Vizsgakérdések az elégségesért

Nguyen Xuan Ky, Serény György, Tóth János
BME TTK Algebra és Matematikai Analízis Tanszék

2006. december 15.

Kidolgozta: Zsidi Péter

2014. január 14.

1. Differenciálegyenletek

1-2. Mit nevezünk homogén/inhomogén lineáris differenciálegyenletnek?

Definíció: Ha a differenciálegyenletben nincs olyan tag, mely állandó, vagy amelyben nem szerepel az ismeretlen függvény és egyik deriváltja sem, akkor a differenciálegyenletet homogénnek mondjuk, ellenkező esetben pedig inhomogénnek.

3. Adja meg a lineáris differenciálegyenletek megoldásának általános alakját.

Definíció: Egy differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük azt a paramétereket tartalmazó függvényt, melyben a paraméterek megengedett megválasztásai esetén mindig a differenciálegyenlet megoldását kapjuk, és a paraméterek megfelelő választásával az összes reguláris (majdnem az összes) megoldás előáll. (A differenciálegyenlet úgynevezett szinguláris megoldásai nem állíthatók elő az általános megoldásból, de ezek a megoldások az alkalmazásokban nem fontosak.)

A megoldás általános alakja: $y = y(x, c)$ megoldáshalmaz.

4. Mit nevezünk szétválasztható változójú egyenletnek?

Definíció: Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = g(x)h(y)$ alakú, vagy algebrai átalakításokkal ilyen alakra hozható. Ezen általános alak azt jelenti, hogy az ismeretlen függvény deriváltja egy olyan szorzattal egyenlő, melynek egyik tényezője csak x-től, a másik pedig csak y-tól függ.

5. Mit nevezünk elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek?

Definíció: A differenciálegyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált rendszámát a differenciálegyenlet rendjének nevezzük.

Definíció: Lineárisnak nevezzük azokat a differenciálegyenleteket, melyekben az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványon fordulnak elő, és szorzatuk sem szerepel. Ellenkező esetben nemlineáris differenciálegyenletről beszélünk.

6. Az állandók variálásának módszere?

A partikuláris megoldás meghatározásának két módja van: az egyik az állandók variálásának módszere, a másik a határozatlan együtthatók módszere. Az előbbi módszer abból áll, hogy a kiszámított homogén általános megoldás $(y = y(x, c))$ konstans tagjait x függvényeként értelmezzük, („variáljuk"), és az így kiszámított függvényt visszahelyettesítve kapunk egy partikuláris megoldást.

7. Mit nevezünk kezdetiérték-problémának?

Definíció: Kezdeti érték feladatról akkor beszélünk, ha az n-edrendű differenciál-egyenlet megoldását olyan feltétellel keressük, hogy egy bizonyos helyen adott az ismeretlen függvény és deriváltjainak értéke, kivéve az n-edik deriváltat. Ilyenkor az általános megoldásban szereplő paraméterek értékét a plusz feltételekből meg lehet általában határozni, és egyértelmű megoldást kapunk, mely a differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása.

8. Mi az a karakterisztikus egyenlet?

Definíció: Az $y'' + py' + qy = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$ alakú differenciálegyenleteket másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenleteknek nevezzük. Ezek megoldását ugyanúgy $y = ce^{\lambda x}$ alakban keressük, mint ahogyan az elsőrendű egyenleteknél.

Vegyük ennek a függvénynek az első és második deriváltját:

$$y' = \lambda c e^{\lambda x},\ \ y'' = \lambda^2 c e^{\lambda x}$$

Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe:

$$\lambda^2 c e^{\lambda x} + p\lambda c e^{\lambda x} + qce^{\lambda x} = 0\ \ \rightarrow\ ce^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Ezt az egyenletet eloszthatjuk $ce^{\lambda x}$-szel, mert $e^{\lambda x}$ nem nulla, a $c = 0$ esetben pedig triviális megoldást kapunk, ezért feltesszük, hogy $c \neq 0$. Az így kapott $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ másodfokú egyenlet a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete.

