# A1X 2. vizsgazh (2008 tavasz)

1. Adja meg a $(3, 5, -2)$ pontnak a $(1, 0, -2)$, $(2, -2, -5)$ és $(-1, 3, 2)$ pontok által meghatározott síkra vetett merőleges vetületét.

2. Adja meg a $\bar{z} = z^2$ egyenlet komplex megoldásait algebrai alakban.

3. $\lim \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = ?$

4. Hol deriválható (és ott mennyi a deriváltja) az $f(x) = |x| \sin(1/x)$ (ha $x \neq 0$), $f(0) = 0$ függvénynek?

5. $\int_0^{\pi/2} x \sin(2x - \pi/2)\, dx = ?$

6. Legyen $a$, $b \in \mathbb{R}$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (a) Minden $[a, b]$-n értelmezett függvény korlátos. (b) Ha $f$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, akkor nem korlátos. (c) Ha $f$ $[a, b]$-n értelmezett, $f(a) < 0 < f(b)$, akkor $f$ felveszi 0-t $[a, b]$-n. (d) Ha $f$ folytonos $[a, b]$-n, akkor egyenletesen folytonos $(a, b)$-n.

1. Adja meg a $(3,5,-2)$ pontnak a $(1,0,-2)$, $(2,-2,-5)$ és $(-1,3,2)$ pontok által meghatározott síkra vetett merőleges vetületét.

M.o.: Sík egyenlete: $x+2y-z=3$; vetítendő ponton átmenő, a síkra merőleges egyenes egyenlete: $\begin{cases} x=3+t \\ y=5+2t \\ z=-2-t \end{cases}$. Sík és egyenes metszéspontja ($t=-2$-nél): $(1,1,0)$.

2. Adja meg a $\bar{z}=z^2$ egyenlet komplex megoldásait algebrai alakban.

M.o.: ($z=0$ m.o., mostantól feltesszük, hogy $z\neq 0$.) $\bar{z}=z^2 \iff |z|^2 = z\bar{z}=z^3$, tehát $z^3$ pozitív valós, és ezért $|z|^2=z^3=|z^3|=|z|^3 \implies |z|=1$. Vagyis a nem-0 megoldások a $z^3=1$ megoldásai: $e^{2k\pi j/3}$, $k=0,1,2$, azaz $z_0=1$, $z_1=\cos\frac{2}{3}\pi+j\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$, $z_2=\cos\frac{4}{3}\pi+j\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$

3. $\lim \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=?$

M.o:

$$\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}}{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = -4\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to -4$$

4. Hol deriválható (és ott mennyi a deriváltja) az $f(x)=|x|\sin(1/x)$ (ha $x\neq 0$), $f(0)=0$ függvénynek?

M.o.: $f(x)=\begin{cases} |x|\sin(1/x) & \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{ha } x=0 \end{cases}$ az origón kívül mindenütt deriválható és

$$f'(x)=\sin(1/x)+x\cos(1/x)\cdot\frac{-1}{x^2}=\sin(1/x)-\frac{1}{x}\cos(1/x)$$

ha $x>0$ és, mivel $f$ páratlan,

$$f'(x)=\sin(1/-x)-\frac{1}{-x}\cos(1/-x)=-\sin(1/x)+\frac{1}{x}\cos(1/x)$$

ha $x<0$.

Az origóban nem, mert $\lim_{+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{+0}\sin(1/x)$ nem létezik (pl. átviteli elvvel)

5. $\int_0^{\pi/2} x\sin(2x-\pi/2)\,dx=?$

M.o.:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(2x-\pi/2)\,dx = \left[x\cdot -\frac{1}{2}\cos(2x-\pi/2)\right]_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x-\pi/2)\,dx$$
$$=0+\frac{1}{4}\left[\sin(2x-\pi/2)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$$

6. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (a) Minden $[a,b]$-n értelmezett függvény korlátos. (b) Ha $f$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, akkor nem korlátos. (c) Ha $f$ $[a,b]$-n értelmezett, $f(a)<0<f(b)$, akkor $f$ felveszi 0-t $[a,b]$-n. (d) Ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor egyenletesen folytonos $(a,b)$-n.

M.o.: (a) hamis (pl. $f(0)=0$, amúgy $f(x)=1/x$ $[0,1]$-en) (b) hamis (pl. arctan) (c) hamis (pl. $\frac{1}{2}+\mathrm{sgn}$) (d) igaz: Heine $[a,b]$-re alkalmazva.