamely $k \leq 2n(n-1)$-re.

  Megj.: Az éles korlát $n^2 - 2n + 2$ (Wielandt)

Imprimitív irreducibilis mátrixok — 237

Lemma: Tfh. $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij}) \geq 0$ valós irred., amelyekre $|b_{ij}| \leq a_{ij}$. (Tudjuk már, hogy ekkor $\rho(B) \leq \rho(A) = \rho'(A)$.) Tfh. még: $\rho(B) = \rho(A)$ és $\lambda = \omega\rho(A)$ egy komplex sajátértéke B-nek, ahol $|\omega| = 1$.
Ekkor $B = \omega D^{-1} A D$ alakú, ahol $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ és $|d_i| = 1$.

Biz.: Legyen $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, hogy $Bv = \lambda v$. Mindegyik $i = 1, \dots n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left|\sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j|,$$

így a $0 \neq w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix} \geq 0$-ra $Aw \geq \rho(A)w = \rho'(A)w$. Ekkor szükségképpen $w > 0$ és $Aw = \rho(A)w$. Utóbbi miatt $\leq$ helyett $=$ áll:

Imprimitív mátrixok II. — 238

Lemma biz. (folyt):

$$\left|\sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j\right| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j|,$$

azaz

$$\left|\sum_{j=1}^n b_{ij} d_j |\gamma_j|\right| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j| \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol $d_j = \gamma_j / |\gamma_j|$. Ez csak úgy lehet, hogy $|b_{ij}| = a_{ij}$ és a nem-nulla komponensek mind a d_i irányba mutatnak:
ha $a_{ij} \neq 0$, akkor $b_{ij}/a_{ij} d_j = d_i$.

Így $b_{ij} = d_i^{-1} a_{ij} d_j$, legyen a_{ij} akár > 0, akár 0, azaz $B = D^{-1}AD$, ahol $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Imprimitív mátrixok III. — 239

- $A \geq 0$ irred.
- **Áll.:** Tfh. $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$. Ekkor $\omega\rho(a)$ sajátértéke A-nak $\Leftrightarrow$ ωA hasonló hasonló A-hoz.
  Ez esetben $\omega\rho(a)$ egyszeres gyöke A karakt. polinomjának.
  - **Biz.:** $\Rightarrow$: Lemma $B = A$-val.
  - $\Leftarrow$: Tfh. $\omega A = D^{-1}AD$, azaz $A = \omega DAD^{-1}$. Ha $Av = \rho(A)v$, akkor $w = Dv$-re $Aw = \omega DAD^{-1}Dv = \omega DAv = \omega\rho(A)Dv = \omega\rho(A)w$.
  - Egyszeresség: Ha $\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - A$-nak, akkor $\omega\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - \omega A$-nak.
- **Köv.:** Ha $|\omega| = 1, |\omega'| = 1$, továbbá $\omega\rho(A)$ és $\omega'\rho(A)$ sajátértékei A-nak, akkor ω^{-1} és $\omega\omega'$ is sajátértéke A-nak.

  Biz.: Ha $\omega A = D^{-1}AD$ és $\omega' A = D'^{-1}AD'$, akkor $\omega^{-1}A = DAD^{-1}$ és $\omega\omega' A = (D'D)^{-1}AD'D$.
- **Áll.:** Ha A-nak s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek: $\quad e^{2\ell\pi i/s}\rho(A)$, $(\ell = 0, \dots, s-1)$.

Imprimitív mátrixok IV. — 240

Tétel: Tfh. $A \geq 0$ irred, A-nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor akkor alkalmas P permutációs mátrixszal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & A_{12} & & & \\ & & A_{23} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{s-2,s-1} & \\ & & & & & A_{s-1,s} \\ A_{s1} & & & & & \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} illetve az ij helyen álló nulla (üres) blokk $\mu_i \times \mu_j$ méretű $(i, j = 1, \dots, s)$.

Biz.: Tudjuk: $\omega = e^{2\pi i/s}$-vel léteznek $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$, hogy $|d_i| = 1$ és $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$-re $D^{-1}AD = \omega A$. Ekkor $\omega a_{ij} = \frac{d_j}{d_i} a_{ij}$, tehát $a_{ij} = 0$, hacsak nem $d_j = \omega d_i$.

Alkalmas permutációval elérhető: $0 = t_0 < t_1 \leq t_2 \dots \leq t_s \leq n$, D-nel $\omega^\ell d_1$-gyel megegyező diagonális elemei $d_{t_\ell + 1}, \dots, d_{t_{\ell+1}}$, $\ell = 0, \dots, s-1$.