9-11. Mi az állandó együtthatós homogén másodrendű differenciálegyenlet megoldása abban az esetben, ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van/egy kétszeres valós gyöke van/nincs valós gyöke?

Három esetet kell megkülönböztetni aszerint, hogy a másodfokú egyenletnek két különböző valós, egy kétszeres valós, vagy két komplex gyöke van:

1. Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke (λ_1, λ_2) van, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$
2. Ha a karakterisztikus egyenletnek egy kétszeres valós gyöke (λ) van, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$
3. Ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke $(\lambda_{1,2} = \mu \pm i\tau)$ van, akkor ezek konjugált párok és a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y = c_1 e^{\mu x} \cos \tau x + c_2 e^{\mu x} \sin \tau x$$

12. Számolja ki egy függvény deriváltjának Laplace-transzformáltját!

Ha $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

Elemi függvények Laplace-transzformáltjai és inverz transzformáltak: $(n \in \mathbb{N}; a, \omega \in \mathbb{R})$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
$\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$-t^n f(t)$
$F(s-a)$	$f(t)e^{at}$
$\frac{1}{a}F\left(\frac{1}{a}\right)$	$f(at)$

13. Mikor mondjuk, hogy az $\boldsymbol{F\big(x, y(x)\big) + y'(x)G\big(x, y(x)\big) = 0}$ differenciálegyenlet (másképp: az $\boldsymbol{F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0}$ differenciálegyenlet) egzakt?

Definíció: A $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenletet egzakt differenciálegyenletnek nevezzük, ha $\exists F(x, y)$, melynek teljes differenciálja a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad F_x = P, \quad F_y = Q$$

A differenciálegyenlet megoldása: $F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$

Tétel: Legyen P és Q folytonosan differenciálható az $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartományon és $Q \neq 0$. $\Rightarrow$

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ egzakt differenciálegyenlet} \Leftrightarrow \text{ha } P_y = Q_x$$

14. Mit nevezünk integráló tényezőnek?

Definíció: Tegyük fel, hogy a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet nem egzakt, azaz $P_y \neq Q_x$. Ekkor a folytonosan differenciálható $\mu(x, y)$ függvényt a differenciálegyenlet egy integráló tényezőjének, vagy más néven az Euler-féle multiplikátorának nevezzük, ha ezzel megszorozva a $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet már egzakt, azaz $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Két speciális esete:

I. y-tól független:

$$\mu(x, y) = \mu(x) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

II. x-től független:

$$\mu(x, y) = \mu(y) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

15-16. Mit az és hogyan adható meg egy elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer alaprendszere, ha a sajátértékek egyszeresek és valósak?

Definíció: A homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldásai vektorteret alkotnak. Ez azt jelenti, hogy két megoldás lineáris kombinációja szintén megoldás. Az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és az n egyenletből álló elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak vektortere n dimenziós. A megoldások vektorterének tetszőleges bázisát alaprendszernek nevezzük.

$$\Psi = [e^{\lambda_1 t}V^1 \quad \ldots \quad e^{\lambda_n t}V^n],$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ és $V^1, V^2 \ldots V^n$ a differenciálegyenlet együtthatómátrixának sajátértékei és az ezekhez tartozó sajátvektorai.

17. Oldja meg a következő egyenletet: $y(x) + y'(x)x = 0$.

$$y(x) + y'(x)x = 0$$
$$y + xy' = 0$$
$$xy' = -y$$
$$y' = -\frac{y}{x}$$
$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$
$$|y| = |x|^{-1}e^{C_0}$$
$$y = \frac{C_1}{x},\ \ C_1 > 0$$

2. Komplex függvénytan

1. Hogyan értelmezzük komplex függvény vonalintegrálját?

Definíció: Legyen L egy rektifikálható (mérhető ívhosszú) görbe a komplex síkon, $z_0, z_1 \dots z_n$ egy lehetséges felosztása, $U \subseteq \mathbb{C}, f: U \to \mathbb{C}$ komplex függvény folytonos L-en. ⇒

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i)(z_i - z_{i-1}) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma = \int_L f(z)dz,$$

ahol σ az integrálközelítő összeg, ρ_i $\widehat{z_{\imath-1}z_\imath}$ ív tetszőleges pontja.

