

Algoritmusok és gráfok - Vizsga  
2019. január 9.

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejteni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

1. Az alábbi pszeudokódban egy \* kiírása számít egy lépésnek. Mutassa meg, hogy a pszeudokód által megadott algoritmus lépésszáma  $O(n^3)$ .  
for i = 1 to n-1:  
  for j = i+1 to n:  
    kiírunk j darab \*-ot
2. Írja le az órán tanult eljárást, amivel egy bináris keresőfában meg tudjuk találni a legkisebb tárolt elemet. Magyarázza el, hogy miért helyes ez az eljárás és mutassa meg, hogy a lépésszáma  $O(h)$ , ahol  $h$  jelöli a fa szintjeinek számát.
3. Mutasson példát olyan 5 csúcsú irányítatlan, összefüggő, egyszerű  $G$  gráfra és a gráfban a Prim algoritmus egy olyan futására, ahol egy, az algoritmus által később választott él súlya kisebb, mint egy korábban választotté.  
A futás leírásakor az éleket kell felsorolni a beválasztás sorrendjében és röviden indokolni, hogy miért ezeket választja az eljárás.
4. A Bellman-Ford algoritmust futtatjuk az  
a: b(1), d(3), e(7); b: c(2), d(5); c: d(-1), f(-4); d: e(3); e: -; f: d(x), e(2)  
éllistával adott gráfban, az a csúcsból (az  $x$  élsúly értéke nem ismert).  
A  $T$  táblázat harmadik és negyedik sorában a  $T[3, v]$  és  $T[4, v]$  értékek így néznek ki:

	a	b	c	d	e	f
3	0	1	3	2	6	-1
4	0	1	3	1	1	-1

Mi lehet  $x$  értéke és miért?

5. Az órán tanult összefésülés eljárást futtatjuk az 1, 3, 5, 9 és 2, 10,  $y$ , 15, 16 rendezett tömbökön, ahol  $y$  értéke nem ismert.  
(a) Hány összehasonlításban vesz részt a 9-es érték és miért?  
(b) Hány összehasonlításban vesz részt az  $y$  elem és miért?
6. Éllistával adott egy  $n$  csúcsú,  $e$  élű, irányítatlan, egyszerű  $G$  gráf és adott a csúcsok egy 3 színnel való színezése egy, a csúcsokkal indexelt  $S$  tömbben, ahol  $S[v]$  a  $v$  csúcs színe: *lila*, *sárga* vagy *rózsaszín*.  
Azt szeretnénk eldönteni, hogy ez egy olyan színezés-e, amiben azonos színű csúcsok között nem fut él  $G$ -ben. Adjon erre a feladatra  $O(n + e)$  lépésszámú algoritmust.

7. Mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az átlagos idő, ami az út megtételéhez autóval szükséges. A várost egy folyó szeli ketté, a folyón hidak vannak, csak ezeken lehet átkelni a folyó egyik partjáról a másik partra.

Mindegyik híd egyirányú, vagy egy jobbparti csomópontból vezet egy balpartiba vagy fordítva. A hidak egy listában adottak, egy hidat a  $(v_i, v_j)$  pár adja meg, ha a híd a  $v_i$  csomópontból a  $v_j$  csomópontba megy.

Lakásunk, mely az  $\ell$  csomópontban és munkahelyünk, mely az  $m$  csomópontban van, a folyó ellentétes oldalán találhatóak, ezért amikor dolgozni megyünk át kell kelünk az egyik hídon. Van egy kedvenc hídunk, amit használni szeretnénk és szeretnénk meghatározni azt a leggyorsabban megtehető utat, ami ezen a hídon keresztül vezet a lakásunkból a munkahelyünkre úgy, hogy a folyón csak egyszer kelünk át.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha  $O(n^2)$  lépésben meg akarjuk találni ezt a legjobb útvonalat (a szokásos módon  $n$  a csomópontok számát jelöli)?

8. Adott egy  $n$  méretű tömb, aminek az elején néhány (de legalább egy darab) 1-es áll, utána pedig minden elem 2-es (az lehetséges, hogy a tömb csupa 1-es számot tartalmaz). Adjon  $O(\log n)$  lépésszámú algoritmust, ami meghatározza az utolsó 1-es indexét.