Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3;1;-1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi egyenletrendszerekkel megadott e_1 és e_2 egyenesek egyikével sem.

$$e_1: \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2} \qquad\qquad e_2: \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z-4$$

* * * * *

A két egyenes irányvektora $\underline{v}_1(3;-6;2)$ és $\underline{v}_2(2;-5;1)$. (1+1 pont)
Mivel a keresett síknak nincs közös pontja sem e_1-gyel, sem e_2-vel, ezért mindkettővel párhuzamos, (1 pont)
vagyis a normálvektorai merőlegesek $\underline{v}_1$-re és $\underline{v}_2$-re. (2 pont)
A keresett síknak normálvektora tehát például a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzat. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = ((-6)\cdot 1 - 2\cdot(-5))\underline{i} - (3\cdot 1 - 2\cdot 2)\underline{j} + (3\cdot(-5) - (-6)\cdot 2)\underline{k} = (4;1;-3).$$ (2 pont)

A kapott normálvektor és P segítségével a sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $4x + y - 3z = 16$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a teljes értékű megoldáshoz valójában hozzátartozna annak ellenőrzése is, hogy a kapott sík nem tartalmazza sem e_1-et, sem e_2-t; ehhez csupán egy-egy pontot kellene mutatni e_1-en és e_2-n, amelyek nincsenek a kapott síkon. Ennek hiányáért ne vonjunk le pontot, viszont ha olyan megoldó, aki egyébként nem kapna maximális pontot, ellenőrzi ezt, annak ezért 1 pontot adjunk. Megjegyezzük továbbá, hogy a feladatbeli sík nem volna egyértelmű, ha e_1 és e_2 párhuzamos volna; ez nincs így, mert $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ nem skalárszorosai egymásnak. A megoldásban azonban erre nem szükséges hivatkozni, mert a feladat szövegéből feltételezhető, hogy a keresett sík egyértelmű. (Egyébként ha v_1 és v_2 párhuzamos volna, akkor a megoldásban $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \underline{0}$ adódott volna.) Természetesen a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v}_1 \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\underline{v}_2 \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

2. Legyen $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ és $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot X = 0\}$, vagyis a W halmaz azokból a 2×2-es A mátrixokból áll, amelyekre $A \cdot X = 0$ teljesül. (0 a 2×2-es, csupa 0 mátrixot jelöli.) Igaz-e, hogy W alteret alkot a 2×2-es mátrixok szokásos összeadás és skalárral szorzás műveletekkel vett vektorterében?

* * * * *

Az előadáson tanultak szerint azt kell eldöntenünk, hogy W zárt-e az összeadásra és a skalárral szorzásra, vagyis bármely $A_1, A_2 \in W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén igaz-e, hogy $A_1 + A_2 \in W$ és $\lambda \cdot A_1 \in W$.(2 pont)
Ha $A_1 + A_2 \in W$, akkor $A_1 \cdot X = 0$ és $A_2 \cdot X = 0$. A tanult azonosság (a mátrixszorzás disztributivitása) miatt $(A_1 + A_2) \cdot X = A_1 \cdot X + A_2 \cdot X$, vagyis $(A_1 + A_2) \cdot X = 0 + 0 = 0$, így $A_1 + A_2 \in W$ valóban igaz. (4 pont)
Hasonlóan, $(\lambda \cdot A_1) \cdot X = \lambda \cdot (A_1 \cdot X)$, így $(\lambda \cdot A_1) \cdot X = \lambda \cdot 0 = 0$, így $\lambda \cdot A_1 \in W$ is igaz. (3 pont)
Ezért a feladatbeli állítás igaz, W alteret alkot. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy némi számolással belátható, hogy a feladatbeli X mátrixra az $A \cdot X = 0$ feltételnek valójában csak az $A = 0$ felel meg, így $W = \{0\}$. Ennek megmutatására azonban nincs szükség a feladat megoldásához. A teljes értékű megoldáshoz azt viszont valójában ellenőrizni kellene, hogy W nem üres; ez nyilván igaz, hiszen a 0 benne van. Ennek hiányáért ne vonjunk le pontot, ha viszont olyan megoldó, aki egyébként nem kapna maximális pontot, ellenőrzi W nemüres voltát, annak ezért 1 pontot adjunk. Megjegyezzük továbbá, hogy a fenti megoldás nem támaszkodott arra, hogy X épp a feladatban megadott konkrét mátrix, ugyanez az állítás tehát tetszőleges X mátrixra is igaz. Ennek ellenére természetesen elegendő csak a feladatbeli konkrét X-re megoldani a feladatot.