2. Hogyan számítjuk ki komplex függvény vonalintegrálját?

Tétel: Legyen L egy rektifikálható görbe a komplex síkon α kezdő- és β végponttal, $H \subseteq \mathbb{R}, z: H \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható $[\alpha, \beta]$-n, $U \subseteq \mathbb{C}, f: U \to \mathbb{C}$ folytonos L-en. ⇒

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\dot{z}(t)dt.$$

3. Mit mondanak ki a Cauchy-Riemann egyenletek?

Definíció: Legyen $U \subseteq \mathbb{C}, f: U \to \mathbb{C}, f(z) = w = u + iv$. Ekkor a Cauchy-Riemann egyenletek:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Tétel: f komplex differenciálható $a_1 + ia_2 = a$ pontban, ha ott léteznek u, v-nek a parciális deriváltjai és azok kielégítik a Cauchy-Riemann egyenleteket.

Megjegyzés: f komplex differenciálható $H \subseteq \mathbb{C}$-n, ha minden pontjában differenciálható.

4. Mikor nevezünk egy komplex függvényt regulárisnak?

Definíció: $f(z)$ komplex függvény reguláris z_0-ban, ha $\exists\delta > 0$: $S_\delta(z_0)$-on $f(z)$ differenciálható.

Megfigyelés: $f(z)$ komplex függvény reguláris pontjai nyílt halmazt alkotnak.

5. Mikor nevezünk egy többváltozós függvényt harmonikusnak?

Definíció: $u(x,y)$ kétszer folytonosan differenciálható többváltozós függvényt harmonikusnak nevezünk, ha $\Delta u = 0$, ahol Δ a $Laplace$-operátor.

6-7. Mit nevezünk egy függvény harmonikus párjának és mikor létezik?

Definíció: Egy függvény harmonikus párja, vagy más néven harmonikus társa egy másik függvény, ha azt regulárissá teszi. Ez akkor létezik, ha az eredeti függvény harmonikus függvény.

8. Milyen tartományon értelmezhető reguláris logaritmusfüggvény?

Definíció: $w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w$

Következmény: $Do(\ln z) = \mathbb{C}\backslash\{Re\{z\} \leq 0\}$, ahol Do (domain) a függvény értelmezési tartománya.

9. Bizonyítsa be, hogy csak valós gyökei vannak a sin és a cos függvénynek.

Euler tétel: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Az Euler tételből definiálni tudjuk a $\sin z$ ill. a $\cos z$ komplex függvényeket.

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos z \triangleq \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z \triangleq \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

Továbbá tudjuk, hogy az e^z komplex függvény $2\pi i$ szerint periodikus, ezért az e^{iz} periódusa 2π. Ezek alkalmazásával:

$$\sin z = 0$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$
$$iz - (-iz) = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$
$$z = k\pi$$

$$\cos z = 0$$
$$e^{iz} + e^{-iz} = 0$$
$$e^{2iz} = -1$$
$$2iz = \mathrm{Ln}\,(-1)$$
$$2iz = \ln 1 + \pi i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$
$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\blacksquare$$

10. Hogyan értelmezzük a komplex kitevős hatványokat?

Definíció: $f(z)^{g(z)} = e^{g(z)\ln f(z)}$ („éadelen” ☺)

11-12. Melyek a ch és az sh függvény gyökei?