Imprimitív mátrixok V. 241

Tétel biz. (folyt:) Mivel A irred., van olyan $i \in \{1, \ldots, t_1\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$ valamely $1 \leq j \leq n$-re. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega d_1$, így $t_1 + 1 \leq j \leq t_2$ (és innen $t_1 < t_2$).
Hasonlóan, ha $t_2 < n$, akkor van $i \in \{t_1 + 1, \ldots, t_2\}$ és $j \in \{1, \ldots, n\}$, amelyekre $a_{ij} \neq 0$. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^2 d_1$, így $t_2 + 1 \leq j \leq t_3$ és $t_3 > t_2$.
Így folytatva: $t_0 < t_1 < t_1 < \ldots < t_s \leq n$.
Ha $t_s < n$, akkor van olyan $0 \leq \ell \leq s-1$, $t_\ell < i \leq t_{\ell+1}$ és $j > t_s$, hogy $a_{ij} = 0$.
Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, ellentmondás.
Tehát $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = n$.

Ha $t_\ell + 1 \leq i \leq t_{\ell+1}$, és $a_{ij} \neq 0$, akkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, tehát $t_{\ell+1} + 1 \leq j \leq t_{\ell+2}$, ahol $\ell + 1$ illetve $\ell + 2$ modulo s értendő.

Azaz a cserék után a mátrix tényleg a fenti alakú, ahol $\mu_\ell = t_\ell - t_{\ell-1}$.

Megj. Ha A fenti alakú, akkor A^s blokk diag. s blokkal, így A tényleg imprimitív.

Imprimitív mátrixok és periodicitás (pótlap) 242

- **Tétel átfogalmazása:** Tfh. $A \geq 0$ irred, A-nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor G_A csúcsai feloszthatók s darab $V_1, \ldots, V_s$ részre úgy, hogy irányított élek csak V_i és V_{i+1} között mennek ($i+1$ modulo s értendő).
- **Köv.:** A tétel feltételei mellett G_A minden irányított körének a hossza osztható s-sel
- **Köv.:** Thf. $A \geq 0$ irred. Ekkor: G_A köreinek hosszúságának lnko-ja 1 $\Leftrightarrow$ A primitív.
  Biz.: $\Rightarrow$: előző köv.
  $\Leftarrow$: Tfh. az lnko $s > 1$. Ekkor A^ℓ főátlójában csak s-sel osztható ℓ-re van pozitív elem.

Sztochasztikus mátrixok 243

- $A \geq 0$ $n \times n$-es (oszlop-)sztochasztikus
- **Def. (emlékeztető):** A minden oszlopának összege 1
- **Ekv. jellemzés:** Aw sztoch. minden w sztoch. vektorra
- **Másik ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A^T-nak 1 sajátértékkel
- **Köv.:** sztoch. mátrixok szorzata is sztoch.
- **Tudjuk:** $\rho(A) = 1$.
- **Köv.:** Ha A még primitív is, akkor $A^k \longrightarrow v(1, \ldots, 1)$, ahol v a sztochasztikus sajátvektora A-nak 1 sajátértékkel.
- **Megj.** $v(1, \ldots, 1)$ minden oszlopa v

Sztochasztikus mátrixok/Markov láncok: értelmezések 244

- sztochasztikus sajátvektor(ok) 1 sajátértékkel: stacionárius eloszlás(ok)
- **Irreducibilitás:** Minden állapotból minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel
- **Imprimitivitás$\sim$ periodicitás**
- **Konvergenciatétel:** Primitív ("aperiodikus irred.") esetben tetsz. kezdeti elo. esetén a lánc eloszlása konvergál az (egyért.) stacionáriushoz

Duplán sztochasztikus mátrixok 245

- **Def.:** $A = (a_{ij}) \geq 0$ duplán sztochasztikus, ha A és A^T is (oszlop-)sztochasztikus.
- **Ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A-nak és A^T-nak is 1 sajátértékkel
- **Köv.:** Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata és konvex kombinációja is duplán sztochasztikus
- **Példa:** Permutációmátrix (imprimitív).

