Valószínűségszámítás vizsga dolgozat
Műszaki informatika szak
2012. június 13.

1. Legyen $X \in U(0,1)$, és $Y = \sqrt{X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

   Megoldás: $\mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < t^2\right) = t^2, t \in (0,1)$.
   $f_Y(t) = 2t, t \in (0,1)$.

2. Legyen $X \in N(1,1)$. Számolja ki $\operatorname{cov}\left(X, X^3\right)$-t!

   Megoldás: $X - 1 \in N(0,1) \Longrightarrow$
   $\mathbf{E}(X-1) = \mathbf{E}(X-1)^3 = 0, \mathbf{E}(X-1)^2 = 1, \mathbf{E}(X-1)^4 = 3.$
   $\mathbf{E}X = 1, \mathbf{E}(X-1)^3 = \mathbf{E}X^3 - 3\mathbf{E}X^2 + 3\mathbf{E}X - 1 = 0,$
   $\mathbf{E}(X-1)^2 = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X + 1 = 1,$
   $\mathbf{E}(X-1)^4 = \mathbf{E}X^4 - 4\mathbf{E}X^3 + 10\mathbf{E}X^2 - 4\mathbf{E}X + 1 = 3.$
   $\mathbf{E}X^2 = 2, \mathbf{E}X^3 = 4, \mathbf{E}X^4 = 2.$
   $\operatorname{cov}\left(X, X^3\right) = \mathbf{E}X^4 - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}X^3 = 2 - 4 = -2.$

3. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

   $$f_{X,Y}(u,v) = \frac{4}{3}\left(u^2 - uv + 2v^2\right), u, v \in (0,1).$$

   Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!

   Megoldás: $f_Y(v) = \int\limits_0^1 \frac{4}{3}\left(u^2 - uv + 2v^2\right) \mathrm{d}\, u = \frac{4}{3}\left[2v^2 - \frac{v}{2} + \frac{1}{3}\right],$
   $f_{X|Y}(u \mid v) = \frac{f_{X,Y}(u,v)}{f_Y(v)} = \frac{6u^2 - 6uv + 12v^2}{2 - 3v + 12v^2},$
   $\mathbf{E}(X \mid Y = v) = \int\limits_0^1 u \frac{6u^2 - 6uv + 12v^2}{2 - 3v + 12v^2} \mathrm{d}\, u = \frac{\frac{3}{2} - 2v + 6v^2}{2 - 3v + 12v^2} \Longrightarrow \mathbf{E}(X \mid Y) = \frac{\frac{3}{2} - 2Y + 6Y^2}{2 - 3Y + 12Y^2}.$

4. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ egy $E\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$ eloszlásból származó statisztikai minta. Igazoljuk, hogy az $T_1 = n \cdot X_1^*$ statisztika torzítatlan becslése a ϑ paraméternek.

   Megoldás: A minta eloszlásfüggvénye:

   $$F_\vartheta(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\vartheta}x}, x > 0.$$

   Az X_1^* statisztika eloszlásfüggvénye:

   $$F_1^*(x) = \mathbf{P}\left(X_1^* < x\right) = 1 - \left[1 - F_\vartheta(x)\right]^n = 1 - e^{-\frac{n}{\vartheta}x}, x > 0.$$

   Tehát, $X_1^* \in E\left(\frac{n}{\vartheta}\right)$, amiből következik, hogy $\mathbf{E}X_1^* = \frac{\vartheta}{n} \Longrightarrow \mathbf{E}T_1 = n \cdot \frac{\vartheta}{n} = \vartheta$, azaz torzítatlan.

5. Tekintsük a $\{0,1,2\}$ állapotterű,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot!
Mi az X_1 eloszlása, ha
$\mathbf{P}(X_0 = 0) = 0,7, \mathbf{P}(X_0 = 1) = 0,2, \mathbf{P}(X_0 = 2) = 0,1$?

Megoldás: $(0,7,\ 0,2,\ 0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,19,\ 0,3,\ 0,51)$.

6. Mi az n szabadságfokó χ^2-eloszlás definíciója?

Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek! Akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ eloszlását n szabadságfokú χ^2-eloszlásnak nevezzük.