A definíciókból hasonló alakra juthatunk, mint az Euler tétel.

$$\begin{cases} \operatorname{ch} z \triangleq \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z \triangleq \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z \\ e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z \end{cases}$$

Továbbá tudjuk, hogy az e^z periódusa $2\pi i$. Ezek alkalmazásával:

$$\operatorname{sh} z = 0$$
$$e^z - e^{-z} = 0$$
$$z - (-z) = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$
$$z = k\pi i$$

$$\operatorname{ch} z = 0$$
$$e^z + e^{-z} = 0$$
$$e^{2z} = -1$$
$$2z = \operatorname{Ln}(-1)$$
$$2z = \ln 1 + \pi i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$
$$z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$$

13. Vonalintegrálokra vonatkozó Newton–Leibniz-tétel?

Tétel: Legyen $T \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $z_0, z_1, z_2 \in T, f\colon T \to \mathbb{C}$ reguláris T-n.⇒

$$\exists F(z)\colon F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau, \qquad F'(z) = f(z) \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

14-15. Mit mond ki a Cauchy-féle integrálformula és annak általánosítása?

Tétel: Legyen T ⊆ $\mathbb{C}$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $z_0 \in T, f\colon T\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ reguláris $T\setminus\{z_0\}$-on, C egy T-beli, pozitívan irányított Jordan-görbe (egyszerű (önmagát nem metsző), zárt görbe), ami a z_0 pontot a belsejében tartalmazza. ⇒

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Általánosan:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

16. Mit mond ki a Cauchy-féle integráltétel?

Tétel: Legyen T ⊆ $\mathbb{C}$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $f\colon T \to \mathbb{C}$ reguláris T-n, C egy T-beli, pozitívan irányított Jordan-görbe. ⇒

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

17. Mit nevezünk egy Laurent-sor fő részének?

Definíció: egy z_0-hoz tartozó Laurent-sor főrésze

$$\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n,$$

ahol $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, ahol C z_0-át pozitív irányban megkerülő Jordan-görbe.

18. Mit nevezünk izolált szingularitásnak?

Definíció: z_0 izolált szinguláris pontja $f(z)$-nek, ha $\exists\delta > 0$: $\dot{S}_\delta(z_0)$-on $f(z)$ reguláris.

19-24. Mikor nevezzük z_0-t megszüntethető szingularitásnak, n-edrendű pólusnak vagy lényeges szingularitásnak és hogyan látszik ez a hozzá tartozó Laurent-során?

Izolált szinguláris helyek osztályozása:

	z_0 pontbeli határérték	z_0 körüli Laurent-sor
1. megszüntethető szingularitás	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ véges	nincs főrésze
2. n-edrendű pólus	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ n az a legkisebb pozitív egész, amire $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ véges.	a főrész n tagból áll $\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \cdots \frac{c_{-2}}{(z-z_0)} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)}$
3. lényeges szingularitás	$\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	a főrész ∞ sok tagból áll

25. Mi az f függvény reziduuma a z_0 pontban és hogyan számítható ki a Laurent-sor együtthatóiból?

Definíció: A $0 < |z-z_0| < R$ tartományon érvényes $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ Laurent-sorban az $\frac{1}{(z-z_0)}$-hoz tartozó együttható c_{-1} kitüntetett jelentőségű, hiszen $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}$, (ahol C egy z_0-át pozitív irányba körüljáró Jordan-görbe). Ezt nevezzük $f(z)$ z_0-hoz tartozó lévő reziduumának.

26. Hogyan számítható ki a reziduum elsőrendű pólusban?

Definíció: Legyen $T \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $g, h: T \to \mathbb{C}$ reguláris T-n, $z_0 \in T$ olyan, hogy $h(z_0) = 0$ és $h'(z_0) \neq 0$.⇒

$$f(z) := \frac{g(z)}{h(z)} \Longrightarrow \operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Vagy másképp:

$$c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

27. Hogyan számítható ki a reziduum megszüntethető szingularitásban?

A megszüntethető szingularitás definíciójából adódóan, létezik a határértéke és véges, így itt a függvény regulárissá tehető, azaz a reziduuma 0.

