

1. tétel

Az optimális hozzárendelés problémája, Egerváry algoritmus.

Def.: Páros gráf $G = (A, B; E)$, ha $\forall$ éle 1 A-beli és egy B-beli csúcs között fut.

Def.: M élhalmaz párosítás, ha semelyik két M -beli élnek nincs közös végpontja.

Def.: A javító út, olyan út, amely nem párosított A-ból indul és nem párosított B-be vezet, úgy, hogy minden második él párosításbeli.

Def.: Az alternáló út, olyan út, amely nem párosított A-ból indul és B-be vezet (lehet párosított és nem párosított is, ebben különbözik a javító úttól), úgy, hogy minden második él párosításbeli.

Tétel: M maximális méretű, akkor és csak akkor, ha NEM LÉTEZIK A1 és B1-beli pontok között alternáló út.

Címkézés definíció

Adott $G = (A, B; E)$ páros gráf, $l: (A \cup B) \rightarrow \mathbf{R}$ címkézés (csúcs súlyfüggvény), ha minden $a \in A$, $b \in B$ és $ab \in E$ $l(a) + l(b) \geq w(ab)$.

Lemma

Rendeljünk a $G = (A, B; E)$ páros gráf minden v csúcsához egy $l(v) \in \mathbf{R}$ címkét úgy, hogy minden $e = \{a, b\}$ élre $l(a) + l(b) \geq w(e)$ teljesüljön. Ekkor a maximális összsúlyú teljes párosítás összsúlya legfeljebb $\sum_{v \in A \cup B} l(v)$.

Bizonyítás

Legyen M egy tetszőleges teljes párosítás. Mivel M élei minden pontot egyszer fognak le, ezért

$$\sum_{e=\{a,b\} \in M} w(e) \leq \sum_{e=\{a,b\} \in M} l(a) + l(b) = \sum_{v \in A \cup B} l(v)$$

Lemma

$G = (A, B; E)$ páros gráfban w élsúly-függvény, c címkézés, M teljes párosítás és minden $e = \{x, y\} \in M$ élre $c(x) + c(y) = w(e)$ teljesül, akkor M maximális összsúlyú.

2. tétel

A lineáris programozás alapfeladata, kétváltozós feladat grafikus megoldása. Lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása Fourier-Motzkin eliminációval.

A lineáris programozás alapfeladata

A lineáris programozás alapfeladata: egy egyenlőtlenségrendszer megoldásai közül kiválasztani azt, amely egy szintén lineáris célfüggvény szerint optimális.

A $m \times n$ -es mátrix, x egy n dimenziós, b egy m dimenziós, c egy n dimenziós vektor. A LP alapfeladata ekkor:

$$\max\{cx: Ax \leq b\}$$

Megjegyzések:

- $ax \geq \beta$ helyett $-ax \leq -\beta$
- $ax = \beta$ helyett $ax \leq \beta$ és $-ax \leq -\beta$
- $\min\{cx: Ax \leq b\}$ helyett $\max\{(-c)x: Ax \leq b\}$ (aztán ellentett-vétel a végleges megoldáshoz)

Kérdések:

1. Van-e $Ax \leq b$ -nek megoldása?
2. A megoldások halmazán cx korlátos-e?
3. Melyik x -re maximális cx ?

3. tétel

Farkas-lemma (két alakban). A lineáris program célfüggvénye felülről korlátosságának feltételei.

Farkas lemma 1.

A következő két rendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

- (1) $Ax \leq b$
- (2) $yA = 0; y \geq 0; yb < 0$

Bizonyítás

Kettőnek egyszerre nincs megoldása, mert: $0 = 0x = (yA)x = y(Ax) \leq yb < 0$.

Tétel: $Ax \leq b$ ($\max\{Cx\}$) tegyük fel, hogy megoldható. Akkor és csak akkor felülről korlátos, ha $yA = c; y \geq 0$ rendszernek létezik megoldása.

4. tétel

A lineáris programozás dualitástétele (két alakban). A lineáris programozás alapfeladatának bonyolultsága (biz. nélkül).

Tétel: LP Dualitástétele

Tegyük fel, hogy $Ax \leq b$ $\max\{Cx\}$ megoldható és felülről korlátos a megoldások halmazon, ekkor

- (1) $yA = c$; $y \geq 0$; $\min\{yb\}$ rendszer is megoldható és alulról korlátos ($\max\{Cx\} = \min\{yb\}$)
- (2) a primál programnak létezik maximuma, a duálisnak minimuma
- (3) maximum = minimum

Ekvivalens alak

Ha $\max\{cx: Ax \leq b; x \geq 0\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor a $\min\{yb: yA \geq c; y \geq 0\}$ (duális) program is megoldható és alulról korlátos; a primál programnak létezik maximuma, a duálisnak minimuma, és ezek megegyeznek.

LP bonyolultsága

- $Ax \leq b$ -t kiegyenlítő x megoldások közül van-e, ami felülről korlátos cx -en?
 - NP-beli: x tanú
 - coNP-beli: duális megoldása tanú
- simplex módszer (1947) nem polinomiális, de gyors
- ellipszoid módszer (1979, Hacsijan) polinomiális, de lassú
- belső pontos módszerek (1984, Karmakar) polinomiális, de lassú

Tétel: LP Dualitástétele 2

Ha $Ax \leq b$; $x \geq 0$; $\max\{Cx\}$ megoldható a célfüggvény felülről korlátos a megoldások halmazán, akkor

- (1) $yA \geq c$; $y > 0$; $\min\{yb\}$ rendszer is megoldható és ($\max\{Cx\} = \min\{yb\}$)
- (2) a primál programnak létezik maximuma, a duálisnak minimuma
- (3) maximum = minimum

$x \geq 0$ miatta primál feltétel erősebb lesz a nem negativitás miatt, a duál pedig gyengébb.

5. tétel

Egészértékű programozás: a feladat bonyolultsága, korlátozás és szétválasztás (Branch and Bound)

Egészértékű programozás

- IP alapfeladat: $\max\{cx: Ax \leq b, x \text{ egész}\}$
- IP duálisa: $\min\{yb: yA = c, y \geq 0, y \text{ egész}\}$
- $\max\{IP\} \leq \max\{LP\} = \min\{DLP\} \leq \min\{DIP\}$

A feladat bonyolultsága

- $Ax \leq b$ -t kiegyenlítő x egész megoldások közül van-e, ami felülről korlátos cx -en?
 - NP-beli: x tanú
 - nincs dualitástétel: nem adódik a co-NP-beli.
 - NP-teljes: visszavezetés a 3-SAT problémára.