Duplán sztochasztikus mátrixok II. 246

- **Áll.:** Duplán sztoch. A reduciblis $\Leftrightarrow$ alkalmas P permutációval $P^{-1}AP$ blokk-diag., azaz $\exists\, \emptyset \subset J \subset \{1, \ldots, n\}$, hogy $i \in J, j \notin J$ esetén $a_{ij} = a_{ji} = 0$.
  Biz.: Tfh. $A = (a_{ij})$ imprimitív: van $\emptyset \subset J \subset \{1, \ldots, n\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$, ha $i \notin J, j \notin J$. Ekkor $j \in J$-re
  $$1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J} a_{ij}, \text{ ezért } \sum_{j \in J} \sum_{i \in J} a_{ij} = |J|.$$
  Ekkor
  $$|J| = \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} a_{ij} + \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij} = |J| + \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij}, \text{ így } \sum_{i \in J} \sum_{j \notin J} a_{ij} = 0.$$
  Ebből $i \in J$, $j \notin J$ esetén $a_{ij} = 0$.
- **Konvergenciatétel:** Primitív duplán sztoch. A-ra
  $$A^k \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Birkhoff tétele 247

Tétel: A duplán sztochasztikus $\Leftrightarrow$ A permutációmátrixok konvex kombinációja.

- **Biz.:** $\Leftarrow$: permutációmátrixok d.sz. és d.sz. mátrixok konvex komb.-ja is d.sz.
- $\Rightarrow$:
  Segédáll.: $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow \exists\, \pi$ perm.: $a_{i\pi(i)} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.
- **Indukció** segédáll. alapján, a nemnulla elemeinek a száma szerint:
  Legyen π a segédállban szereplő perm., $a = \min_i a_{i\pi(i)}$ és P π^{-1} mátrixa. Ekkor $A \neq P$ esetén $a < 1$ és $A = aP + (1-a)(1-a)^{-1}(A - aP)$: A P-nek és $(1-a)^{-1}(A - aP)$-nek konvex komb.-ja. $(1-a)^{-1}(A - aP)$ duplán sztoch. és kevesebb helyen poz., mint A.

Birkhoff tétele II 248

- **Segédáll.:** $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow$ exists π perm.: $a_{i\pi(i)} > 0$.
- Tétel (Frobenius-König-Hall): Tetsz. véges $G = (U, V, E)$ páros gráfra
  $\exists$ G-ben U-t lefedő párosítás
  $$\Updownarrow$$
  bármely $W \subseteq U$-ra:
  $$|\{v \in V | \exists w \in W : (w, v) \in E\}| \geq |W| \quad \text{(Hall-feltétel).}$$
- **Segédáll biz.:** Legyen $U, V = \{1, \ldots, n\}$, $(i, j) \in E$, ha $a_{ij} \neq 0$. Ekkor keresett $\pi \leftrightarrow U$-t lefedő párosítás G-ben. Tetsz. $J \leq \{1, \ldots, n\}$-re legyen $J' = \{j | a_{ij} \neq 0$ valamely $i \in J$-re$\}$.
  $$|J| = \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J'} a_{ij} = \sum_{j \in J'} \sum_{i \in J} a_{ij} \leq \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = |J'|,$$
  tehát teljesül a Hall-feltétel.

Alkalmazott algebra - algoritmusok

Ivanyos Gábor

2011 ősz

A hatvány-iteráció

- **Egyszerű konvergencia-tétel - változat:** Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(x-\mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Legyen $v^0 \notin (A - \lambda I)\mathbb{C}^n$ és $v^k = A^k v^0$. Ekkor a $\langle v^k \rangle$ 1-dim altér "konvergens" és a "határérték" a λ-hoz tartozó sajátaltér.

  Változatok diagonalizálható mátrixokra, pl. a következő:
- **Pozitív szemidefinitre:** Tfh. A pozitív szemidef, $\lambda > 0$ legnagyobb sajátértékkel. Ekkor $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\lambda}A)^k$ a merőleges vetítés A λ-sajátalterére. Így **majdnem minden** v^0-ra $\langle A^k v^0 \rangle$ egy λ-sajátvektor által gen. altérhez tart:
- **Hatvány-iteráció:** $v^0 :=$ véletlen (egység)vektor, $v^{k+1} := Av^k$, "lenormálva".

  Poz. szemidef A-ra, nagy k-ra v^k közelítő sajátvektor

A QR-felbontás

- A $m \times n$-es valós
- $A = QR$, ahol Q $m \times m$-es ortogonális, R $m \times n$-es felső háromszög

QR-felb. Gram-Schmidt-ortogonalizációval

Egyszerűsítés: $m = n$, A invertálható

- $A^T A$-ra Gram-Schmidt: $G^T A^T A G = I_n$,
- **Emlék:** G felső háromszög
- $Q := AG$ ortogonális: $Q^T Q = (AG)^T AG = G^T A^T A G = I_n$.
- $Q = AG$, $R = G^{-1}$-gyel $A = QR$.

