2. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

MATEMATIKA A2 — 2018. május 7.
VILLAMOSMÉRNÖK HALLGATÓKNAK — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név: **Gyakvez.:**

Neptun kód: ☐☐☐☐☐☐ **Gyak. kurzuskód:** ☐

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$	1_I	2_I	$\sum_I$

1. **(20 pont)**
Írja fel az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, mely az $\mathbb{R}^3$ tér minden helyvektorát tükrözi a $2x + y + z = 0$ síkra, majd kétszeresére nyújtja. Adja meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

2. **(15 pont)**
Adja meg $\mathbf{A}^{100}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ahol
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. **(10+10+5 pont)**
Tekintsük a következő függvényt!
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Hol folytonos az f függvény?
   (b) Adja meg a parciális deriváltakat, mindenütt, ahol léteznek!
   (c) Hol deriválható az f függvény? Adja meg a deriváltat, ahol deriválható!

4. **(10 +10 pont)**

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y, \quad P_0(2,0)$$

(a) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

(b) Adja meg P_0-ban az iránymenti deriváltat az $x + 3y = 5$ egyenes irányvektora irányában!

5. **(20 pont)**
A $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$ csúcspontokkal megadott háromszöglap mely pontjaiban a legnagyobb, illetve legkisebb a csúcsoktól mért távolságok négyzetösszege?

IMSc példák

1. **(15 pont)**
Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítsa be, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adja meg $\mathbf{A}^n$ sajátvektorait minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

2. **(15 pont)**
Igazoljuk, hogy az $xyz = a^3$ $(a > 0)$ felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatú tetraédereket határolnak!