28. Mit mond ki a reziduum-tétel?

Tétel: Legyen $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $f: T \to \mathbb{C}$ az $a_1, a_2 \dots a_n$ pontokat kivéve reguláris T-n, C egy T-beli, pozitívan irányított Jordan-görbe, ami nem halad át egy szingularitáson sem és mindet magában tartalmazza.⇒

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), a_k)$$

3. Vektoranalízis

1. A gradiens definíciója és kiszámításának módja?

Definíció: (A2) Legyen $u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ skalármező. Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}^m$ az u skalármezőnek gradiense r_0-ban, ha

$$\lim_{r \to r_0} \frac{u(r) - u(r_0) - a \cdot (r - r_0)}{\|r - r_0\|} = 0.$$

Ilyenkor u-t r_0-ban differenciálhatónak mondjuk, és az a vektort grad $u(r_0)$-lal vagy $\nabla u(r_0)$-lal jelöljük, ahol $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ a $nabla$ operátor.

$$\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$$

2. A rotáció definíciója és kiszámításának módja?

Definíció: Legyen $L_1, L_2 \dots L_n$ a P pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó, pozitívan irányított Jordan-görbék, az általuk bezárt térrész mérhető térfogatú és a sorozat tagjai a P pontra rázsugorodnak. Ezen azt kell értenünk, hogy az L_n görbék pontjainak P-től való távolsága zérushoz tart. Legyen a v vektormező folytonosan differenciálható a fent definiált $L_1, L_2 \dots L_n$ görbéken. Az $L_1, L_2 \dots L_n$ görbék által bezárt térrész felszínét $F_1, F_2 \dots F_n$-nel jelöljük. ⇒

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{F_n} \oint_{L_n} v dr = [\mathrm{rot}\, v(r)]_P,$$

ahol a sorozat határértékét a v vektormező P pontbeli rotációjának nevezzük.

Megjegyzés: A határérték elnevezését könnyen indokolhatjuk abban a speciális esetben, amikor v áramló összenyomhatatlan folyadék sebességi vektortere. Ekkor ugyanis az $\oint_{L_n} v dr$ a zárt görbével való együttmozgás mérőszámát adja meg, tehát az L_n belsejében az örvényerősséget méri. Ezt az L_n által bezárt térrész F_n felszínével osztva, az átlagos örvénysűrűséget (örvényerősűrűséget), az e hányados definícióban szereplő határértéke pedig a P pontbeli örvénysűrűséget méri. Ezek szerint $[\mathrm{rot}\, v(r)]_P$ a folyadék P pontbeli forgó, örvénylő jellegéről ad képet, ez indokolja a rotáció elnevezést.

Tétel: rot v a derivált operátor vektorinvariánsának kétszerese. A rotációt csak két-, ill. háromdimenziós térben definiáljuk:

Ha $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező és annak koordinátafüggvényei $v_1, v_2. \Rightarrow$

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Ha $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező és annak koordinátafüggvényei $v_1, v_2, v_3. \Rightarrow$

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \qquad \operatorname{rot} v = \nabla \times v$$

3. A divergencia definíciója és kiszámításának módja?

Definíció: Legyen $F_1, F_2 \dots F_n$ a P pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó zárt, mérhető és kifelé irányított felületek, az általuk bezárt térrész mérhető térfogatú és a sorozat tagjai a P pontra rázsugorodnak. Ezen azt kell értenünk, hogy az F_n felületek pontjainak P-től való távolsága zérushoz tart. Legyen a v vektormező folytonosan differenciálható a fent definiált $F_1, F_2 \dots F_n$ felületeken. Az $F_1, F_2 \dots F_n$ felületek által bezárt térrész térfogatát $V_1, V_2 \dots V_n$-nel jelöljük. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} \oint_{F_n} v df = [\operatorname{div} v(r)]_P,$$

ahol a sorozat határértékét a v vektormező P pontbeli divergenciájának nevezzük.