Householder-tükrözések

- **Emlék. (hipersíkra tükrözés):**
  - $u \neq 0$ rögz., $u^\perp$-re való tükrözés:
  - $\tau_u : v \mapsto v - 2\frac{(u,v)}{(u,u)}u = v - 2\frac{u^* v}{u^* u}u$

    mátrixa a standard bázisban: $I - \frac{2}{u^* u}uu^*$
  - ortogonális és szimmetrikus egyszerre
- **Szögfelezőre tükrözés:**
  - Tfh. $v, w \neq 0$.
  - $u = \frac{|v|}{|w|}w - v$
  - $u^\perp = v$ és w szögfelező hipersíkja
  - $\tau_u : v \leftrightarrow \frac{|v|}{|w|}w$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

- A $m \times n$-es valós
- $v = A$ első oszlopa, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- Ha $v \neq 0$, legyen T_1 a $v \leftrightarrow |v|w$ tükr. mátrixa
- Ha $v = 0$, $T_1 = I$
- $T_1 A$ első oszlopa $T_1 v = |v|w$.
- $T_1 = I_n - 2u'u'^T$, ahol u' a szögfelezőre $\perp$ egységvektor
- $T_1 A = A - 2u'u^T A$, $O(n^2)$ művelettel

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel II.

- $T_1 A$ első oszlopa rendben
- Rekurzió A jobb alsó $n-1 \times n-1$-es A' blokkjára:

$$A' = T_2' \cdots T_\ell' R',$$

ahol R' $m-1 \times n-1$-es felső háromszög, $\ell \leq \min(m-1, n-1)$.

- legyen $i = 2, 3 \dots$-re $T_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T_i'} \end{pmatrix}$.
- $R = \begin{pmatrix} ? & ? \\ & \boxed{R'} \end{pmatrix}$ (az első sor $T_1 A$ első sora)
- $T_1 A = T_2 \cdots T_\ell R$, így $A = QR$, ahol $Q = T_1 T_2 \cdots T_\ell$.
- összköltség: $O(\min(m, n)m^2)$.

QR-felbontás - megjegyzések

- **"Egyértelműség":** Tfh. $A = QR$ oszlopai lin. ftlenek, R főátlóbeli elemei pozitívak. Ekkor $A^T A = R^T R$ és R felső $n \times n$-es blokkja éppen $A^T A$ Gram-Schmidt-ortogonalizációjának felel meg.
- **Változat:** $AP = QR$, ahol P permutációs mátrix és R felső delta alakú: valamely k indexre $r_{jj} \neq 0$, ha $j \leq k$; $r_{ij} = 0$ ha $i > j$ vagy ha $i > k$.

  Előállítás: Az eredeti módszer azzal, hogy ha csupa 0 maradékú oszlop jönne, kicseréljük egy olyannal, aminek a maradéka nem csupa 0 (addig, amíg van ilyen).

QR-felbontás - alkalmazások

- determináns, rang, képtér
- numerikusan stabilabb, mint Gauss-elim, vagy Gram-Schmidt
- LSI-ben SVD helyett: könnyebben számolható, gyakran viszonylag tűrhető alacsony rangú közelítés kapható R szabdalásával

A QR-algoritmus 257

- $A_1 = A$
- $A_1 = Q_1 R_1$ (Q_1 ortog., R_1 felső háromszög)

$\vdots$

- $A_i = Q_i R_i$ (Q_i ortog., R_i felső háromszög)
- $A_{i+1} := R_i Q_i$
- $A_{i+1} = Q_{i+1} R_{i+1}$ (Q_{i+1} ortog., R_{i+1} felső háromszög)

- **Észrevétel:** $A_{i+1} = Q_i^T A_i Q_i$
- tehát $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots$ mátrixok hasonlók
- sőt, ortog. konjugáló mátrixszal

A QR-algoritmus II. 258

- $A_1 = A$

$\vdots$

- $A_i = Q_i R_i$
- $A_{i+1} := R_i Q_i$

$\vdots$

- Alkalmas feltételek mellett konvergál A (egy) Schur-felbontásához.
- **Spec. eset.:** Ha A pozitív def. valós szimm.,
  - a határérték diagonális, sőt, - a Q_i-k szorzatának határértéke diagonalizálja A-t.
- Vannak javított, adott körülményekhez igazított változatok