Tétel

Az (IP) probléma NP-teljes.

6. tétel

Totálisan unimoduláris mátrix fogalma, példák. Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal. (biz. nélkül) Alkalmazás páros gráfokra és intervallumgráfokra.

Totális unimoduláris (TU) mátrix

A mátrix TU mátrix, ha a mátrix minden négyzetes részmátrixának determinánsa 0, 1 vagy -1 . Szükséges (de nem elégséges), hogy a mátrix elemei is csak 0, 1 vagy -1 értékűek lehetnek.

Pl: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ egy TU mátrix

Tétel: Páros gráf incidencia mátrixa TU.

Tétel: Irányított gráf incidencia mátrixa TU.

Egészértékű totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal

Tétel: Ha az A totálisan unimoduláris mátrix, a b egész koordinátájú vektor (minden koordinátája egész), c pedig tetszőleges valós vektor. A $\max\{cx: Ax \leq b\}$ (LP) feladat megoldható és maximuma véges, akkor az $Ax \leq b$; $\max\{cx\}$ megoldható és a célfüggvény felülről korlátos, akkor létezik olyan x^* **egész** megoldása a rendszernek, hogy $cx^* = \max\{cx\}$

Tehát, ha az A TU, b egész, akkor $\text{IPOpt} = \text{LPopt}$.

Lemma

Egy mátrix totális unimoduláris marad, ha

- (1) egy sorát/oszlopát (-1) -gyel szorozzuk
- (2) egységvektort hozzávesszünk sorként/oszlopként
- (3) egyik sorát/oszlopát új sorként/oszlopként hozzávesszük
- (4) transzponáljuk

Illeszkedési mátrix

Legyen az n -pontú G gráfnak e éle és definiáljuk az $n \times e$ méretű $B(G) = (b_{ij})$ mátrix elemeit úgy, hogy:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha a } j - \text{edik él nem illeszkedik az } i - \text{edik ponthoz} \\ 1 & \text{ha a } j - \text{edik élnek az } i - \text{edik pont a kezdőpontja} \\ -1 & \text{ha a } j - \text{edik élnek az } i - \text{edik pont a végpontja} \end{cases}$$

Legyen $b_{ij} = 1$ akkor is, ha a j -edik él az i -edik ponthoz illeszkedő hurokél. Irányítatlan esetben is ez a definíció, csak ott a j -edik él mindkét végpontjának megfelelő mátrixelem 1. Ezt a $B(G)$ mátrixot a G gráf illeszkedési mátrixának nevezzük.

Tétel

Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.

Tétel

Páros gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.

Maximális összsúlyú párosítás IP feladatként

Jelölések: x indikátor, hogy egy él benne van-e a párosításban. w tetszőleges (él)súlyfüggvény, B illeszkedési mátrix (páros gráf lévén TU).

Feladat

$\max\{wx : Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T, x \geq 0\}$. Az $x \geq 0$ feltétel miatt B -t kiegészítjük az $m \times m$ -es egységmátrix ellentettjével, de ez nem változtat TU tulajdonságon. A w adja meg az élsúlyokat. A $Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T$ azt jelenti, hogy az egy csúcsból kiinduló élek közül legfeljebb egyet választunk ki $\rightarrow$ párosítás. Mivel B TU mátrix és b egész vektor, ezért x egész vektor (IP feladat) (pontosabban 0 vagy 1 értékű).

Duális

$\max\{wx : Bx \leq (1, 1, \dots, 1)^T, x \geq 0\} = \min\{y(1, 1, \dots, 1)^T : yB \geq w; y \geq 0\}$. Ekkor y megoldás minden v csúcshoz egy $c(v)$ címkét rendel. A $yB \geq w$ azt jelenti, hogy $c(a) + c(b) \geq w(e)$ minden $e = \{a, b\} \in E$ élre (Egerváry Jenő).

7. tétel

A lineáris és egészértékű programozás alkalmazása hálózati folyamproblémákra.

Jelölések

$G = (V, E)$ irányított gráf

- $s, t \in V$ két kitüntetett csúc
- $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív *kapacitásfüggvény*. $x: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ tetszőleges függvény.
- $\varrho_x(v)$: v -be belépő élek összege x szerint
- $\delta_x(v)$: v -ből kilépő élek összege x szerint
- Egy x függvény akkor *folyam*, ha minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ esetén $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$
- x függvény megengedett, ha minden e élre: $x(e) \leq c(e)$
- A folyam értéke $\delta_x(s) - \varrho_x(s) = \varrho_x(t) - \delta_x(t)$.

Ford-Fulkerson tétel

A maximális folyam értéke megegyezik a minimális vágás értékével.

Lemma

Legyen $x: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amely minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ esetén $\delta_x(v) \leq \varrho_x(v)$, továbbá $\delta_x(s) \leq \varrho_x(t)$. Ekkor x folyam.

Bizonyítás

Minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ pontból vegyünk fel egy új $e = (v, t)$ élt, az új gráf legyen G' . Minden új e élhez rendeljük hozzá az $x'(e) = \varrho_x(v) - \delta_x(v) \geq 0$ értéket (amennyivel több a belépő, mint a kilépő), a régi éleken maradjon az érték $x'(e) = x(e)$. A kapott x' függvény G' -ben nyilván folyam, ezért $\varrho_{x'}(t) = \delta_{x'}(s)$. Másrészt $\varrho_{x'}(t) \geq \varrho_x(t)$ és $\delta_{x'}(s) = \delta_x(s)$. A lemma feltételei alapján: $\varrho_x(t) \geq \delta_x(s) = \delta_{x'}(s) = \varrho_{x'}(t) \geq \varrho_x(t)$. Mivel csak egyenlőség állhat, ezért $\varrho_{x'}(t) = \varrho_x(t)$, ami csak akkor teljesülhet, ha x folyam.

