Felsőbb matematika vizsga – 2011-12-20

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget!

$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

2. Mi az a tulajdonság, mely elemi sorműveletek közben – egy tanult tétel szerint – a sorvektorokkal kapcsolatban nem változik és mi az a másik, mely az oszlopvektorokkal kapcsolatban nem változik?

Nem változik a sortér (a sorvektorok által generált altér) és nem változnak az oszlopvektorok közti lineáris kapcsolatok.

3. A valós $m\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris érték szerinti $\mathbf{U\Sigma V}^T$ felbontásának ismeretében írjuk föl az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ egy bázisát és e bázis elemei közt az $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{Ax}$ leképezés hatását!

Az $\mathbf{U}$ oszlopvektoraiból álló $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$ az $\mathbb{R}^m$, a $\mathbf{V}$ oszlopaiból álló $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ az $\mathbb{R}^n$ bázisa, $\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\sigma_i\mathbf{u}_i$.

4. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* diagonalizálható *(b)* unitéren diagonalizálható, *(c)* ortogonálisan diagonalizálható legyen? *(1.5 pont)*

Hogy *(a)* létezik a mátrix sajátvektoraiból álló bázis, vagy a geometriai multiplicitások megegyeznek az algebraiakkal, *(b)* a mátrix normális, *(c)* szimmetrikus legyen.

5. Mit tudunk egy *(a)* önadjungált és egy *(b)* unitér mátrix determinánsáról?

(a) valós, *(b)* abszolút értéke 1.

6. $\mathbb{R}^4$ egy 2-dimenziós alterének bázisvektorai az $(1,-1,1,-1)$ és a $(8,6,2,0)$ vektorok. A Gram–Schmidt-eljárással adjuk meg az altér egy ortonormált bázisát.

$\mathbf{v}_2 = (8,6,2,0) - \frac{(8,6,2,0)(1,-1,1,-1)}{|(1,-1,1,-1)|^2}(1,-1,1,-1) = (7,7,1,1)$, így az ortonormált bázis vektorai: $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\frac{1}{10}(7,7,1,1)$

7. Az előző feladat eredményét fölhasználva írjuk fel az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&8\\-1&6\\1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását!

Az ortonormált bázis vektoraiból álló mátrix a $\mathbf{Q}$, és $\mathbf{R}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}$, azaz a felbontás:

$$\mathbf{A}=\mathbf{QR}=\begin{bmatrix}1/2&7/10\\-1/2&7/10\\1/2&1/10\\-1/2&1/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\0&10\end{bmatrix}.$$

8. Mit értünk egy vektortér dimenzióján?

a belőle kiválasztható maximális lineárisan független vektorrendszer elemszámát.

9. Írjuk fel a $\begin{bmatrix}2&-4\\1&-2\end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását! *(1.5 pont)*

$$\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot[5]\cdot\frac{1}{\sqrt5}[1\quad -2]$$

10. Írjuk fel a $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

11. *(a)* Adjunk meg olyan egyenletet, mely az ellentmondásos $\left\{\begin{array}{c} 2x+4y=12 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenletrendszerrel együtt egy egyértelműen megoldható egyenletrendszert ad, melynek az optimális megoldás a megoldása. *(b)* Mi az optimális megoldás? *(2 pont)*

Az egyenlet: $2x-y=0$. A megoldás $x=1$, $y=2$.

12. Határozzuk meg a $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2-, ∞- és Frobenius-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_1=\|\mathbf{A}\|_\infty=4$, $\|\mathbf{A}\|_2=3$, $\|\mathbf{A}\|_F=\sqrt{13}$

13. Irreducibilis vagy reducibilis az alábbi mátrix?
$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ (Rajzzal igazolható!)

reducibilis, a $\{2,4\}$ halmazból nem indul él.

14. Mit nevezünk Perron-vektornak?

Pozitív mátrix spektrálsugarához, mint sajátértékhez tartozó pozitív $\mathbf{p}$ sajátvektorát Perron-vektornak nevezzük, ha koordinátáinak összege 1.

15. Mutassuk meg, hogy unitér mátrixok szorzata unitér! *(2 pont)*

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ unitér, azaz $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^H$ és $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{B}^H$, akkor $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H=(\mathbf{AB})^H$.

16. Milyen tételt tudunk hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjáról? Bizonyítsuk is be! *(3 pont)*

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

17. Röviden igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei és szinguláris értékei megegyeznek. *(3 pont)*

1. mo.: Ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei nemnegatívak, ha szimmetrikus, akkor $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$, így $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sajátértékei az $\mathbf{A}$ sajátértékeinek négyzetei, melyek gyökei a szinguláris értékek.
2. mo.: Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért ortogonálisan diagonalizálható, azaz $\mathbf{A}=\mathbf{CDC}^T$, ahol $\mathbf{C}$ ortogonális, $\mathbf{D}$ diagonális, és átlós elemei az $\mathbf{A}$ sajátértékei. Mivel $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ezért $\mathbf{D}$ átlójában csak nemnegatív számok állnak, így az előző felbontás egyúttal szinguláris érték szerinti felbontás is, tehát a sajátértékek és a szinguláris értékek megegyeznek.