Valószínűségszámítás gyak ív zh
2013. május 23.

Megoldás

1. Bizonyítsa be, hogy minden A, B, C esemény esetén $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(BC)$!
   Megoldás: Baloldal: $\mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}\left(AB\bar{C}\right) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}C\right) + \mathbf{P}(ABC)$
   Jobboldal: $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) + \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}\left(\bar{A}BC\right). = \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}\left(AB\bar{C}\right) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}C\right) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}\bar{C}\right) + \mathbf{P}(ABC) + \mathbf{P}\left(\bar{A}BC\right) = baloldal + \mathbf{P}\left(A\bar{B}\bar{C}\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}BC\right).$

2. A boltban árult izzók 2%-a hibás. Ha veszünk 50 darabot, akkor hány darab lesz benne rossz a legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?
   Megoldás: A hibás izzók száma:
   $X \in B\left(50, \frac{1}{50}\right).$
   $p_{\max} = \mathbf{P}\left(X = \left[51 \cdot \frac{1}{50}\right]\right) = \mathbf{P}(X = 1) = 50 \cdot \frac{1}{50} \cdot 0,98^{49} = 0,98^{49}.$

3. Legyen $X \in U(-1, 2)$ és $Y = X^3$. Adja meg Y eloszlásfüggvényét! Mennyi $\mathbf{E}Y$?
   Megoldás: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt[v]{t}\right) = \frac{\sqrt[3]{t}+1}{3}, t \in (-1, 8).$
   $$\mathbf{E}Y = \int\limits_{-1}^{2} x^3 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{12}\left[x^4\right]_{-1}^{2} = 0,8.$$

4. Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7},\ x \in [1, 2]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0, 1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!
   Megoldás: Az $f(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény: $F(x) = \int\limits_{1}^{x} \frac{3t^2}{7}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^3}{7} - \frac{1}{7}, x \in [1, 2].$ $F^{-1}(y) = \sqrt[3]{7y + 1}$ az inverze, ahol $y \in [0, 1].$
   Így $Y = F^{-1}(X) = \sqrt[3]{7X + 1}$ sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$ lesz.

5. Legyen $X \in N(0, 1)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 5\right) \leq 0,2$!
   Megoldás: A Markov-egyenlőtlenségből: $\mathbf{E}X^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X = 1,$
   $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 5\right) \leq \frac{1}{5}.$