LP felírás

Egészítsük ki G gráfot egy $e^* = (t, s)$ pszeudó éllel, (értéke lesz majd a folyam értéke, jelöljük μ -vel), az így kapott gráf illeszkedési mátrix legyen B^* . Minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcshoz tartozik egy sor, melyre teljesül $b_v x \leq 0$ (ez folyamnál azt jelenti, hogy a belépő élek összege nem kisebb, mint a kilépőké; $\delta_x(v) - \varrho_x(v) \leq 0 \rightarrow \delta_x(v) \leq \varrho_x(v)$). $B^* x^* \leq 0$ rendszer alapján $\delta_x(s) - \mu \leq 0$, illetve $\mu - \varrho_x(t) \leq 0$, összevontan: $\delta_x(s) \leq \mu \leq \varrho_x(t)$. Az előző lemma miatt $\delta_x(s) = \mu = \varrho_x(t)$, vagyis a folyam értéke μ .

$$\begin{array}{c|c|c} & \overbrace{\begin{array}{cc} B & \end{array}}^{B^*} & \\ \hline s & \begin{array}{c} B \\ E \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \\ \hline t & \begin{array}{c} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} x \\ \mu \end{array} \right\} x^* \leq \begin{array}{c} 0 \\ c \end{array}$$

Keressük a maximális folyamot, vagyis $\max\{(0,0, \dots, 0,1)x^*: B^* x^* \leq 0; x^* \geq 0; x \leq c\}$. Az $x \leq c$ feltételt hozzávesszük a mátrixhoz (ez lesz az E egységvektor és a hozzá tartozó c rész a b vektorban) az alábbi formában, ezt jelöljük M -mel.

Duális

$\max\{(0,0, \dots, 0,1)x^*: Mx^* \leq (0,0, \dots, 0, c); x^* \geq 0\} = \min\{y(0,0, \dots, 0, c): yM \geq (0,0, \dots, 0,1); y \geq 0\}$
Írjuk fel másképp y -t: $y = (\pi(v)|w(e))$

Ekkor:

- (1) $\pi(v) \geq 0, w(e) \geq 0$
- (2) minden $e = (u, v)$ él esetén $\pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0$
- (3) $\pi(t) - \pi(s) \geq 1$

A duális változói közül $\pi(v)$ a csúcsokhoz, $w(e)$ az élekhez rendel értéket.

Ekkor a cél $\min\{\sum_{e \in E} w(e)c(e)\}$ minimum.

Állítás

A $m_{DLP} = \min\{\sum_{e \in E} w(e)c(e)\}$ értéke megegyezik a hálózati folyam minimális vágásának értékével (m_C).

Bizonyítás

Egy m_C vágáshoz könnyen készíthető olyan π és w , amelyre $\sum_{e \in E} w(e)c(e) = m_C$, a következők szerint. Legyen $S (s \in S)$ és $T (t \in T)$ diszjunkt halmazok, akkor $v \in S$ esetén $\pi(v) = 0$, $v \in T$ esetén legyen $\pi(v) = 1$. Minden e él, ami S -ből T -be mutat: $w(e) = 1$, egyébként $w(e) = 0$. A $\sum w(e)c(e) = m_C$ teljesül, ebből $m_{DLP} \leq m_C$ adódik, a másik irányú egyenlőtlenséget kell belátni.

Az M mátrix TU, ezért (Egészértékű totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal) alapján y is egészértékű (mivel $\min\{yb: yA = c; y \geq 0\}$ rendszerbeli c is egészértékű). Legyen adott (π, w) optimális, egészértékű megoldás, ebből kiindulva elkészítünk egy (π', w') 0 vagy 1 értékű optimális megoldást. Legyen

$$\pi'(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \pi(v) \leq \pi(s) \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$w'(e) = \begin{cases} 0, & \text{ha } w(e) = 0 \\ 1, & \text{ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$$

Ekkor (π', w') (1) és (3) nyilván teljesül

(2) indirekt: $e = (u, v)$ él esetén $\pi'(u) - \pi'(v) + w'(e) < 0$, ekkor a 0 – 1 értékűség miatt $\pi'(u) = w'(e) = 0, \pi'(v) = 1$ esetben valósulna meg, ekkor π' definíciója miatt $\pi(v) > \pi(s) \geq \pi(u)$, ami ellentmondana (2)-nek, mert w' definíciója miatt $w(e) = 0$.

Optimális, mert $\sum w'(e)c(e) \leq \sum w(e)c(e)$, mert $w'(e) \leq w(e)$.

Legyen $S = \{v \in V: \pi'(v) = 0\}$ és $T = \{v \in V: \pi'(v) = 1\}$ a fentiek szerinti $S (s \in S)$ és $T (t \in T)$. Ha egy $e = (u, v)$ élre $u \in S$ és $v \in T$, akkor (2) miatt $w'(e) = 1$. Minden más élen $w'(e)$ csak akkor lehet 1, ha $c(e) = 0$, mert $w'(e) = 0$ -ra változtatása után a feltételek továbbra is fennállnának, és $\sum w'(e)c(e)$ csökkenne. Ezért az S és T között feszülő élek alkotta vágás értéke m_{DLP} , így $m_C \leq m_{DLP}$.

Alkalmazás minimális költségű folyam keresésére

Minden élhez rendelhető egy k költség is. Ekkor kitűzhető egy olyan feladat, ami a legalább M nagyságú folyamok között keres minimális költségűt.

Megfogalmazása lineáris programozási feladatként:

$$\min\{kx: B^*x^* \leq 0, x^* \geq 0, x \leq c, \mu \geq M\}$$

Alkalmazás többtermékes folyamra

Legyen adott egy $G=(V,E)$ irányított gráf és abban k darab pontpár: $(s_1,t_1),(s_2,t_2),\dots,(s_k,t_k)$. G -t továbbra is képzelhetjük út- vagy csőhálózatnak, az (s_i,t_i) pontpárok pedig a k darab szállítandó termék termelő-, illetve fogyasztóhelyének felelnek meg. Végül legyen adott a $c: E \mapsto \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény. A feladat egy megoldása abból áll, hogy minden élhez k darab számot fogunk hozzárendelni.

Ezekre is alkalmazható a LP, a legalább 2 termékes folyamoknál már az egyetlen ismert hatékony algoritmus. IP ezekre már NP nehéz.

8. tétel

Matroid definíciója, alapfogalmak (bázis, rang, kör). Példák: lineáris matroid (mátrixmatroid), grafikus matroid, uniform matroid. A rangfüggvény szubmodularitása.