Hessenberg-mátrixok 259

- **Def.:** $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix felső Hessenberg-alakú, ha $i > j+1$ esetén $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

- **Tul.:** A $n \times n$-es felső Hessenberg, B $n \times n$-es felső háromszög $\Rightarrow AB$ és BA is felső Hessenberg.
  Biz.: $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = 0$, ha $i > j$. Legyen $AB = (c_{ij})$. $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Ha $i > k+1$, akkor $a_{ik} = 0$ és ha $k > j$, akkor $b_{kj} = 0$. Így $a_{ik} b_{kj} = 0$, kivéve esetleg $i \leq k+1$ és $k \leq j$. Ha $i > j+1$, nincs ilyen k, tehát $c_{ij} = 0$.

  BA-ra hasonló biz.

Hessenberg-alakra hozás Householder-tükrözésekkel 260

- A $n \times n$-es
- **Első lépés:** $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T_1'} \end{pmatrix}$, ahol T_1' az A alsó $n-1$ soros részének az első oszlopát rendbe tevő Householder-tükrözés (vagy I_{n-1}). Ekkor $T_1 A$ $\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}$ alakú, és ez megmarad a T_1-gyel való jobbról szorzással is: az nem bántja az első oszlopot.
- A QR-felbontáshoz hasonló rekurzióval vagy iterációval:
- **Végeredmény:** $A = T_1 \cdots T_{n-3} H T_{n-3} \cdots T_1$, ahol H felső Hessenberg.
- **Költség:** $O(n^3)$.

QR-algoritmus Hessenberg-mátrixokkal 261

- Ha A felső Hessenberg- alakú, a QR-felbontásánál a T_i Householder-tükrözések csak az i-edik és $i+1$-edik sort érintik:

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & * & * & & \\ & & & * & * & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- T_i-vel való szorzás kölsége $O(n)$, QR-felb. összköltsége $O(n^2)$.
- Ha $A_i = Q_i R_i$ f. Hess., akkor Q_i is, és így $A_{i+1} = R_i Q_i$ is. (invertálható esetre: $Q_i = A_i R_i^{-1}$)
- érdemes QR-algoritmus előtt f. Hessenberg-alakra hozni

QR-algoritmus szimmetrikus tridiagonális mátrixokra 262

- A szimmetrikus $\longrightarrow U^T A U$ felső Hessenberg és szimmetrikus ($U = T_1 \cdots T_{n-2}$ Hessenberg-alakra hozó tükrözések)
- Szimmetrikus Hessenberg-mátrixok = tridiagonális mátrixok:

$$\begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

- Tridiag. mátrix QR-felbontása:
  - Hoseholder-tükrözések: 2 sort érintenek
  - 1 sorban max 3 nemnulla elem
  - Összköltség: $O(n)$
- $A_i = Q_i R_i$ szimm. tridiag. $\Rightarrow A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^T A_i Q_i$ is szimm. tridiag.

Hessenberg-alakra hozó bázis 263

- U ortog, U oszlopai: $v_1, \ldots, v_n$ ortonormált bázis
- $U^T A U$ felső Hessenberg $\Leftrightarrow j = 1, \ldots, n-1$-re:

$$A\langle v_1, \ldots, v_j \rangle \leq \langle v_1, \ldots, v_j, v_{j+1} \rangle$$

- **Egyenértékű:** $j = 1, \ldots, n-1$-re:

$$Av_j \in \langle v_1, \ldots, v_j, v_{j+1} \rangle$$

Biz.: $i < j$-re $Av_i \in \langle v_1, \ldots, v_i, v_{i+1} \rangle \leq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$

- **Eljárás** ($\sim$ Arnoldi)
  - v_1 tetsz. egységvektor
  - Tfh. $v_1, \ldots, v_j$ már megvan
  - Ha $Av_j \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, v_{j+1} tetsz. $v_1, \ldots, v_j$-re $\perp$ egységvektor.
  - Különben v_{j+1} legyen Av_j-nek $v_1, \ldots, v_j$-re $\perp$ része, egységhosszúra normálva

Lánczos algoritmusa 264

- Arnoldi szimmetrikus A-ra
- **Tudjuk:** az eredmény szimm. Hessenberg, azaz tridiag:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & \ddots & b_{j-1} & & & \\ & b_{j-1} & a_j & b_j & & \\ & & b_j & a_{j+1} & b_{j+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Tehát $Av_j = b_{-1} v_{j-1} + a_j v_j + b_j v_{j+1}$