Megjegyzés: A határérték elnevezését könnyen indokolhatjuk abban a speciális esetben, amikor v áramló összenyomhatatlan folyadék sebességi vektortere. Ekkor ugyanis az $\oint_{F_n} v df$ az F_n felületen egységnyi idő alatt kilépő és belépő folyadéktérfogat különbségnek mérőszámát adja meg. Ez az érték akkor lesz zérustól eltérő, ha a zárt F_n felület belsejében források, ill. nyelők vannak. Az F_n felületre vonatkozó felületmenti integrál tehát F_n belsejében a forráserősséget méri. Ezt az F_n által bezárt térrész V_n térfogatával osztva, az átlagos forrássűrűséget (forráserősűrűséget), az e hányados definícióban szereplő határértéke pedig a P pontbeli forrássűrűséget méri. Ezek szerint $[\operatorname{div} v(r)]_P$ a folyadék P pontbeli szétáramlásáról ad képet, ez indokolja a divergencia elnevezést.

Tétel: div v a derivált operátor skalárinvariánsa. Ha $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező és annak koordinátafüggvényei $v_1, v_2 \dots v_n. \Rightarrow$

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \qquad \operatorname{div} v = \nabla \cdot v$$

4. A vonalintegrál definíciója és kiszámításának módja?

Definíció: Legyen L egy rektifikálható a tér A és B pontját összekötő görbe, amely a $v(r)$ vektormező értelmezési tartományán fut, $r_0, r_1 \dots r_n$ egy lehetséges felosztása. $\Rightarrow$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i)(r_i - r_{i-1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma = \int_L v dr,$$

ahol σ az integrálközelítő összeg, ρ_i $\widehat{r_{i-1}r_i}$ ív tetszőleges pontja.

Tétel: Ha az L görbe folytonosan differenciálható paraméteres egyenlete $r = r(t), t \in [\alpha, \beta]$, akkor a $v(r)$ vektormező L görbe mentén vett vonalintegrálja:

$$\int_L v(r)dr = \int_\alpha^\beta v\big(r(t)\big)\dot{r}(t)dt.$$

5. Hogyan számítjuk ki egy felület felszínét?

Definíció: Legyen $F \subset \mathbb{R}^m$ egy normál térrészt határoló valódi felület. $\Rightarrow$

$$|F| = \int_F 1|df|$$

6. Adja meg a (z tengelyű, R sugarú, h magasságú egyenes kör) henger paraméteres/explicit egyenletét!

$$r(u,v) = \begin{cases} \big((v+R)\cos u, (v+R)\sin u, 0\big), u \in [0,2\pi], v \in [-R,0]\ (alsó\ körlap) \\ (R\cos u, R\sin u, v), u \in [0,2\pi], v \in [0,h]\ (palást) \\ \big((v-h)\cos u, (v-h)\sin u, h\big), u \in [0,2\pi], v \in [h, h+R]\ (felső\ körlap) \end{cases}$$

7. Adja meg az (origó középpontú, R sugarú) gömb paraméteres/explicit egyenletét!

$$r(u,v) = R(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi]$$

8. Adja meg a csavarvonal paraméteres/explicit alakját!

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

9. Mit nevezünk egy görbe ívhossz szerinti paraméterezésének?

Definíció: Ha az egyszerű görbeív bármely két pontja közötti ív hossza éppen a paraméterek különbsége, akkor ívhossz szerinti paraméterezésről vagy más néven természetes paraméterezésről beszélünk.

Egy egyszerű görbe t_1 és t_2 paraméter pontjai közötti ívhosszon az $\int_{t_1}^{t_2}|\dot{r}(t)|dt$ mennyiséget értjük, ahol $r(t)$ a paraméterező függvény. Ebből kapható meg az ívhossz függvény:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{r}(\tau)|d\tau.$$

Állítás: Egyszerűen belátható, hogy az ívhossz független a paraméterezésről és hogy ez a hozzárendelés szig. mon. növő, tehát $1-1$ (egyértelmű), ezért $\exists s^{-1}: t(s)$.

r ívhossz szerinti paraméterezése: $\rho(s) = r(t(s))$

Megfigyelés: $|\dot{\rho}(s)|$=1.