3. Egy 100 dimenziós V vektortérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak V-ben!

* * * * *

Legyen a feladatbeli 100 bázis $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$. A kívánt bázis elkészítéséhez sorra vesszük a bázisokat és mindegyikből kiválasztunk egy-egy vektort úgy, hogy az addig választott vektorok együtt mindig lineárisan független rendszert alkossanak. (1 pont)
Elindulásként válasszunk egy tetszőleges $\underline{b}_1 \in B_1$ vektort; ez önmagában valóban lineárisan független (lévén szó a lineárisan független B_1 rendszer egyik vektoráról). (1 pont)
Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq i < 100$ esetén már sikerült kiválasztani a $\underline{b}_1 \in B_1, \underline{b}_2 \in B_2, \ldots, \underline{b}_i \in B_i$ vektorokat úgy, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_i$ lineárisan függetlenek. Mivel V-ben van 100 elemű lineárisan független rendszer (bármely bázis az), ezért a tanult tétel szerint minden generátorrendszer legalább 100 elemű, így $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_i$ nem generátorrendszer. (2 pont)
Ezért a B_{i+1} bázisnak is kell legyen olyan vektora, amely nincs benne a $\langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$ generált altérben; ha ugyanis B_{i+1} minden vektora kifejezhető volna a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor – mivel B_{i+1} generátorrendszer, hiszen bázis – V minden vektora is kifejezhető volna a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Válasszunk tehát egy tetszőleges $\langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$-be nem tartozó, B_{i+1}-beli vektort és legyen ez $\underline{b}_{i+1}$. Ekkor $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i, \underline{b}_{i+1}$ valóban lineárisan független, mert különben az előadáson tanult lemma (az „újonnan érkező vektor lemmája") miatt $\underline{b}_{i+1} \in \langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$ mégis igaz volna. (2 pont)
A fentiek szerint tehát megkapható a $\underline{b}_1 \in B_1, \underline{b}_2 \in B_2, \ldots, \underline{b}_{100} \in B_{100}$ lineárisan független rendszer. Állítjuk, hogy ez már bázis is; ha ugyanis nem volna az (vagyis nem volna generátorrendszer), akkor a fent leírt lépés újabb megismétlésével (B_{101} helyére tetszőleges bázist képzelve) a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{100}, \underline{b}_{101}$ lineárisan független rendszert kapnánk. Ez azonban ellentmondás: mivel V-ben van 100 elemű generátorrendszer (bármely bázis az), ezért minden lineárisan független rendszer legföljebb 100 vektorból állhat. Így a kapott $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{100}$ rendszer valóban bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 = 4\\
&3x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2\\
&-2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 6\\
&2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + c \cdot x_4 + (c-15) \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrcr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 3 & 8 & -9 & 2 & 3 & 2\\ -2 & -5 & 7 & 2 & -8 & 6\\ 2 & 6 & -4 & c & c-15 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrcr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & -10\\ 0 & -1 & -3 & 2 & -6 & 14\\ 0 & 2 & 6 & c & c-17 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrcr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & c-2 & c-17 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrcr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c-21 & 21-3c \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $c = 7$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (két további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -11 & 0 & -3 & 20\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1 = 20 + 11\alpha + 3\beta$, $x_2 = -8 - 3\alpha - 2\beta$, $x_4 = 3 + 2\beta$. (2 pont)

Ha viszont $c \neq 7$, akkor az utolsó sor $(3c - 21)$-gyel osztásával és a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (4 darab) „kinullázásával" kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 17\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = 17 + 11\alpha$, $x_2 = -6 - 3\alpha$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A determinánsokra vonatkozó, az előadáson tanult egyik tulajdonság szerint az

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2+7 & 5+8 & 3+16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{vmatrix}$$

determináns értéke épp az A és B determinánsának összegével egyezik meg. (5 pont)
Mivel a fenti determináns két sora (az első és a harmadik) megegyezik, ezért (egy másik tanult tulajdonság szerint) az értéke 0. (4 pont)
Így $\det A + \det B = 0$. (1 pont)
A feladat természetesen megoldható $\det A$ és $\det B$ (például Gauss-eliminációval való) kiszámításával is: ekkor $\det A = 8$ és $\det B = -8$ adódik. Ebben az esetben a $\det A + \det B$ összeadásért (a fenti pontozásnak megfelelően) 1 pont jár, a maradék 9 pontból pedig – amennyiben a megoldáson látszik, hogy a megoldó a determináns kiszámításának módszerével egyébként tisztában van – minden számítási hibáért 1 pont vonandó le. Ha a megoldásban elvi hiba van (például sor vagy oszlop konstanssal szorzása vagy sorok vagy oszlopok cseréje esetén a determináns értéke megváltozásának figyelmen kívül hagyása), akkor a számításért (a $\det A + \det B$ összeadáson kívül) 2-3 pontnál több nem adható; az is csak akkor, ha az elvégzett eliminációs lépések egyébként a helyes cél irányába mutatnak. Ugyancsak nem adható 2-3 pontnál több egy olyan megoldónak, aki ugyan helyes eliminációs lépéseket végez, de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát.

6. Az $n \times n$-es A mátrix főátlójának minden eleme $\frac{n-2}{n}$, a mátrix összes többi eleme $\frac{-2}{n}$. Határozzuk meg az A^{2011} mátrixot (vagyis annak a 2011 tényezős szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

* * * * *

Első lépésként az A^2 mátrixot határozzuk meg.
A mátrixszorzás definíciója szerint A^2 főátlójának minden eleme

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + (n-1)\cdot\left(\frac{-2}{n}\right)^2 = \qquad \text{(2 pont)}$$

$$= \frac{(n-2)^2 + (n-1)\cdot 4}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Hasonlóan, A^2-ben a főátlón kívül minden elem $2\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{-2}{n}\right) + (n-2)\cdot\left(\frac{-2}{n}\right)^2 =$ (2 pont)

$$= \frac{(-4)\cdot(n-2) + (n-2)\cdot 4}{n^2} = \frac{0}{n^2} = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

A fentiek szerint tehát $A^2 = E$ (ahol E az $n \times n$-es egységmátrix). (1 pont)
Mivel $M \cdot E = M$ minden M mátrixra igaz, ezért $A^3 = A^2 \cdot A = E \cdot A = A$, $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = E$, stb. Tehát az A páratlan hatványai A-val, páros hatványai E-vel egyenlők, így $A^{2011} = A$. (3 pont)
Az utolsó 3 pontért indoklásnak elfogadható az $A^{2011} = (A^2)^{1005} \cdot A = E^{1005} \cdot A = E \cdot A = A$ számítás is (akkor is, ha a megoldó az $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$ azonosságot indoklás nélkül használja fel).