Matroid definíció

A matroid egy olyan halmazrendszer, amely kielégíti a függetlenségi axiómákat (lásd lejjebb):

$M = (S, \mathcal{F})$, ahol S az alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig az S részhalmazainak egy része

Matroid definíció (függetlenségi axiómák)

Legyen E tetszőleges véges halmaz, $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ matroid, ha:

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(F2) Ha $X \in \mathcal{F}$ és $Y \subseteq X$, akkor $Y \in \mathcal{F}$ (X összes részhalmaza is $\mathcal{F}$ -ben van)

(F3) Ha $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| < |Y|$, akkor létezik olyan $z \in Y - X$, amelyre $X + z \in \mathcal{F}$

Alapfogalmak

Az $M = (E, \mathcal{F})$ matroidban az alaphalmaz $\mathcal{F}$ -hez tartozó részhalmazait *független* halmazoknak nevezzük. A maximális (nem bővíthető) független halmazok a matroid *bázisai*. Egy minimálisan összefüggő (egy elem elvételével már független) halmazt *körnek* nevezünk. Az egyelemű kör *hurok*. Az M matroidban egy $X \subseteq E$ halmaz *rangja* $r(X)$: egy X -beli maximális független halmaz mérete. A matroid *ranga* $r(E)$.

Def.: $(E, \mathcal{F})$ matroidban ha $X \subseteq E$ és $X \in \mathcal{F}$, akkor X független.

Def.: $(E, \mathcal{F})$ matroidban ha $X \subseteq E$ és $X \notin \mathcal{F}$, akkor X összefüggő.

Def.: ha X maximális elemszámú független halmaz, akkor bázisnak hívjuk

$$(X \subseteq \mathcal{F} \text{ és } \forall a \in S \setminus \mathcal{F} \text{-re } (X+a) \notin \mathcal{F})$$

Def.: ha X minimális elemszámú összefüggő halmaz, akkor körnek hívjuk.

$$(X \subseteq S \text{ kör, } X \notin \mathcal{F} \text{ és } \forall a \in X \text{-re } (X-a) \in \mathcal{F})$$

Def.: X rangja $r(X)$ = az X által tartalmazott maximális független részhalmazok (közös) elemszáma.

Def.: Hurok: 1 elemű halmaz.

Lemma

Legyen $(E, \mathcal{F})$ matroid, $A \subseteq E$. Ha X_1 és X_2 maximális független halmazok A -ban, akkor $|X_1| = |X_2|$.

Bizonyítás

Indirekt: $|X_1| < |X_2|$. (F3) miatt létezik olyan $e \in X_2 - X_1$, amelyre $X_1 + e \in \mathcal{F}$, vagyis X_1 nem lehetett maximális.

Példák

- Grafikus matroid** (körmatroid): G gráf által indukált matroid. $E = \{G \text{ élei}\}$, $\mathcal{F} = \{G\text{-beli erdők}\}$

Adott $G = (V, E)$ gráf.

$S=E, \mathcal{F} \subseteq E$ élhalmaz ;

$F \in \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha F körmentes (azaz erdő).

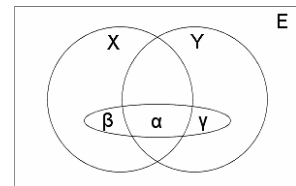
- *Lineáris matroid*: A mátrix által indukált matroid. $E = \{A \text{ oszlopai}\}$, $\mathcal{F} = \{A \text{ lineárisan független oszlopai}\}$.

Adott egy A mátrix.

$S = A$ mátrix oszlopainak halmaza (oszlop vektorok)

B : A bázis oszlopainak halmaza (néhány oszlop)

$B \in \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha a B -ben lévő vektorok lineárisan függetlenek.



- *Uniform matroid*:

S : tetszőleges véges halmaz, jelölje n az elemszámát.

Adott $k \geq 0$ nem negatív egész

$X \subseteq S$, $X \in \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha $|X| \leq k$

vagyis:

$\mathcal{F} = \{S \text{ legfeljebb } k\text{-elemű részhalmazai}\} (0 \leq k \leq n)$, jelölése: $U_{n,k}$.

Speciálisan: $U_{n,n}$: teljes/szabad matroid, $U_{n,0}$: trivális matroid.

Egy uniform matroid grafikus, ha $U_{n,0}$, $U_{n,1}$, $U_{n,n-1}$, $U_{n,n}$ alakú.

- *Partíciós matroid*:

S alaphalmaz, adott egy felbontása az S -nek. $P_1 \dots P_e$

$P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_e = S$; $P_i \cap P_j = \emptyset \quad i \neq j$ — re

Minden P_i -hez rendelünk egy a_i nem negatív egészet.

$X \subseteq S$, $X \in \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha $|X \cap P_i| \leq a_i$

9. tétel

Mohó algoritmus matroidon. Matroid megadása rangfüggvényével, bázisaival (biz. nélkül). Matroid duálisa, a duális matroid rangfüggvénye.

Mohó algoritmusos tétel

Tétel: Legyen S tetszőleges halmaz, F pedig az S részhalmazainak azon része, ami teljesíti F_1, F_2 -t.

$(S, \mathcal{F})$ akkor és csak akkor matroid, ha a mohó algoritmus minden $w: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvényre optimális megoldást ad.

Bázisos megadás (Bázis: Maximális nem bővíthető független halmaz)

Legyen $\mathcal{B}$ egy matroid bázisainak a halmaza. Ekkor

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ (van bázis, a bázisok halmaza nem üres)

(B2) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, akkor $|B_1| = |B_2|$

(B3) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $e \in B_1 \setminus B_2$, akkor létezik olyan $f \in B_2 \setminus B_1$, melyre $B_1 - e + f \in \mathcal{B}$.

Tétel: Legyen B egy halmazrendszer, az S függetlenségi halmazon, melyre B1, B2, B3 teljesül. Ekkor az $(S, \mathcal{F})$ matroidot alkot, ahol $\mathcal{F} = \{ X \subseteq S: \text{Létezik } B_1 \in \mathcal{B}, \text{ hogy } X \subseteq B_1 \}$ (Azaz $\mathcal{F}$ olyan X halmazból áll, amelynek részhalmazai valamely B -beli halmaznak).