Lánczos algoritmusa II. 265

$Av_j = b_{-1}v_{j-1} + a_jv_j + b_jv_{j+1}$

- $v_0 := 0,\ b_0 := 0.$
- v_1 véletlen egységvektor
- $j = 1, \dots, n-1$:
  - $w_j' := Av_j - b_{j-1}v_{j-1}$
  - $a_j := v_j^T w_j$
  - $w_{j+1} := w_j' - a_jv_j$
  - $b_j := |w_{j+1}|$
  - Ha $b_j \neq 0$, akkor $v_{j+1} = \frac{1}{b_j}w_{j+1}$
  - Ha $b_j = 0$, akkor v_{j+1} véletlen egységvektor (?)
- **Költség:** $O(n^2) + n - 1$ vektor szorzása A-val

  Jó, ha A ritka vagy 2 ritka szorzata (pl. LSI).
- Nem igazán robusztus: v_i-k ortogonalitása elromolhat ...

SVD közelítő kiszámítása 266

- A $m \times n$-es, $m \geq n$
- **Teljes SVD:** $A = M'\Sigma' M^T$
- M az A^TA-t diagonalizáló ortog: $M^TA^TAM = \Sigma'^2$
- M' az AM-ből
- **Kézenfekvő megközelítés** M kiszámítása A^TA diagonalizálásával
- **Például:**
  - Először tridiagonalizáljuk A^TA-t (Householder-tükrözésekkel v. Lánczossal)
  - Majd QR-algoritmus
- Nem elég stabil

SVD kiszámítása II. 267

- Egyszerűsítő feltevés: $m = n$.
- **Észrevétel:** U_1, U_2 unitér

  A SVD-je $\longleftrightarrow$ U_1AU_2 SVD-je

  különösen, ha U_1, U_2 könnyen számolható

  pl. Householder-tükrözések szorzata
- Először bidiagonlizáljuk A-t: $U_1AU_2 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{pmatrix}$
- **Megj.:** Bidiagonális A-re A^TA tridiagonális

SVD kiszámítása III - bidiagonalizálás 268

- T_1 Householder-tükrözéssel:

$$T_1A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

- Majd a második oszlopnál kezdődő Z_1 Householder-tükrözéssel

$$T_1AZ_1 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

SVD kiszámítása IV - bidiagonalizálás II 269

- Első menet után:

$$T_1AZ_1 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

- Következő menet:

$$T_2T_1AZ_1Z_2 = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & * & & \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \end{pmatrix}.$$

- Végül $T_{n-1} \cdots T_1AZ_1 \cdots Z_{n-2}$ bidiagonális.
- **Megj.** Az eljárás hasonlít a Hessenberg-alakra hozáshoz

SVD kiszámítása IV - A^TA helyett másik szimmetrizált 270

- Tfh. $M'^TAM = \Sigma'$, M, M' ortog.
- $M^TA^TM' = \Sigma'^T = \Sigma'$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} M & M \\ M' & -M' \end{pmatrix}$ ortog. és
- $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} M^T & M'^T \\ M^T & -M'^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & M \\ M' & -M' \end{pmatrix} =$

  $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} M'^TA & M^TA^T \\ -M'^TA & M^TA^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & M \\ M' & -M' \end{pmatrix} =$

  $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} M'^TAM + M^TA^TM' & M'^TAM - M^TAM' \\ -M'^TAM + M^TA^TM' & -M'^TAM - M^TAM' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma' & \\ & -\Sigma' \end{pmatrix},$
- azaz $\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}$ sajátértékei A szing. értékei $\pm$ előjellel, és $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} M & M \\ M' & -M' \end{pmatrix}$ oszlopai adják a sajátvektorok egy ortonormált bázisát (ld. zh091030, 6. feladat).

SVD kiszámítása V 271

- A szing. értékei $\longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}$ sajátértékei (előjel erejéig)
- A SVD-ja $\longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}$ sajátvektorai
- **Észrevétel:** Ha A bidiag., akkor alaklmas permutáció P permutációmátrixszal $P^T\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}P$ szimm. tridiag, 0 főátlóval.
- Az $\begin{pmatrix} & A^T \\ A & \end{pmatrix}$ mátrixot csak implicite használják az algoritmusok
- Numerikusan stabilabb.