10. Mit nevezünk tenzornak/lineáris operátornak?

Definíció: A homogén, lineáris vektor-vetorfüggvényeket tenzornak nevezzük.

11. Mit nevezünk egy tenzor/lineáris operátor skalárinvariánsának?

Definíció: $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció skalárinvariánsa az A főátlójának összege.

Állítás: A skalárinvariáns bázisfüggetlen.

12. Mit nevezünk egy tenzor/lineáris operátor vektorinvariánsának?

Definíció: A lineáris transzformáció vektorinvariánsa az az egyetlen $c \in \mathbb{R}^3$ (vagy $c \in \mathbb{R}^2$) vektor, amire $Ar = c \times r$ (vagy $Ar = c \cdot \text{CROSS}(r)$).

13. Mit nevezünk egy vektormező/vektor-vektor függvény skalárpotenciáljának?

Definíció: Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $v: G \to \mathbb{R}^n$ vektormező skalárpotenciálja $u: G \to \mathbb{R}$ skalármező, ha grad $u = v$.

14. Adjon meg szükséges és elégséges feltételeket arra, hogy egy vektormezőnek/vektor-vektor függvénynek legyen skalárpotenciálja!

Tétel: Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $v: T \to \mathbb{R}^2$ folytonos $\Rightarrow$ az alábbiak ekvivalensek:

1. v-nek $\exists$ skalárpotenciálja G-n.
2. $\int_L v dr = u(q) - u(p)$, ahol L G-beli rektifikálható p kezdő- és q végpontú görbe és u v egy skalárpotenciálja.
3. $\oint_L v dr = 0$, ahol L G-beli Jordan-görbe.
4. ha v folytonosan differenciálható $\Rightarrow$ rot $v = 0$.

Következmény:

1. v egy tetszőleges G-beli rögzített kezdőpontú görbére vett vonalintegrál.
2. v skalárpotenciáljai csak konstansban térnek el egymástól.

Állítás: a skalárpotenciál létezéséhez nem elég a folytonosság és rot $v = 0$.

15. Hogyan határozzuk meg egy vektormező/vektor-vektor függvény skalárpotenciálját?

Tétel: Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $v: T \to \mathbb{R}^2$ vektormező folytonosan differenciálható T-n, $u: T \to \mathbb{R}$ skalármező. $\Rightarrow$

$$\exists u: \text{grad } u = v \Leftrightarrow \text{rot } v = 0$$

A skalárpotenciál keresés módszere hasonló elveken alapszik, mint az egzakt differenciálegyenlet megoldása: ugyanazoknak a feltételeknek kell teljesülniük a létezésükhöz és a megoldás menete is megegyezik. Egy lehetséges meghatározása nagyvonalakban, ha $v(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ alakú:

$$u = \int f dx = F + h(y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\big(F + h(y)\big) = F_y + h'(y) = g \Rightarrow h'(y) = g - F_y \Rightarrow$$

$$\Uparrow$$

$$h(y) = \int h'(y) dy$$

16. Mit nevezünk egy vektormező/vektor-vektor függvény vektorpotenciáljának?

Definíció: Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $v: G \to \mathbb{R}^n$ vektormező vektorpotenciálja $w: G \to \mathbb{R}^n$ vektormező, ha $\operatorname{rot} w = v$.

17. Mi jellemzi a potenciálos erőtereket?

Tétel: Ha v vektormező egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett differenciálható függvény, amire $\operatorname{rot} v = 0$, akkor bármely zárt Jordan-görbén $\oint v dr = 0$.