Def.: Adott $M_1 = (S_1, \mathcal{F}_1)$, $M_2 = (S_2, \mathcal{F}_2)$ matroidok. M_1 izomorf M_2 -vel, ha létezik $S_1 \rightarrow S_2$ bijekció, hogy $X \subseteq S_1, x \in \mathcal{F}_1$ akkor és csak akkor, ha $\varphi(x) \in \mathcal{F}_2$

Def.: Egy M matroidot grafikusnak nevezünk, ha létezik olyan G gráf, hogy M izomorf $M(G)$ -vel (vagyis G körmatroidjával)

Def.: Egy M lineáris, ha létezik egy A (valós) mátrix, hogy M izomorf A vektormatroidjával.

Tétel: Minden grafikus matroid lineáris.

10. tétel

Elhagyás és összehúzás. Matroidok direkt összege, összefüggősége. T test felett reprezentálható matroid duálisának T feletti reprezentálhatósága.

Csonkolás

Adott egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és egy $k < r(M)$ egész. M -nek a k -ra csonkoltja.

$M' = (S, \mathcal{F}')$, ahol $\mathcal{F}' = \{ X \in \mathcal{F}: |X| \leq k \}$, vagyis $\mathcal{F}$ -ből kidobjuk a k -nál nagyobb függetleneket.

Pl. $U_{8,6}$ $k=3 \rightarrow U_{8,3}$

Matroidok direkt összege

Legyen $M_1 = (S_1, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (S_2, \mathcal{F}_2)$ két matroid a diszjunkt S_1 és S_2 nemüres alaphalmazon.

$M_1 \cap M_2 = 0$. A két matroid direkt összege az az $N = M_1 + M_2$

$N = (S_1 \cup S_2, \mathcal{F})$ ahol $\mathcal{F} = \{ X \subseteq S_1 \cup S_2: X \cap S_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ és } X \cap S_2 \in \mathcal{F}_2 \}$

Duális

Adott egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és B az M bázisainak halmaza. M^* az M duálisa, ahol $M^* = (S, \mathcal{F}^*)$, B^* az M^* bázisai.

$B^* = \{S - B : B \in \mathcal{B}\}$, vagyis az M^* bázisai az M bázisainak komplementerei.

Tétel: Legyen $M(G)$ a G gráf körmatroidja. $(M(G))^*$ akkor és csak akkor grafikus, ha G gráf síkbarajzolható.

Tétel: Ha az M matroid lineáris, akkor az M^* is lineáris.

Elhagyás

$M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $a \in S$

$M \setminus a$: Az a elhagyásával kapott matroid: $M \setminus a = (S - a, \mathcal{F}')$ matroid, ahol $\mathcal{F}' = \{x \subseteq S - a, x \in \mathcal{F}\}$. Pl.: grafikus matroid esetén ez megfelel egy él elhagyásának.

Összehúzás

$M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $a \in S$

M/a : az a összehúzásával kapott matroid: $M/a = (S - a, \mathcal{F}'')$ matroid, ahol

$\mathcal{F}'' = \{x \subseteq S - a, x + a \in \mathcal{F}\}$.

Tétel

Az elhagyások és összehúzások fölcserélhetők. Minden M matroid N minora (elhagyások és összehúzások sorozata) előáll $N = (M \setminus A)/B$ alakban, ahol A és B diszjunkt halmazok.

Tétel

Elhagyás és összehúzás duális művelet: $(M \setminus X)^* = M^*/X$ és $(M/X)^* = M^* \setminus X$.

Def:

Legyen M egy matroid, az N matroid az M -nek minora, ha megkapható az M -ből néhány elem törlésével és összehúzásával

Tétel: Ha M matroid grafikus, akkor M -nek az összes minora is grafikus.

Matroidok összefüggősége

Egy matroid összefüggő, ha nem áll elő matroidok direkt összegeként. Egy grafikus matroid akkor összefüggő, ha a gráf kétszeresen összefüggő.

12. tétel

Matroidok összege. k -matroid-metszet probléma, ennek bonyolultsága $k \geq 3$ esetén.

Matroid összege def

$M_1 = (S, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (S, \mathcal{F}_2)$ azonos az alaphalmaz!

Matroidok összege $M_1 \vee M_2 = (S, \mathcal{F}_3)$, ahol

$\mathcal{F}_3 = \{X \subseteq S \mid \text{hogya } X = X_1 \cup X_2 \text{ és } X_1 \in \mathcal{F}_1, \text{ illetve } X_2 \in \mathcal{F}_2.\}$ vagyis X előáll egy $\mathcal{F}_1$ -beli és egy $\mathcal{F}_2$ -beli elem uniójaként. Ahhoz, hogy X független legyen az összegben elég, hogy létezzen egy 1 ilyen felbontás.

Tétel

Matroidok összege is matroid.

Matroid metszete def

$M_1 = (S, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (S, \mathcal{F}_2)$ Ezek metszete $M_1 \cap M_2 = (S, \mathcal{F}_3)$, ahol $\mathcal{F}_3 = \{X \subseteq S \mid X \in \mathcal{F}_1, X \in \mathcal{F}_2\}$, vagyis X mind a két matroidban független.

2-matroid metszet probléma

k -matroid metszet probléma (MMP_k): adott k darab matroid közös alaphalmazon: $M_i = (E, \mathcal{F}_i), i = 1, 2, \dots, k$. Létezik-e valamely konstans p -re p -méretű halmaz $\cap \mathcal{F}_i$ -ben?

Az eredmény nem minden esetben matroid.

Tétel: 2-matroid metszet probléma: két matroid esetén, $MMP_2 \in P$

Biz: $M_1=(E, \mathcal{F}_1), M_2=(E, \mathcal{F}_2), p$ egész. Ha $p > \min(r_1, r_2)$, nem a válasz. Csonkoljuk a matroidokat addig, amíg a rangjuk $\min(r_1, r_2, p)$ -re nem csökken. Ezzel a problémát redukáltuk közös bázis keresésére. $r_1=r_2=p$ -re a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha $M_1 \vee M_2^* = (E, 2^E)$.

