2. Zárthelyi 2010 tavasz A2

Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$ minden sajátértéke pozitív!

2. Hol folytonosak az alábbi függvények ha $f(0,0) = g(0,0) = 0$ és az origón kívül

$$\text{(a)}\quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{(b)}\quad g(x,y) = \frac{x^2+x^2y^2}{x^2+y^4}$$

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^3+y^3}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ és $g(x,y) = (x+y)e^{x+y}$ az egész síkon. Határozza meg az f és g függvények $e = (1,0)$ irányú iránymenti deriváltját az origóban és a $P = (1,1)$ pontban, amennyiben ezek léteznek!

4. Legyen H_1 és H_2 két háromszög a síkban, H_1 csúcsai a $(0,0), (0,1), (-1,0)$ pontok, míg H_2 csúcsai az $(0,1), (1,2), (0,3)$ pontok. Számítsa ki az $f(x,y) = 4xy$ területi integrálját a $T = H_1 \cup H_2$ tartományon!

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{5n}\right)^{n^2} \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n}$$

6.

(a) Melyik állítás igaz és melyik nem?

$$\text{(a1)} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dydx = 0 \qquad \text{(a2)} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dydx = 0$$

$$\text{(a3)} \int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx = -1 \qquad \text{(a4)} \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dydx = 0$$

(b) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(b1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is

(b2) Ha tagjai monoton nőnek, akkor konvergens

(b3) Ha konvergens, akkor a tagjai 0-hoz tartanak.

(b4) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.

2. Zárthelyi megoldásokkal 2010 tavasz A2 Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre az $\underline{\underline{A}}^n$ minden sajátértéke pozitív!

MO. $\underline{\underline{A}}$ sajártékeinek meghatározása:

$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2) - 15 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = -1, 7$ a sajátértékek. **5p**

Ebből $\underline{\underline{A}}^n$ sajártékei: $\lambda_{1,2} = (-1)^n, 7^n$ **4p**

azaz pontosan a páros n-ekre áll fenn, hogy mindkét sajárték pozitív. **1p**

10p

2. Hol folytonosak az alábbi függvények ha $f(0,0) = g(0,0) = 0$ és az origón kívül

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ (b) $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^4}$

MO. Mindkét esetben mindenütt, mert az origó kivételével koordináta–függvényekből (melyek folytonosak) folytonosságot megőrző módon vannak összerakva. **2p**

Az origóban pedig

$0 \le f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \dfrac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$ **5p**

így $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^4} = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \cdot \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2} = f(x,y) \cdot \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ **3p**

mert persze $\dfrac{\ln(1+z)}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} 1$ miatt $\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1.$

10p

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^3+y^3}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ és $g(x,y) = (x+y)e^{x+y}$ az egész síkon. Határozza meg az f és g függvények $e = (1,0)$ irányú iránymenti deriváltját az origóban és a $P = (1,1)$ pontban, amennyiben ezek léteznek!

MO. Az adott iránymenti derivált az x szerinti parciális derivált. **2p**

Mind a négy parciális létezik:

$f(x,0) = x \rightsquigarrow f_x(0,0) = 1$ **3p**

$f_x(x,y) = \dfrac{x^3(x^3+4y^3)}{(x^3+y^3)^2} \rightsquigarrow f_x(1,1) = \frac{5}{4}.$ **3p**

$g_x(x,y) = e^{x+y} + (x+y)e^{x+y} \rightsquigarrow g_x(0,0) = e^0 = 1$ **1p**

$g_x(1,1) = e^2 + 2e^2 = 3e^2$ **1p**

10p

4. Legyen H_1 és H_2 két háromszög a síkban, H_1 csúcsai a $(0,0), (0,1), (-1,0)$ pontok, míg H_2 csúcsai az $(0,1), (1,2), (0,3)$ pontok. Számítsa ki az $f(x,y) = 4xy$ területi integrálját a $T = H_1 \cup H_2$ tartományon.

MO. $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x+1,\ -1 \le x \le 0\}$, $H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+1 \le y \le -x+3,\ 0 \le x \le 1\}$ **3p**

$\displaystyle\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} 4xy\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x+1}^{-x+3} 4xy\,dy\,dx =$ **4p**

$= -\dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{5}{2}$ **3p**

10p

Folytatás a következő oldalon.

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{5n}\right)^{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n}$

MO.

(a) Konvergens. Pl. Gyökrritériummal: $\frac{1+2n}{5n}\longrightarrow\frac{2}{5}<1$ 2p

(b) Konvergens. Pl. Gyökrritériummal: $\frac{1+2n}{5n}\longrightarrow\frac{2}{5}\rightsquigarrow 0<\left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n\longrightarrow 0$ 3p

(ahol persze az utolsó becslés elegendően nagy n-ekre vonatkozik.)

(c) Divergens. $\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n}\sim\frac{1}{n}$ mert $(1+\frac{2}{n})^n\longrightarrow e^2$ 3p

(d) Divergens. $\frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n}>\frac{5^n}{n}\longrightarrow\infty$ 2p

10p

6.

(a) Melyik állítás igaz és melyik nem?

(a1) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dydx=0$

(a2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dydx=0$

(a3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx=-1$

(a4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dydx=0$

(b) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(b1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is
(b2) Ha tagjai monoton nőnek, akkor konvergens
(b3) Ha konvergens, akkor a tagjai 0-hoz tartanak.
(b3) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.

MO.

(a)

(a1) Igaz: az integrandus páratlan az y tengelyre nézve szimmetrikus tartományon. 2p
(a2) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével egész tartományon pozitív. 1p
(a3) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével egész tartományon pozitív. 1p
(a4) Nem igaz: az integrandus a tengelyek kivételével egész tartományon pozitív. 1p

(b)

(b1) Igaz: $|\sum a_n|\le\sum|a_n|$ és Cauchy-kritérium 2p
(b2) Nem igaz: $\sum n$ nyilván divergens 1p
(b3) Igaz: Cauchy-kritérium $m=n+1$-re 1p
(b4) Nem igaz: $\sum 1/n$ divergens pl. integrálkritériummal 1p

10p