Tétel: Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány, $v: T \to \mathbb{R}^2$ vektormező folytonosan differenciálható T-n, L T-beli Jordan-görbe, $u: T \to \mathbb{R}$ skalármező ⇒ az alábbiak ekvivalensek:

1. $\operatorname{rot} v = 0$ (örvénymentes)
2. $\oint_L v dr = 0$ (konzervatív)
3. $\exists u$: $\operatorname{grad} u = v$ (potenciálos)

18. Mit nevezünk nyílt, egyszeresen összefüggő tartománynak?

Definíció: $T \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány, ha bármely önmagát nem metsző, zárt görbe belseje is hozzátartozik T-hez.

Definíció: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, ha $(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0: S_\varepsilon(x) \subseteq U)$, vagy máshogy fogalmazva, ha nem tartalmazza a határpontjait, vagyis megegyezik a belső pontjainak halmazával.

19. Mit nevezünk fluxusnak?

Definíció: A fluxus általában egy adott F felületen átáramló anyagmennyiségét jelenti. Ha az áramlást a v vektormező jellemzi ⇒

$$\Phi = \int_F v df$$

integrált a v fluxusának hívjuk.

20. Mit mond ki a Gauss–Osztrogradszkij-tétel?

Tétel: Legyen V egyszeresen összefüggő, normál térrésznek F kifelé irányított határa és v folytonosan differenciálható V-n.⇒

$$\oint_F v df = \int_V \operatorname{div} v dV$$

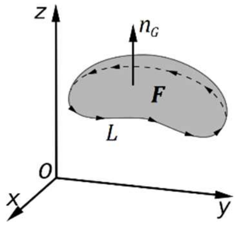
21. Mit mond ki a Green-tétel?

Tétel: Legyen $F \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő normál térrész, melynek határa L pozitívan irányított Jordan-görbe és $v: H \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható H-n. ⇒

$$\oint_L v dr = \int_F \operatorname{rot} v df$$

22. Mit mond ki a Stokes-tétel?

Tétel: Legyen $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^3$ egyszeresen összefüggő, normál térrész, melynek határa felosztható az F kifelé irányított valódi felületre („harangtestre") és a kifelé irányított $-G$ normál síkfelületre. Legyen G határa L pozitívan irányított Jordan-görbe és $v: H \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható H-n. ⇒



$$\oint_L v dr = \int_F \operatorname{rot} v df$$

Megjegyzés: A Green-tétel általánosítása.

23. Mi jellemzi az örvénymentes vektormezőket/vektor-vektor függvényeket?

Lásd potenciálos erőterek.

Elég velős, könnyen megjegyezhető, általános összefoglalása a 20-22-es kérdéseknek:

Integráltranszformációs (-redukciós) tételek

Alapséma: Newton–Leibniz-formula. Adott M sokaság és a sokaság ∂M pereme. A $v: M \to M$ folytonosan differenciálható vektormező. ⇒

$$\boxed{\int_M \partial v = \int_{\partial M} v}$$

Azaz v derivált integrálja, egyenlő az integráljával a peremen. A kérdés, hogy mi a derivált:

- Gradiens tétel, ha M görbe, akkor ∂M két pont és $\partial u = \operatorname{grad} u$ ⇒
$$\int_p^q \operatorname{grad} u = u(q) - u(p)$$
- Stokes-tétel, ha M felület, akkor ∂M görbe és $\partial v = \operatorname{rot} v$ ⇒
$$\int_M \operatorname{rot} v df = \oint_{\partial M} v dr$$
- Gauss–Osztrogradszkij-tétel, ha M térrész, akkor ∂M felület és $\partial v = \operatorname{div} v$ ⇒
$$\int_M \operatorname{div} v dV = \oint_{\partial M} v df$$

Bevallom, a gradiens tétel kicsit kilóg a sorból, de nagyon szemléletes az egész együtt, ezért is gondoltam, hogy hasznos lehet. Ami még bonyolít a dolgokon, hogy a Stokes- és a Gauss-tételnek is van síkbeli megfelelője (az egyik ilyen a Green-tétel), de ez már nem ide tartozik.