- $\Rightarrow$: ha M_1 -nek és M_2 -nek van közös B bázisa, akkor M_2^* -ban $E-B$ bázis, $E=BU(E-B)$ egy felbontása az összegnek, azaz az összegben E független, tehát $M_1 \vee M_2^*$ szabadmatroid.
- $\Leftarrow$: legyen $E=CUD$ egy olyan felbontása a szabadmatroidnak, ahol $C \in \mathcal{F}_1$ és $D \in \mathcal{F}_2^*$.
 $|E| \leq |C| + |D| = r_1(C) + r_2^*(D) \leq r_1(E) + r_2^*(E) = r_1(E) + |E| - r_2(E) = |E|$.
 C és D diszjunkt bázisok $\Rightarrow C$ közös bázisa M_1 -nek és M_2 -nek.

Def.: Egy $M=(E, \mathcal{F})$ matroidot szabadmatroidnak nevezzük, ha E bármely részhalmaza független.

MMP_k bonyolultsága

MMP_k NP-teljes ($k \geq 3$) esetén

Bizonyítás

NP-beli, mert p -elemű közös bázis tanú

MMP_3 visszavezethető irányított Hamilton-út keresésére, ami NP-teljes.

- $M_1=(E, \mathcal{F}_1)$ -ben $X \subseteq E$ -re $X \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow$ az X részgráfban minden pont befoka legfeljebb 1 és a befoka 0.

- $M_2=(E,F_2)$ -ben $X\subseteq E$ -re $X\in F_2 \Leftrightarrow$ az X részgráfban minden pont ki-foka legfeljebb 1 és v ki-foka 0.
- M_3 a gráf körmatroidja.

M_1 , M_2 és M_3 közös $|V|-1$ elemű bázisai G irányított Hamilton-útjai.

Tétel: MMP_k $k>3$ -ra NP-teljes.

Biz.: az előző bizonyításban definiált M_1 , M_2 és M_3 matroidokhoz vegyünk hozzá $k-3$ db szabadmatroidot.

13. tétel

A k-matroid partíciós probléma, ennek algoritmikus megoldása. A 2-matroid-metszet feladat visszavezetése matroid partíciós problémára.

k-matroid partíciós probléma

MPP_k: adott k matroid $(M_i = (E, F_i), i=1 \dots k)$. Kérdés: a matroidok összege a szabadmatroidot adja-e, vagyis E előáll-e $E_1 \cup \dots \cup E_k$ alakban úgy, hogy $E_i \in F_i \forall i$ -re. Feltehető, hogy az E_i halmazok diszjunktak, ezért hívják a feladatot matroid partíciós problémának.

Lemma: MPP_k NP-beli, mert tanú rá egy particionálás, és a tanú lineáris időben ellenőrizhető.

Lemma: MPP_k coNP-beli, mert tanú rá egy $X \subseteq E$ halmaz, ami biztosan összefüggő az összegben, azaz $\sum r_i(X) < |X|$.

Lemma: MPP_k P-beli.

Algoritmus

Induljunk ki az $\forall i E_i = \emptyset$ állapotból. Ekkor $E_i \in F_i$. Az E_i halmazokat addig bővítjük, amíg az uniójuk E nem lesz, vagy ha nem bővíthető, mutatunk egy X tanút.

A bővítéshez bevezetünk egy $n+k$ pontú irányított segédgráfot, amelynek

- Csúcsai E elemei $\cup \{p_1, \dots, p_k\}$. p_i az E_i partíció segédpontja.
- $(x \rightarrow p_i) \in E(G)$, ha $x \notin E_i$ és $E_i \cup \{x\} \in F_i$.

Az ilyen típusú élek azt jelképezik, hogy az E_i partícióba felvehető x a függetlenség megsértése nélkül.

- $(x \rightarrow y) \in E(G)$, ha $\exists i x \notin E_i, y \in E_i, E_i \cup \{x\} \notin F_i$, de $E_i \cup \{x\} - \{y\} \in F_i$.

Az ilyen típusú élek azt jelentik, hogy az E_i partícióban az y elem kicserélhető x-re a függetlenség megsértése nélkül.

1. Megkeressük a legrövidebb irányított utat $(E - \cup E_i)$ -ből $\{p_1, \dots, p_k\}$ -ba.
2. Ha van ilyen út, javítunk az út mentén, azaz végrehajtjuk a cserét. $\cup E_i$ mérete 1-gyel nő. Azért kell a legrövidebb úton végigmenni, mert különben nem garantált, hogy a cserék során nem sérül a partíciók függetlensége.
3. Különben STOP, nemleges a válasz, és a tanú az $(E - \cup E_i)$ -ből irányított úton elérhető pontok halmaza.

2-matroid-metszet probléma

MMP_k: adott k matroid $(M_i=(E,F_i), i=1\dots k)$ és egy p egész szám. Kérdés: létezik-e F_i -nek legalább p méretű közös elemük?

Tétel: $MMP_2 \in P$.

Biz: $M_1=(E,F_1), M_2=(E,F_2), p$ egész. Ha $p > \min(r_1, r_2)$, nem a válasz. Csonkoljuk a matroidokat addig, amíg a rangjuk $\min(r_1, r_2, p)$ -re nem csökken. Ezzel a problémát redukáltuk közös bázis keresésére. $r_1=r_2=p$ -re a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha $M_1 \vee M_2^* = (E, 2^E)$.

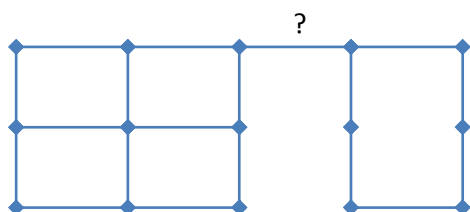
- $\Rightarrow$: ha M_1 -nek és M_2 -nek van közös B bázisa, akkor M_2^* -ban $E-B$ bázis, $E=BU(E-B)$ egy felbontása az összegnek, azaz az összegben E független, tehát $M_1 \vee M_2^*$ szabadmatroid.
- $\Leftarrow$: legyen $E=CUD$ egy olyan felbontása a szabadmatroidnak, ahol $C \in F_1$ és $D \in F_2^*$.
 $|E| \leq |C| + |D| = r_1(C) + r_2^*(D) \leq r_1(E) + r_2^*(E) = r_1(E) + |E| - r_2(E) = |E|$.
 C és D diszjunkt bázisok $\Rightarrow C$ közös bázisa M_1 -nek és M_2 -nek.

