Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
1. pótzárthelyi dolgozat
2013. 05. 09. 8.15–9.45

Név: ____________________

Neptun kód: ______________
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektort. *(10 p.)*

Kifejtve a $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 3 & 0-\lambda \end{pmatrix}$ determinánst a

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 10\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5$.
Legyen $v_1 = (x, y, z)$ a λ_1 sajátvektora. A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sajátérték egyenletből a

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x + 2z = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{array} \right\}$$

lineárisan független egyenletek adódnak.
Vagyis az egyenletrendszer egy megoldása $v_1 = (2, -2, -3)$.

2. Tegyük fel, hogy egy 2×2-es A mátrixnak az 1 és a -1 a sajátértéke. Határozza meg az A^4 sajátértékeit. *(10 p.)*

Az A mátrixnak legyen $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$ a sajátértéke, valamint legyen v_1 és v_2 a hozzájuk tartozó sajátvektor. Mivel minden $i = 1, 2$ esetén

$$A^4 v_i = A^3 (A v_i) = A^3 (\lambda_i v_i) = \lambda_i \left(A^3 v_i\right) = \lambda_i^4 v_i$$

teljesül, ezért a v_i vektor az A^4 mátrixnak is sajátvektora melyhez a λ_i^4 sajátérték tartozik. Tehát az A^4 mátrix sajátértékei λ_1^4 és λ_2^4, vagyis csak egy sajátértéke van az A^4 mátrixnak az 1.

3. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén van az *(10 p.)*

$$x + y + z = 4, \qquad x + 2y + 4z = 5, \qquad x + 3y + az = b$$

egyenletrendszereknek nulla, pontosan egy, illetve végtelen sok megoldása?
Első lépésben az első egyenletet kivonva a másodikból és a harmadikból; majd második lépésben a második egyenlet kétszeresét kivonva a harmadikból az

$$\begin{cases} x+y+ \quad z=4 \\ \quad y+ \quad 3z=1 \\ \quad 2y+(a-1)z=b-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+ \quad z=4 \\ \quad y+ \quad 3z=1 \\ \quad (a-7)z=b-6, \end{cases}$$

egyenletrendszerek adódnak. Az $(a-7)z=b-6$ egyenlet alapján az
– $a=7$, $b\neq 6$ esetben nincs megoldás;
– $a=7$, $b=6$ esetben végtelen sok megoldás van;
– $a\neq 7$ esetben pontosan egy megoldás van.

4. Számolja ki az *(10 p.)*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

A mátrix determinánsa $\det A = 0+12+12-0-4-4=16$. Az aldeterminánsokból álló mátrixból kiindulva

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(\pm1),\ \text{transzponálás}} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

az A mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Mely $a,b\in\mathbb{R}$ paraméter esetén lesz az $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix *(10 p.)* felcserélhető? (Vagyis mikor teljesül az $AB=BA$ egyenlőség?)
Elvégezve a mátrixszorzást, az $AB=BA$ egyenlet az alábbi alakú.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ a+2b & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2b \\ 2+a & 2+b \end{pmatrix}$$

Két mátrix egyenlő, ha minden elemük egyenlő, vagyis, ha

$$3=1+2a, \quad 3=1+2b, \quad a+2b=2+a, \quad 2a+b=2+b$$

teljesül. Ennek az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van: $a=1$ és $b=1$.

6. Határozza meg a *(10 p.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{2. oszlop - 1. oszlop} \\ \text{3. oszlop - 1. oszlop} \\ \text{4. oszlop - 1. oszlop}}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \\ 1 & 7 & 26 & 63 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{2. oszlop - 2}\times\text{ 1. oszlop} \\ \text{3. oszlop - 3}\times\text{ 1. oszlop}}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 12 & 42 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 42 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} = 4(21 - 18) = 12$$

Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
2. pótzárthelyi dolgozat
2013. 05. 09. 8.15–9.45

Név: ____________________

Neptun kód: ________________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+(-3)^{n+2}}{10^n}$ sor összegét. *(10 p.)*

Felhasználva, hogy $|q|<1$ esetén $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+(-3)^{n+2}}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 9\left(\frac{-3}{10}\right)^n = \frac{2}{1-\frac{2}{5}} + \frac{9}{1+\frac{3}{10}} = \frac{400}{39}$$

