Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat

Műszaki informatika szak

2010. november 8.

Megoldások

1. (1. csoport)

   Jelölje Y a dobássorozat hosszát, azaz $Y = i$, ha az $i-1$-edik és az i-edik dobás 6-os és korábban nem volt egymásután két 6-os.

   Ahhoz, hogy $X = 3$ legyen legalább 4 dobás kellett (első 6-os után kell egy nem 6-os dobás), az első 6-os $i-3$ helyen lehet a sorban (az utolsó 3 dobást kivéve bármelyik lehetett).

   $\mathbf{P}(X = 3) = \sum_{i=4}^{\infty} \mathbf{P}(X = 3, Y = i) = \sum_{i=4}^{\infty}(i-3)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-4}\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}\sum_{i=4}^{\infty}(i-3)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-4}$

   $\sum_{i=4}^{\infty}(i-3)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-4} = \sum_{j=1}^{\infty} j\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} = 6$, mert ez éppen a $G(\frac{1}{6})$ várható értéke.

   Tehát $\mathbf{P}(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}6 = \frac{5}{36}$.

   (2. csoport)

   ugyanaz, mint 1. csoport, csak 6-os helyett 1-essel.

   $\mathbf{P}(X \neq 3) = 1 - \mathbf{P}(X = 3) = \frac{31}{36}$

2. (1. csoport)

   $\mathbf{P}\left(\bar{A} + B + C\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}\right) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) - \mathbf{P}\left(\bar{A}C\right) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}\left(\bar{A}BC\right) =$

   függetlenség miatt $\mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}\right)\mathbf{P}(B)$

   $BC = \emptyset$, mert kizáróak, $\bar{A}C = C$, mivel $AC = \emptyset$, mert kizáróak.

   Tehát $= \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{5} = 0,8$

   (másképp: A és C kizáró, tehát $AC = \emptyset$, ezért C maga után vonja $\bar{A}$-t, így $\bar{A} + C = \bar{A}$, tehát $\bar{A} + B + C = \bar{A} + B$ ...)

   (2. csoport)

   A és C kizáró, tehát $AC = \emptyset$, ezért A maga után vonja $\bar{C}$-t, így $A + \bar{C} = \bar{C}$,

   $\mathbf{P}\left(A + \bar{B} + \bar{C}\right) = \mathbf{P}\left(\bar{B} + \bar{C}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{BC}\right) = 1 - \mathbf{P}(BC) = 1.$

3. (1. csoport)

   Legyen X a minimum. $\mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^3$

   Eloszlástáblázat:

1	2	3	4	5	6
$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$

$\mathbf{E}X = \frac{91+122+111+76+35+6}{216} = \frac{441}{216}, \mathbf{E}X^2 = \frac{91+244+333+304+175+36}{216} = \frac{1183}{216},$

$\sigma^2 X = mathbfEX^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{61047}{46656}, \sigma X \approx 1,308$

(2. csoport)

Legyen X a maximum. $\mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3$

Eloszlástáblázat:

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$

$\mathbf{E}X = \frac{1+14+57+148+305+546}{216} = \frac{1071}{216},$

$\mathbf{E}X^2 = \frac{1+28+171+592+1525+3276}{216} = \frac{5593}{216},$

$\sigma^2 X = mathbfEX^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{61047}{46656}, \sigma X \approx 1,308$

(Megjegyzés: A minimum és a maximum szórása megegyezik!)

4. (1. csoport)

$1 = a\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x^2 + 3xy + 2y^2 dxdy = a\int\limits_0^1 \frac{1}{3} + \frac{3}{2}y + 2y^2 dy = a \cdot \frac{21}{12}$

$a = \frac{12}{21}$

$f_X(x) = a\int\limits_0^1 x^2 + 3xy + 2y^2 dy = a\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\right), x \in (0,1)$

$f_Y(y) = a\int\limits_0^1 x^2 + 3xy + 2y^2 dx = a\left(2y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{3}\right), y \in (0,1)$

Mivel $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y) \Longrightarrow$ nem függetlenek!

(2. csoport)

$1 = a\int\limits_0^1\int\limits_0^1 2x^2 + xy + y^2 dxdy = a\int\limits_0^1 \frac{2}{3} + \frac{1}{2}y + y^2 dy = a \cdot \frac{15}{12}$

$a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$

$f_X(x) = a\int\limits_0^1 2x^2 + xy + y^2 dy = a\left(2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right), x \in (0,1)$

$f_Y(y) = a\int\limits_0^1 2x^2 + xy + y^2 dx = a\left(y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}\right), y \in (0,1)$

Mivel $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y) \Longrightarrow$ nem függetlenek!

5. (1. csoport)

$R(U,V) = \frac{cov(U,V)}{\sigma U \sigma V}$

$cov(U,V) = cov(2X+3Y, X-4Y) = 2cov(X,X) - 8cov(X,Y) - 12cov(Y,Y) + 3cov(Y,X) = 2\sigma^2 X - 12\sigma^2 Y = \frac{1}{2} - 12 \cdot 9 = -107,5$

Mivel X és Y függetlenek, tehát $cov(X,Y) = 0$

$\sigma U = \sqrt{4\sigma^2 X + 9\sigma^2 Y} = \sqrt{82}, \sigma V = \sqrt{\sigma^2 X + 16\sigma^2 Y} = \sqrt{144,25}$

$R(U,V) = \frac{-107,5}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{144,25}} \approx -0,988$

$f_{X,Y}(u,v) = f_X(u) \cdot f_Y(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3} \cdot e^{-\frac{(v-2)^2}{18}} \cdot 2e^{-2u}, v \in \mathbb{R}, u > 0.$

(2. csoport)

$R(U,V) = \frac{cov(U,V)}{\sigma U \sigma V}$

$cov(U,V) = cov(2X{+}3Y, X{-}4Y) = 2cov(X,X){-}8cov(X,Y){-}12cov(Y,Y){+}3cov(Y,X) = 2\sigma^2 X - 12\sigma^2 Y = 18 - 12 = 6$

Mivel X és Y függetlenek, tehát $cov(X,Y) = 0$

$\sigma U{=}\sqrt{4\sigma^2 X + 9\sigma^2 Y} = \sqrt{45}, \sigma V = \sqrt{\sigma^2 X + 16\sigma^2 Y} = 5$

$R(U,V) = \frac{6}{\sqrt{45} \cdot 5} \approx 0,179$

$f_{X,Y}(u,v) = f_X(u) \cdot f_Y(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{(u+1)^2}{18}} \cdot e^{-v}, u \in \mathbb{R}, v > 0.$