Def.: $M = (E, F)$ csonkoltja $M' = (E, F')$ ahol F' az F elemeit tartalmazza a bázisokon kívül. A matroid rangja ettől eggyel csökken.

20. tétel – Megbízható hálózatok terv.

Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma. $\lambda(G)$ meghatározása folyamatok segítségével (négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel).

Megbízható hálózat



Teendők:

- megbízhatóság kiszámítása
- megbízható hálózat tervezése minimális költséggel
- megbízhatóság növelése minimális költséggel

Összefüggőségek

Def.: Egy $G = (V, E)$ gráfban $u, v \in V$ pontok közötti lokális élösszefüggőség ($\lambda(u, v)$) az u és v pontok közötti éldiszjunkt utak száma.

Def.: Egy $G = (V, E)$ gráfban $u, v \in V$ pontok közötti lokális összefüggőség ($\kappa(u, v)$) az u és v pontok közötti belsőleg pontdiszjunkt utak száma.

Def.: Egy G gráf k -összefüggő (pontösszefüggő), ha létezik $k+1$ csúcsa és bármely maximum $k-1$ darab csúcsát elhagyva összefüggő marad.

Def.: Egy G gráf k -élösszefüggő, ha bármely maximum $k-1$ darab élét elhagyva összefüggő marad.

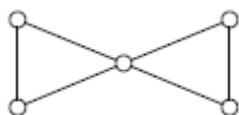
A k -összefüggőségből következik a k -élösszefüggőség.

Def.: A $\lambda(G)$ élösszefüggőségi szám az a maximális k érték, hogy a G gráf még k -élösszefüggő.

Def.: A $\kappa(G)$ összefüggőségi szám az a maximális k érték, hogy a G gráf még k -összefüggő.

Általánosan igaz, hogy: $\lambda(G) \geq \kappa(G)$

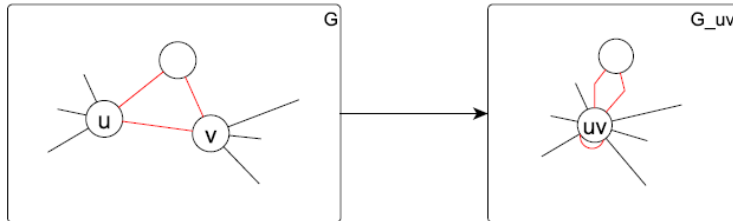
Példa arra, hogy a gráf 2-élösszefüggő, de nem 2-összefüggő:



21. tétel – Megbízható hálózatok terv.

$\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader tétele (biz. nélkül), Nagamochi és Ibaraki algoritmus (biz. nélkül).

Összehúzás fogalma



Egy G gráfban az u és v pont összehúzásával keletkező pontot nevezzük uv -nek. Ha az eredeti gráfban u és v között volt él, abból az új gráfban uv -hez tartozó hurokél lesz. Ha az eredeti gráfban u -ból és p -ból is ment él egy közös p pontba, akkor abból az új gráfban uv és p közti párhuzamos élek lesznek.

Összefüggőség kiszámítása összehúzásokkal

G -ből készítünk egy hálózatot egységnyi élsúlyozással, és $\lambda(G)$ meghatározásához keressük a maximális folyamot, vagyis a minimális vágást. Alkalmazzunk most olyan módszert, amihez nem kell folyamot számolni.

Tétel: Két pont összehúzásával a vágás nem csökkenhet, és csak akkor nőhet, ha az összes minimális vágás a két pont között halad át. Vegyük tehát $\lambda(G) = \min\{\lambda(u, v), \lambda(G_{uv})\}$, ahol G_{uv} a G -ből az u és v pontok összehúzásával kapott gráf. Ezt $n-1$ -szer kiszámolva megkapjuk $\lambda(G)$ -t.

Biz.: Belátjuk, hogy $\lambda(G)$ legfeljebb $\lambda(u, v)$, legfeljebb $\lambda(G_{uv})$, és az egyikkel egyenlő is.

- $\lambda(G) \leq \lambda(u, v)$. Triviális a $\lambda(G) = \min_{u, v \in V(G), u \neq v} \lambda(u, v)$ definíció miatt.
- $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$
Ha G_{uv} nem összefüggő, akkor az összehúzás előtt G sem volt az (az állítás megfordítva nem igaz, ha G nem összefüggő, akkor G_{uv} lehet az, pl.: egy C_2 -ből és egy izolált pontból álló gráf esetén a C_2 egyik pontját az izolált ponttal összehúzáva összefüggő gráfot kapunk).
 $\lambda(G_{uv}) = k$ esetén G_{uv} -nek van k olyan éle, amit elhagyva szétesik. A G_{uv} -beli vágás G -re transzformálva a megfelelő k élt elhagyva G is szétesik, mert ha nem így lenne, akkor az összehúzás utáni G_{uv} is összefüggő lenne. Ezért $\lambda(G) \leq k$ biztosan teljesül, $\lambda(G_{uv}) = k$ miatt $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$.
- $k = \lambda(G) = \lambda(u, v)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G_{uv})$. Vegyünk egy k élű vágást G -ben.
 - Ha a k élt elhagyva u és v különböző komponensben vannak, akkor $\lambda(u, v) \leq k$, azaz $\lambda(u, v) \leq \lambda(G)$. Korábban beláttuk, hogy $\lambda(G) \leq \lambda(u, v)$, tehát $\lambda(G) = \lambda(u, v)$.
 - Ha ugyanabban a komponensben vannak, akkor G_{uv} is szétesik ugyanannak a k élnek az elhagyásával (mert u és v összehúzása nem teheti összefüggővé), tehát $\lambda(G_{uv}) \leq k$, azaz $\lambda(G_{uv}) \leq \lambda(G)$. Korábban beláttuk, hogy $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$, tehát $\lambda(G) = \lambda(G_{uv})$.

Max-vissza sorrend

Def.: A gráf pontjainak egy $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sorrendje max-vissza sorrend, ha $i < j$ esetén $d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_j, V_{j-1})$, ahol $d(v_k, V_{i-1})$ a v_k -ból $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ -ba menő élek száma.

Max-vissza sorrend készítése esetén az elsőként választott csúcs tetszőleges lehet.

Mader tétel

Minden G gráfban létezik olyan $u, v \in V(G)$ csúcspár, hogy $\lambda(u, v) = d(v)$, ahol $d(v)$ a v pont fokszáma.