2. Konvergenciakritériumok segítségével döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e vagy sem. *(10 p.)*

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n}\right)^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+4n+5}$

a. Mivel $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = e^4 \neq 0$, ezért nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, vagyis a sor divergens.

b. A sor nem konvergens, ugyanis minden $N \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+3}{n^2+4n+5} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{n^2+4n^2+5n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{10n^2} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

3. Tekintsük az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \mapsto (x-y+z^2, xy-3z)$$

függvényt. Határozza meg a függvény deriváltját az $a=(1,1,1)$ pontban. (Vagyis adja meg a $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés mátrixát.)

Az f függvény komponensei $f=(f_1,f_2)$,

$$f_1(x,y,z) = x-y+z^2 \quad \text{és} \quad f_2(x,y,z) = xy-3z.$$

A komponensfüggvények paricális deriváltjai

$$\begin{array}{lll}(\partial_x f_1)(x,y,z)=1 & (\partial_y f_1)(x,y,z)=-1 & (\partial_z f_1)(x,y,z)=2z \\ (\partial_x f_2)(x,y,z)=y & (\partial_y f_2)(x,y,z)=x & (\partial_z f_2)(x,y,z)=-3\end{array}$$

mindenhol folytonos függvények, ezért az f függvény differenciálható az a pontban.
A függvény deriváltja

$$(\mathrm{D}f)(a)=\begin{pmatrix}(\partial_x f_1)(a) & (\partial_y f_1)(a) & (\partial_z f_1)(a) \\ (\partial_x f_2)(a) & (\partial_y f_2)(a) & (\partial_z f_2)(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

4. Számolja ki az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \qquad (x,y,z)\mapsto x+y^2+z^3$$

függvény $a=(1,1,-1)\in\mathbb{R}^3$ pontbeli $v\in\mathbb{R}^3$ iránymenti deriváltját, ahol a v vektor egyállású a $(3,0,4)$ vektorral.
A $v=\dfrac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|}=\dfrac{1}{5}(3,0,4)\in\mathbb{R}^3$ vektor egyállású a $(3,2,1)$ vektorral, és $\|v\|=1$. Mivel az f függvény

$$\partial_x f=1 \qquad \partial_y f=2y \qquad \partial_z f=3z^2$$

parciális deriváltjai mindenhol folytonosak, ezért a függvény mindenhol differenciálható, vagyis képezhető a

$$(\operatorname{grad} f)(a)=(1,2,3)$$

vektor. Az iránymenti derivált ekkor kiszámolható az alábbi módon.

$$(\mathrm{D}_v f)(a)=\langle(\operatorname{grad} f)(a),v\rangle=\left\langle(1,2,3),\frac{1}{5}(3,0,4)\right\rangle=\frac{3+0+12}{5}=3$$

5. Mutassa meg, hogy az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto x^4-y^4$$

függvénynek nincsen lokális szélsőértéke.
A függvénynek azon $P\in\mathbb{R}^2$ pontokban lehet szélsőértéke, melyekre $(\mathrm{D}f)(P)=0$, vagyis $(\partial_x f)(P)=0$ és $(\partial_y f)(P)=0$ teljesül.

$$\begin{array}{l}(\partial_x f)(x,y)=4x^3=0 \\ (\partial_y f)(x,y)=-4y^3=0\end{array}$$

Tehát a függvénynek csak a $P=(0,0)$ pontban lehet lokális szélsőértéke.
Az f függvénynek a P pontban nincsen lokális szélsőértéke, ugyanis $f(P)=0$, és bármely $r\in\mathbb{R}^+$ esetén a P pontnak egy r sugarú környezetében a függvény pozitív és negatív értékeket is felvesz, hiszen a koordinátatengelyek mentén nézve a függvényt $f(x,0)=x^4\geq 0$ és $f(0,y)=-y^4\leq 0$.

6. Számolja ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek. *(5+5 p.)*

a.) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ b.) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

a. Polárkoordinátákra áttérve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(r\cos^2\varphi\sin\varphi\right) = 0.$$

b. Mivel a

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2} = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

mennyiség nem független a φ szögtől, ezért a b.) feladatban szereplő határérték nem létezik.