ANALÍZIS 1. | **III. VIZSGA** | **2016. január 18.**
Mérnök informatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (4+5 pont) Adja meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

$$a)\ (1-i)^{14} \qquad b)\ \sqrt{-1+\sqrt{3}i}$$

---

a) $-1+i \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$, vagyis

$$\begin{aligned}(1-i)^{14} \quad &\overset{\mathbf{1p}}{=} (\sqrt{2})^{14}\left(\cos\left(\frac{98\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{98\pi}{4}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \\ &= 2^7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} 128i\end{aligned}$$

b) $-1+\sqrt{3}i \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, vagyis

$$\sqrt{-1+\sqrt{3}i} \overset{\mathbf{2p}}{=} \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)$$

---

2. feladat (10+6 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a rendőrelvet!

b) Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+4n+5}{3n^2+11}}$$

sorozat határértékét.

---

a) Ha létezik N, hogy $b_n \leq a_n \leq c_n$ minden $n \geq N$ esetén, és $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, mert minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik N_1, hogy $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq A - \varepsilon$, és létezik N_2, hogy $n \geq N_2$ esetén $c_n \leq A + \varepsilon$, vagyis $n \geq \max(N, N_1, N_2) = N(\varepsilon)$ esetén

$$A - \varepsilon \leq b_n \leq a_n \leq c_n \leq A + \varepsilon,$$

vagyis $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

b)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{14}}\sqrt[n]{n} \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3n^2 + 11n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{\leq} a_n \overset{\mathbf{1p}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^3 + 4n^3 + 5n^3}{3n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{10}{3}}\sqrt[n]{n},$$

ahol mindkét oldal 1-hez tart (**1p**), így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (**1p**).

---

3. feladat (10 pont)
Legyen $a_1 = 4$, és

$$a_{n+1} = 10 - \frac{36}{3 + a_n}.$$

a) Mutassa meg, hogy $1 \leq a_n \leq 6$.

b) Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Teljes indukcióval igazoljuk.

i) $1 \leq a_1 = 3 \leq 6$. (**1p**)

ii) $1 \leq a_n \leq 6 \Longrightarrow 9 \geq \dfrac{36}{3 + a_n} \geq 4 \Longrightarrow 1 \leq 10 - \dfrac{36}{3 + a_n} = a_{n+1} \leq 6$. (**2p**)

b) $a_2 = \frac{34}{7} \geq 4 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton növő. Teljes indukcióval igazoljuk.

i) $a_1 \leq a_2$. (**1p**)

ii) $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{36}{3+a_n} \geq \frac{36}{3+a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} = 10 - \frac{36}{3+a_n} \leq 10 - \frac{36}{3+a_{n+1}} = a_{n+2}$. (**2p**)

A sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens (**1p**). Határértékére kielégíti az $A = 10 - \frac{36}{3+A}$ egyenletet, vagyis $A^2 - 7A + 6 = 0$ (**1p**), tehát $A = 1$ vagy $A = 6$ (**1**), így a monoton növekedés miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$ (**1p**).

---

4. feladat (4+8 pont)

a) Írja fel a definícióját annak, hogy

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty.$$

b) Osztályozza az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2}, & \text{ha } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\sin 3x}{4x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit.

---

a) Minden $P > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ esetén $f(x) > M$ (**4p**)

b) Szakadási helyek: $x = 0$ és $x = -1$ (**1p**).

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{4}, \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{1-x^2} = 0, \qquad \textbf{(1p)}$$

vagyis az $x = 0$ pontban a függvénynek véges ugrása van (**1p**).

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{x}{1-x^2} = \mp\infty \qquad \textbf{(2p)}$$

vagyis az $x = -1$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van (**1p**).

5. feladat (3+7 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right).$$

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}\overset{\mathbf{1p}}{=}0\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{3x}-1}$, tehát $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}0.$

b) $\infty-\infty$ típusú határérték (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{3x(e^{3x}-1)}=$$
$$\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{3(e^{3x}-1)+9xe^{3x}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{18e^{3x}+27xe^{3x}}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{1}{2}$$

6. feladat (8 pont) Hol konvex, illetve konkáv az $f(x)=\ln(x^2-5x+10)$ függvény? Hol van inflexiós pontja?

$D_f\overset{\mathbf{1p}}{=}\mathbb{R}$, és

$$f'(x)\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{2x-5}{x^2-5x+10},$$
$$f''(x)\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{2(x^2-5x+10)-(2x-5)^2}{(x^2-5x+10)^2}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{-2x^2+10x-5}{(x^2-5x+15)^2}$$

$f''(x)=0$, ha $x=\frac{5\pm\sqrt{15}}{2}$ (**1p**), vagyis f konvex az $\left[\frac{5-\sqrt{15}}{2},\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right]$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{15}}{2}\right]$ valamint a $\left[\frac{5+\sqrt{15}}{2},\infty\right)$ intervallumon, továbbá az $x=\frac{5\pm\sqrt{15}}{2}$ helyeken van inflexiós pontja (**2p**).

7. feladat* **(7+4 pont)** Számolja ki az alábbi integrálokat

$$a)\quad \int x \operatorname{arctg} x dx, \qquad\qquad b)\quad \int_{-\sqrt{3}}^{1} |x \operatorname{arctg} x| dx.$$

---

a) Parciális integrálással $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ választással (**2p**)

$$\int x \operatorname{arctg} x dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

b) $x \operatorname{arctg} x \geq 0$ (**1p**), tehát

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} |x \operatorname{arctg} x| dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) \right]_{-\sqrt{3}}^{1} =$$

$$\overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

---

8 feladat* **(10 pont)**
Megfelelő helyettesítéssel határozza meg az alábbi integrált:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}+3} dx.$$

Használva a $t = \sqrt{x-1}$ helyettesítést (**1p**) $x = t^2 + 1$, tehát

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x-1}+3} dx &\overset{\mathbf{3p}}{=} \int \frac{2t(t^2+1)}{t+3} dt = \\
&\overset{\mathbf{2p}}{=} 2 \int \frac{t^2(t+3) - 3t(t+3) + 10(t+3) - 33}{t+3} dt = \\
&\overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{2}{3} t^3 - 3t^2 + 20t - 60 \ln|t+3| + c = \\
&\overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 - 3(x-1) + 20\sqrt{x-1} - 60 \ln|\sqrt{x-1}+3| + c
\end{aligned}$$

9 feladat* (6+8 pont)

a) Ismertesse az integrálszámítás második alaptételét.

b) Adja meg a

$$G(x) = \int_{4x^2}^{5x^4} e^{3t^3} dt$$

függvény deriváltját, ha létezik.

---

a) Ha $f \in \mathcal{R}[a,b]$, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon (**3p**). Ha f folytonos, akkor F differenciálható, és $F'(x) = f(x)$ (**3p**).

b) Legyen $F(x) = \int_0^x e^{3t^3} dt$, ekkor $F'(x) = e^{3x^3}$ (**2p**) és $G(x) = F(5x^4) - F(4x^2)$ (**3p**), vagyis $G'(x) = 20x^3 e^{375x^{12}} - 8xe^{192x^6}$ (**3p**).