Ha u és v a max-vissza sorrend szerinti utolsó két pont, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$. Ha tehát minden iterációban az összehúzendó párt a max-vissza sorrend utolsó két pontjaként választjuk, akkor a $\lambda(u, v)$ egyszerűen $d(v)$ fokszáma lesz. Így eltekinthetünk a folyam számolásától.

Nagamochi és Ibaraki algoritmus

Legalább kétpontú gráfra.

- 1) $\lambda = \infty$
- 2) készítsük el a gráf max-vissza sorrendjét. Ha $d(v_n) < \lambda$, akkor legyen $\lambda = d(v_n)$. Ha még legalább három pontú a gráf, akkor húzzuk össze a max-vissza sorrend szerinti utolsó két pontot, GOTO 2. Egyébként STOP.

Nem ismert hasonló eljárás a pontösszefüggőség kiszámítására és irányított gráfokra sem.

VLSI Huzalozás

A huzalozási feladat, alapfogalmak

Adott egy téglalap alakú áramköri lap, melynek szélein kivezetések helyezkednek el, ezeket **termináloknak** nevezzük. A **netek** meghatározzák, hogy mely terminálokat kell egymással elektromos szempontból összekötni, csoportonként külön-külön. A huzalok természetesen egy rétegen belül nem metszhetik egymást, valamint minimális távolságot is kell tartani egy-egy huzal között. Utóbbi probléma négyzetrács alkalmazásával oldható meg, úgy, hogy huzal csak a rács élei mentén haladhat.

Egy huzalozás **Manhattan-modellbeli**, ha szomszédos rétegeken csak különböző irányú huzalszakaszok futnak, azaz felváltva tartalmaznak függőleges és vízszintes huzalszakaszokat. Ellenkező esetben a huzalozás **megszorítás nélküli modellben** van.

Gallai algoritmus

Gallai algoritmus lineáris időben ad optimális (minimális huzalozás-szélességet felhasználó) megoldást Manhattan-modellben az egysoros huzalozási problémára, melynél a terminálok az áramköri lapnak csak az egyik oldalán (egy sorban) helyezkednek el.

Az algoritmus menete a következő:

1 A neteket bal szélső termináljuk szerinti növekvő sorrendbe rendezzük. 1 Ha az 1 ... $i-1$ sorszámú netek huzalozása kész

-
- ha az i . net vízszintes huzalszakasza belefér valamelyik "megkezdett" sorba, ott elhelyezzük
- ha nem, új sorba tesszük

Ha terminálsor vonalára merőleges tetszőleges egyenes mentén mért terhelést az egyenest metsző netek számaként definiáljuk, az algoritmus lineáris időben elvégzi a huzalozást úgy, hogy annak szélessége megegyezik a legnagyobb terhelésű egyenes terhelésével.

TODO: bizonyítás

Csatornahuzalozás k rétegen a Manhattan modellben

Csatornahuzalozásnak az olyan feladatokat nevezzük, ahol a terminálok a lap két szemközti szélén helyezkednek el. A rétegek száma előre meghatározott, cél a feladat megoldása minél kisebb szélességben. A rétegeket - mivel Manhattan-modellben dolgozunk - függőleges és vízszintes huzalozású rétegekre bontjuk, ezek számosságát f -fel ill. v -vel jelöljük ($f + v = k$).

Az előző feladathoz képest annyit változtatunk a terhelés mérésén, hogy nem rácsponatok között, hanem rácsponatokon keresztül menő egyeneseken mérjük. A legnagyobb terhelés értékét d -vel jelöljük ez a feladat sűrűsége.

Tétel: Egy csatornahuzalozási feladat Manhattan-modellbeli megoldásának minimális szélessége legalább $\lceil d/v \rceil$

Tegyük fel, hogy van w szélességű huzalozás. Mivel d terhelésű egyenest csak a vízszintes rétegek soraiban metszhetnek szakaszok és ilyen sorból vw van, azért $vw \geq d \rightarrow w \geq \lceil d/v \rceil$

Tétel: Minden csatornahuzalozási feladat megoldható $\lceil d/(f-1) \rceil$ szélességben (ha $f \geq 2$), és ilyen megoldás található is lineáris időben.

Csatornahuzalozás a kétrétegű, megszorítás nélküli modellben

Csatornahuzalozásnak az olyan feladatokat nevezzük, ahol a terminálok a lap két szemközti szélén helyezkednek el. Minden ilyen feladat megoldható kétrétegű áramköri lapon, megszorítás nélküli modellben alkalmas (nem feltétlenül optimális) szélességben, ilyen megoldást lineáris időben találhatunk.

Először egy speciális esetet bizonyítunk be, melyben minden netnek pontosan egy északi és egy déli terminálja van. A huzalozás során a következő sorrendben kötjük be a neteket:

1 ÉK-DNy típusú netek (/ alak): déli terminálok x koordinátája szerinti növekvő sorrendben, így nem metszik egymást
 1 egyenes bekötések (I alak): sorrent érdektelen, nem metszhetik egymást
 1 ÉNy-DK típusú netek (\ alak): északi terminálok x koordinátája szerinti növekvő sorrendben

Végül az általános esetet visszavezetjük a speciálisra oly módon, hogy amennyiben valamelyik oldal (északi, déli, vagy mindkettő) nem felel meg a fenti speciális esetnek, a megfelelő terminálokat a [23. tételben](#) említett Gallai-féle algoritmussal egysoros huzalozásként kezelve összekötjük, majd netenként "kivezetünk" egy függőleges huzalt, így már alkalmazható a speciális esetre kidolgozott algoritmus.

Switchbox-huzalozás, alsó becslés a rétegek számára, felső becslés

Switchbox-huzalozásnak az olyan feladatokat nevezzük, ahol a terminálok a lap mind a négy oldalán elhelyezkedhetnek. Erre az esetre Hambrusch tétele kimondja, hogy tetszőleges k számhoz található olyan feladat, amely nem oldható meg k rétegen még a megszorítás nélküli modellben sem.

TODO: bizonyítás

Alsó és felső becslés a rétegek számára

$\lceil m \rceil + 1 \leq k \leq 2\lceil m \rceil + 4$ ahol $m = \max(n/w, w/n)$, n és w pedig a lap magassága ill. szélessége